

4次元の不思議な世界を覗いてみよう！！

松田 修 著



目次

1. 次元を理解しよう	1
2. 直交するという意味	2
3. 閉ざされた部屋の壁を通り抜ける	3
4. 4次元の三角錐を理解しよう	5
5. 4次元の直方体を理解しよう	7
6. 4次元の正多胞体を鑑賞しよう	9
7. 4次元の中の2つの平面の交わりは？	12
8. 球面を裏返す？	13

1. 次元を理解しよう

xy 座標系のことを2次元空間といいます。

例えば、点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ の意味は、 x 座標が2、 y 座標が5ということです。

一方、 x 座標が1であることは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 y 座標が1であることは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表されるので、

x 座標が2、 y 座標が5である点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ は、

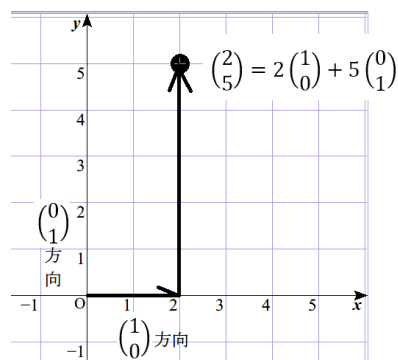
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

という式で表すことができます。そうすると、 xy 平面

の任意の点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表され、



xy 座標系の点は、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生み出されている

ことがわかります。つまり、 x 方向の基準が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 y 方向の基準が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、そして、

点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とは、原点から、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向へ a 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向へ b 、進んだ点のこと

となるのです。

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、 xy 座標系の基底(basis)といい、基底が2つあるので xy 座標系は2次元空間と呼ばれているのです。

xyz 座標系のことを3次元空間といいます。

例えば、点 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ の意味は、 x 座標が3、 y 座標が2、 z 座標が5ということです。そして、 x 方向の基準が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 y 方向の基準が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で、 z 方向の基準が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、

点 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とは、原点から、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向へ a 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向へ b 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向へ c 、進んだ点のこと

といえます。つまり、

xyz 座標系の点は、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生み出されている

のです。

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、 xyz 座標系の**基底 (basis)** といい、基底が3つあるので xyz 座標系は**3次元空間**と呼ばれているのです。

このように、

次元とは、その空間を生み出す基底の個数のこと

であり、空間のことを考えるときは、 xy 座標系や xyz 座標系などと考えずに、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向で作られる空間、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向で作られる空間というように考えると、3次元以上の空間も考えやすくなるのです。

問題 1.1 4次元空間の4つの基底とは何だろう。

問題 1.2 5次元空間の5つの基底とは何だろう。

2. 直交するという意味

xy 座標系では、2つの基底である $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向は直交しています。そして、 xyz 座標系では、3つの基底である $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向は、どの2つをとっても直交しています。しかし、4次元の世界は目で見ることにはできないので、4つの基底の2つが直交していることを判断することはできません。

そこで、2つの方向が直交するということを、視覚的にではなく、
2つの方向の関係性が0という値になるように考えます。

ステップ1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向が直交するということを、ある種の計算を定義して0となるように考えるには、どういう計算をすればよいか考えます。

ステップ2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向も直交しています。 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ 方向も直交しています。これらもすべて矛盾なく定義しなくてはなりません。

ステップ3

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のような、どんな直交する組においても、計算結果が0となるような計算方法を考えます。

【こたえ】 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 方向が直交することは

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

の（内積という）計算から得られる結果が0となるものと定義します。

問題 2.1 3次元空間の3つの基底はそれぞれ直交している。理由を述べよ。

問題 2.2 4次元空間の4つの基底はそれぞれ直交している。理由を述べよ。

問題 2.3 5次元空間の5つの基底はそれぞれ直交している。理由を述べよ。

3. 閉ざされた部屋の壁を通り抜ける

私たちは3次元人です。2次元人とは2次元空間でしか生きられない人たちのことです。したがって、2次元人は3次元人の行動が理解できません。反対に3次元人は2次元人の行動は簡単に理解できます。

3.1 2次元人のセコの悩み

2次元空間において、今、2次元人のセコは原点にいます。ところがセコは、原点を中心にした円状の障害物で囲まれてしまって、その外側に移動することができません。



その様子を見ていた3次元人サドはセコの悩みが理解できません。なぜなら、サドは円状の障害物を飛び越えることは簡単にできるからです。しかし、

“**円状の障害物を飛び越える**”

これが2次元人のセコが持っていない運動能力なのです。

3次元人サドはセコの場所に行き、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向へジャンプして、障害物を飛び越えました。

これを見たセコは、サドが障害物をすり抜けたように見えて怯えました。

それ以前に、セコにとってサドは、姿を自由に変形する奇妙な黒い生き物に見えていました。なぜならば、3次元人のサドは2次元人としてはいつも影として動いていたからなのです。

3.2 3次元人のサドの悩み

今度は、3次元空間において、3次元人のサドは原点にいます。ところが原点を中心にした球状の壁に囲まれて、サドはその外側に移動することができません。サドは球状のカプセルに閉じ込められていたのです。



その様子を見ていた4次元人フォスはサドの悩みが理解できません。なぜならば、フォスにとって球状の壁を飛び越えることは簡単にできるからです。しかし、

“球状の壁を飛び越える”

これが3次元人のサドが持っていない運動能力なのです。

問題 3.1 4次元人フォスは、どのようにして球状の壁を飛び越えることができるのでしょうか？ そしてその様子は3次元サドにはどのように見えるのでしょうか？

4. 4次元の三角錐を理解しよう

2次元の三角錐とは三角形のことです。

三角形には、点が3つ、辺が3つ、そして面が1つあります。

3次元の三角錐とはよく知っている三角錐のことです。

三角錐には、点が4つ、辺が6つ、面が4つ、そして三角錐が1つあります。

ところで1次元の三角錐とは線分のことと考えます。そして、

線分には、点が2つ、辺が1つあります。

ここで4次元以上の三角錐を考えやすくするために、記号を導入します。

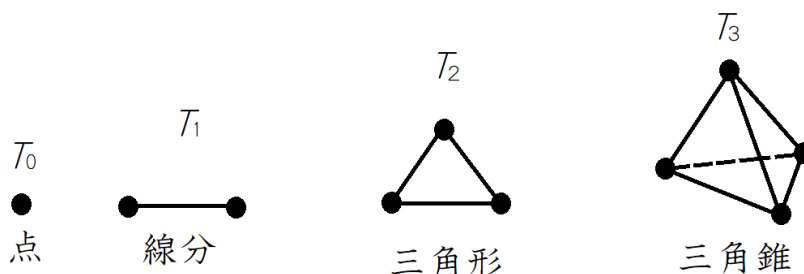
T_0 : 0次元の三角錐, 点のこと

T_1 : 1次元の三角錐, 線分のこと

T_2 : 2次元の三角錐, 三角形のこと

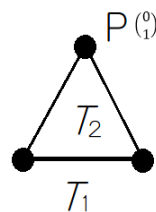
T_3 : 3次元の三角錐, いわゆる三角錐

そして、4次元の三角錐は T_4 , 5次元の三角錐は T_5 というように表します。



4.1 T_1 から T_2 を構成する

1次元の三角錐 T_1 (線分) から2次元の三角錐 T_2 (三角形) を構成しましょう。2次元空間の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向に平行に T_1 を置いて、 T_1 を含む直線 (1次元空間) 以外の $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に点Pとり、Pから T_1 の両端の点に線を引き

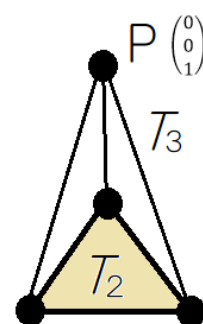


くと T_2 ができます。このとき、

- ・点 T_0 の個数は、Pを加えたため3個となります。
- ・辺 T_1 の個数は、Pから2個の点に線を引きいたために2本が追加され、合計3個となります。

4.2 T_2 から T_3 を構成する

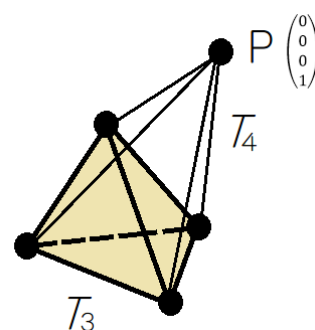
2次元の三角錐 T_2 から3次元の三角錐 T_3 を構成します。3次元空間の中にある2次元空間に T_2 を置いて、 T_2 を含む2次元空間以外の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に点Pとり、Pから T_2 の3つの点に線を引きくと T_3 ができます。このとき、



- ・点 T_0 の個数は、Pを加えたため4個となります。
- ・辺 T_1 の個数は、Pから3つの点に線を引きいたために3本が追加され、合計6個となります。
- ・面 T_2 の個数は、 T_2 の線とPとで面 T_2 が1面できるため、3本の線をもつ T_2 から3つの面が生まれ、合計4個となります。

4.3 T_3 から T_4 を構成する

それではいよいよ3次元の三角錐 T_3 から4次元の三角錐 T_4 を構成しましょう。4次元空間の中にある3次元空間に T_3 を置いて、 T_3 を含む3次元空間以外の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に点Pとり、Pから T_3 の4



つの点に線を引きくと T_4 ができます。このとき、

- ・点 T_0 の個数は、Pを加えたため5個となります。
- ・辺 T_1 の個数は、Pから4個の点に線を引きいたために4本が追加され、合計10個となります。
- ・面 T_2 の個数は、 T_3 の線とPとで面 T_2 が1面できるため、6本の線をもつ T_3 から6面が生まれ、合計10個となります。

さて、ここからがポイントで、 T_4 に含まれる三角錐 T_3 の個数を数えます。

- ・三角錐 T_3 の個数は、 T_3 の面とPとで T_3 (三角錐) が1つできるため、4つの面をもつ T_3 から4つの T_3 が生まれ、合計5個となります。

以上のことを表にまとめましょう。

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_1	2	1				
T_2	3	3	1			
T_3	4	6	4	1		
T_4	5	10	10	5	1	
T_5						

問題 4.1 5次元の三角錐 T_5 に含まれる T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 の個数を求めて、上の表に書き込め。

問題 4.2 上の表にはどのような法則が潜んでいるか。

5. 4次元の直方体を理解しよう

2次元の直方体とは長方形のことです。長方形には、点が4つ、辺が4つ、そして面が1つあります。3次元の直方体には、点が8つ、辺が12つ、面が6つ、そして直方体が1つあります。三角錐のときと同じで1次元の直方体を線分とします。線分には、点が2つ、辺が1つあります。ここで4次元以上の直方体を考えやすくするために、記号を導入します。

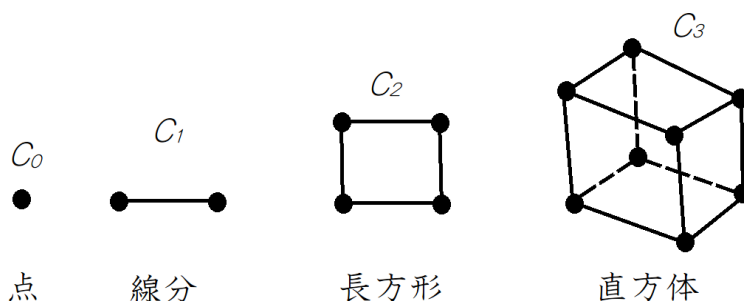
C_0 : 0次元の直方体, 点のこと

C_1 : 1次元の直方体, 線分のこと

C_2 : 2次元の直方体, 長方形のこと

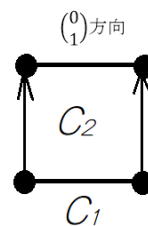
C_3 : 3次元の直方体, いわゆる立方体

そして, 4次元の直方体は C_4 , 5次元の直方体は C_5 というように表します。



5.1 C_1 から C_2 を構成する

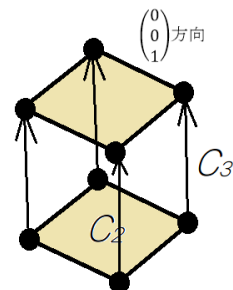
1次元の直方体 C_1 (線分) から2次元の直方体 C_2 (正方形) を構成します。2次元空間の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向に平行に C_1 を置いて、 C_1 を含む直線(1次元空間)以外の $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向にのコピーを C_1 の長さだけ移動すると、 C_1 と C_1 のコピーとの間に C_2 ができます。このとき、



- ・点 C_0 の個数は、 C_1 に含まれる2点が加わり4個となります。
- ・辺 C_1 の個数は、 C_1 のコピーと C_1 の2点が移動した軌跡から2個の辺 C_1 が生まれるために3個が追加され、合計4個となります。

5.2 C_2 から C_3 を構成する

2次元の直方体 C_2 から3次元の直方体 C_3 を構成します。3次元空間の中にある2次元空間に C_2 を置いて、 C_2 を含む2次元空間以外の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に C_2 のコピーを C_2 の辺の長さだけ移動すると、 C_2 と C_2 のコピーとの間に C_3 ができます。このとき、



- ・点 C_0 の個数は、 C_2 に含まれる4点が加わり8個となります。
- ・辺 C_1 の個数は、 C_2 のコピーにある4本と C_2 の4本が移動した軌跡から4本の辺が生まれるために8本が追加され、合計12個となります。
- ・面 C_2 の個数は、 C_2 のコピーにある1面と C_2 の4本の直線が移動した軌跡から4つの面が生まれるために5面が追加され、合計6個となります。

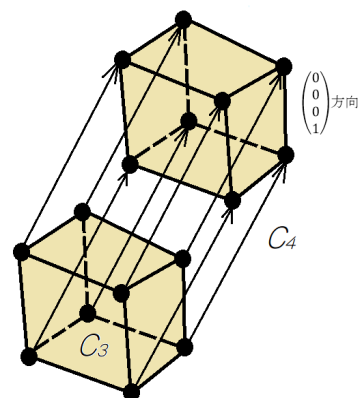
5.3 C_3 から C_4 を構成する

いよいよ3次元の直方体 C_3 から4次元の直方体 C_4 を構成します。4次元空間の中にある3次元空間に C_3 を置

いて、 C_3 を含む3次元空間以外の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に C_3 のコピーを

C_3 の辺の長さだけ移動すると、 C_3 と C_3 のコピーとの間に C_4 ができます。このとき、

- ・点 C_0 の個数は、 C_3 に含まれる8点が加わり16個となります。
- ・辺 C_1 の個数は、 C_3 のコピーにある12本と C_3 の8本が移動した軌跡から8個の辺が生まれるために20本が追加され、合計32個となります。



- ・面 C_2 の個数は、 C_3 のコピーにある6面と C_3 の12本の直線が移動した軌跡から12個の面が生まれるために18面が追加され、合計24個となります。
- ・直方体 C_3 の個数は、 C_3 のコピーにある1個と C_3 の6面が移動した軌跡から6個の立方体が生まれるために7個が追加され、合計8個の直方体となります。

以上のことを表にまとめましょう。

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	2	1				
C_2	4	4	1			
C_3	8	12	6	1		
C_4	16	32	24	8	1	
C_5						

問題 5.1 5次元の直方体 C_5 に含まれる C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 の個数を求めて、上の表に書き込め。

問題 5.2 上の表にはどのような法則が潜んでいるか。

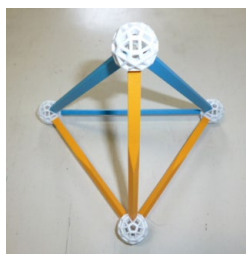
6. 4次元の正多胞体を鑑賞しよう

最後に4次元の美しい正多胞体という物体を紹介しましょう。

まず、3次元の世界において**正多面体**とは、**全ての面が同じ正 n 角形でできた閉じた物体のこと**をいいます。そして、正多面体は、

正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類しか存在しない

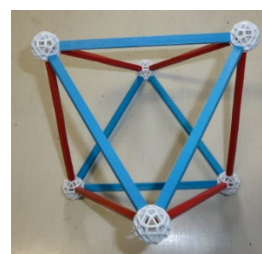
ことが証明されています。



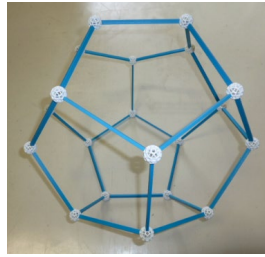
正四面体



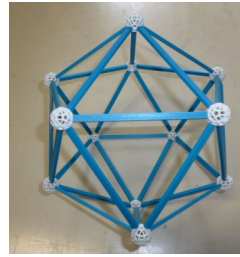
立方体



正八面体



正十二面体

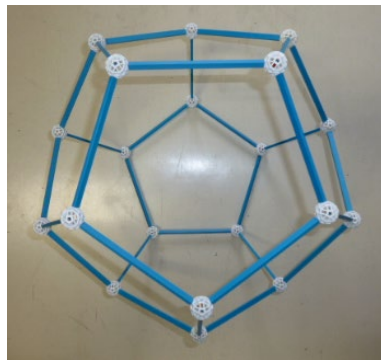


正二十面体

上の図のように、正四面体は正三角形が4個、立方体は正方形が6個、正八面体は正三角形が8個、正十二面体は正五角形が12個、そして正二十面体は正三角形が20個で構成されています。

(4次元の物体に向けての鑑賞のポイント)

例えば、正十二面体の鑑賞のポイントを解説します。正十二面体を真上から見た図が以下です。



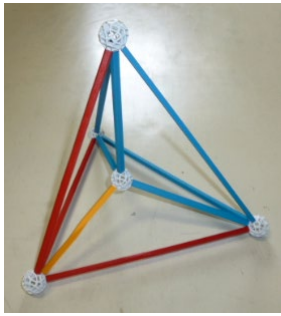
正十二面体は正五角形で構成された物体です、正面の正五角形は真に正五角形に見えるのですが、側面の正五角形はひしゃげています。特に上側面の正五角形はもう少しで潰れて見えなくなるくらいです。

さて、**正多面体の4次元のバージョンは正多胞体と呼ばれています**。それらは同じ正多面体の面と面が張り合わさってできた4次元の物体です。そして、正多胞体は

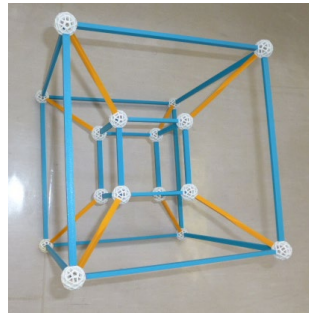
正5胞体、正8胞体、正16胞体、正24胞体、正120胞体、正600胞体の6種類しか存在しない

ことが証明されています。

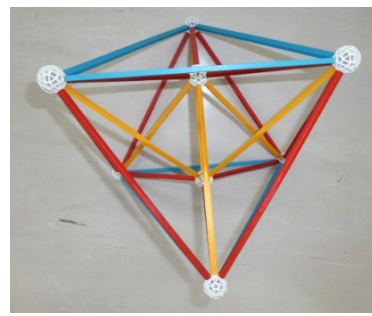
正5胞体は正四面体が5個、正8胞体は立方体が8個、正16胞体は正四面体が16個、正24胞体は正八面体が24個、正120胞体は正十二面体が120個、そして正600胞体は正四面体が600個で構成されています。以下の図は正多胞体の3次元投影図です。



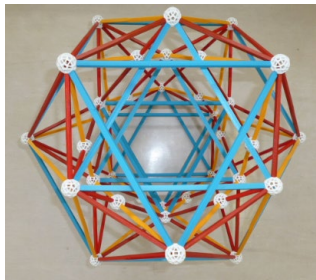
正5胞体



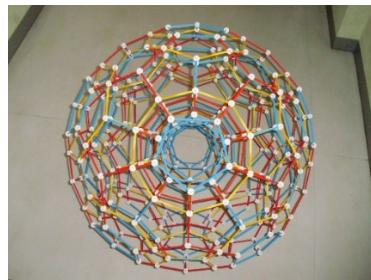
正8胞体



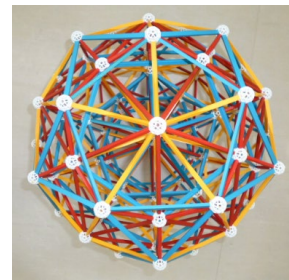
正16胞体



正24胞体

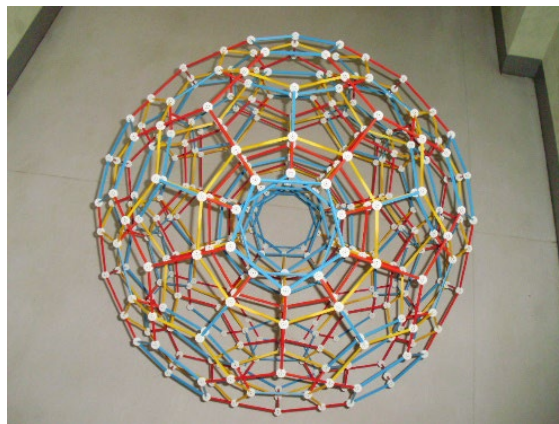


正120胞体



正600胞体

(正120胞体の鑑賞のポイント)



ここで見る正120胞体は、4次元の正120胞体の第4番目の軸から見た投影模型です。したがって、中心にある正12面体は真に正12面体として見るができます。しかし、中心から外に向かうにつれ、正120胞体を構成している正12面体の形は次第に潰れていき、一番外側においては、完全に潰れて平になっています。

問題 6.1 4次元の6タイプの胞体の中で、どの胞体が一番好きか答え、その理由を述べよ。

7. 4次元の中の2つの平面の交わりは？

私たちは3次元空間において、2つの平面が交わったとき、その交わりは直線になることを知っています。では、4次元空間において、2つの平面が交わったとき、その交わりはやはり直線になるのだろうか、という問題を考えてみましょう。

そのために、もう一度、点（0次元空間）とは何か、直線（1次元空間）とは何か、平面（2次元空間）とは何か、3次元空間とは何か、ということを整理してみます。

まず、直線（1次元空間）とは、1つの方向（ベクトルという）が基底である空間のことです。つまり、1次元空間の生物は、1つの方向にしか進むことができないのです。

次に、平面（2次元空間）とは2つの異なるベクトルが基底である空間のことです。つまり、2次元空間の生物は、2つの方向（縦方向、横方向）にしか進むことができないのです。

そして、3次元空間とは、3つの異なるベクトルが基底である空間のことです。つまり、3次元空間の生物は、3つの方向（縦方向、横方向、上方向）にしか進むことができないのです。

さて、3次元空間内に、平行でない2つの平面 H_1 と H_2 があったとします。 H_1 と H_2 はそれぞれ、2つの基底であるベクトルをもっています。そこで、 H_1 の基底を $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ とし、 H_2 の基底を $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ とします。すると、 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ と $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ とで作られる新たな空間を $H_1 \oplus H_2$ と書くことにすると、 $H_1 \oplus H_2$ は3次元空間の中にあるので、 $H_1 \oplus H_2$ の中の4つのベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ と $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ は基底にはなりません。つまり、 $H_1 \oplus H_2$ は3次元でなくてはならないのです。このことを

$$\dim H_1 \oplus H_2 = 3$$

と書きます。 $\dim$ は dimension の略で、 $\dim H_1 \oplus H_2$ は $H_1 \oplus H_2$ の次元という意味です。

H_1 と H_2 の交わりを $H_1 \cap H_2$ という記号で書きます。私たちの目的は、 $H_1 \cap H_2$ の次元 $\dim H_1 \cap H_2$ を知ることです。以下の公式が知られています。

次元公式

$$\dim H_1 \oplus H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

では、3次元空間において、2つの平面 H_1 と H_2 が交わったとき、その交わり $H_1 \cap H_2$ は直線になることを、次元公式を使って、確かめてみます。

$$\dim H_1 \oplus H_2 = 3, \quad \dim H_1 = 2, \quad \dim H_2 = 2$$

であるので、

$$3 = 2 + 2 - \dim H_1 \cap H_2$$

よって,

$$\dim H_1 \cap H_2 = 1$$

つまり, 交わり $H_1 \cap H_2$ は直線であることがわかりました。

では, 4次元空間において, 2つの平面 H_1 と H_2 の交わり $H_1 \cap H_2$ の次元を計算します。この場合,

$$\dim H_1 \oplus H_2 = 4$$

の可能性があります。

$$3 = 2 + 2 - \dim H_1 \cap H_2$$

よって, 次元公式を使って, 確かめると,

$$\dim H_1 \oplus H_2 = 4, \quad \dim H_1 = 2, \quad \dim H_2 = 2$$

であるので,

$$4 = 2 + 2 - \dim H_1 \cap H_2$$

よって,

$$\dim H_1 \cap H_2 = 0$$

つまり, 交わり $H_1 \cap H_2$ は点である場合が起こることがわかりました。

問題 7.1 4次元空間において, 3次元空間と平面の交わりは何次元か。

問題 7.2 5次元空間において, 2つの3次元空間の交わりは何次元か。

8. 球面を裏返す？

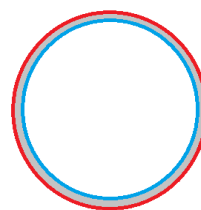


3次元空間の中で柔らかい球面を, 切ったり, 穴を開けたりせずに, 裏返すことは当然できません。しかし, 4次元空間では裏返すことができます。

これを証明したのが, スティーヴン・スメイルという数学者で1957年のことでした。その後にアーノルド・シャピロやベルナール・モランといった数学者達によって, 具体的で簡単な裏返し方を示しました。それでも, 実際には球面の裏返しを

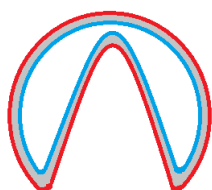
説明することは、やはり難しいことです。

そこで、球面の裏返しを少しでもイメージできるように、柔らかい円を裏返すということから説明します。分かりやすいように、外側が赤で、内側が青の幅のある柔らかい円を考えます。当然、2次元空間においては、裏返す（ひっくり返す）ことはできません。しかしこの円が3次元空間にあるならば、裏返すことは簡単です。ここで、もしあなたが2次元人であったなら、実際は3次元空間で裏返されている様子を、2次元人にはどのように見えるかを考えてみましょう。

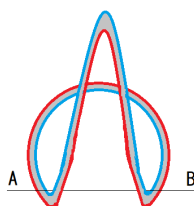


柔らかい円

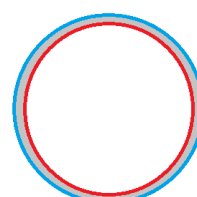
まず、(変形1)のように下方を上押し上げます。次に、さらに同じ部分を押し上げます。このとき、実際は3次元空間で行っている操作なので、円が自分自身と交差しています(変形2)。そして、交差している部分より上側では外側と内側が入れ代わっています。最後に、(変形2)の図に描いた直線ABを軸に、まだ入れ代っていない部分をひねって反転させれば、円の外側と内側が完全に入れ代わります。



(変形1)



(変形2)



(変形3)

以上の円の裏返しのポイントは、2次元空間において自分自身と交差することは許されることが、そして適当なときに、ひねって反転させてよいということです。

球面の裏返しについては [youtube](#) など、その動画が紹介されています。以下は、球面の裏返しのステップを表した写真です(H22年度の松田チャレンジゼミナールの学生が作ったもの)。分かりやすいように外(赤)と内(青)が見えるようにしてあります。



(1) 外が赤、内が青の球



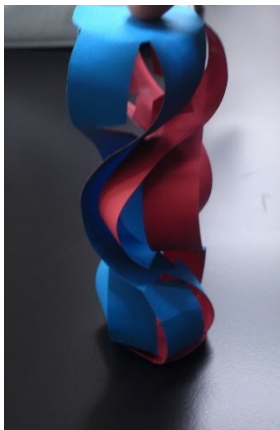
(2) 底を押し上げて自分自身を突き抜けさせる。



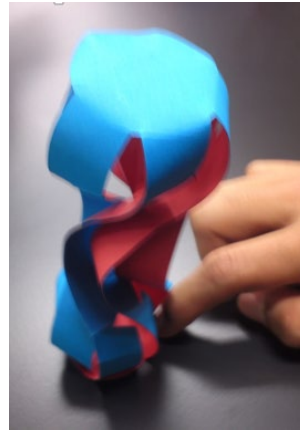
(3) 交差部分をひねる。



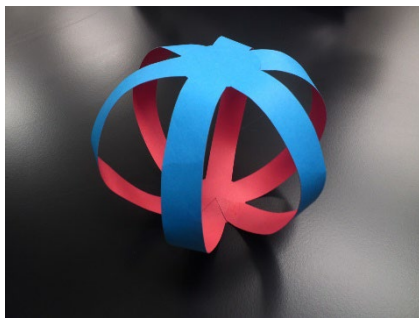
(4) さらにひねる。



(5) まだまだひねる。



(6) 裏面が次第に外側に出てくる。



(7) 裏返し完了！

おわりに

4次元の不思議な世界はいかがでしたか。4次元人は3次元の世界の鍵の掛かった部屋に閉じ込められても簡単にそこを脱出できます。そのことを考えると、球面は4次元の世界で裏返すことができることもなんとなくわかります。4次元の世界の多胞体と呼ばれる物体を3次元の世界に投影して見ると、複雑ですが、なんともいえない美しさがあったと思います。

まだまだ、4次元の世界には不思議なことがたくさんあります。

平面と平面は3次元の世界で交わる時はその交わりが直線となりますが、**実は4次元の世界では、平面と平面が交わる時、その交わりは一般に点となります。さらに、立体と立体が交わる時、その交わりは一般に直線となるのです。想像できますか？**このようなことは、線形代数またはベクトル空間論と呼ばれる数学の分野で次元公式を学ぶと理解できるようになります。

ここでの4次元の話とは少し違いますが、**アインシュタインは私たちが生きているこの世界をミンコフスキーの4次元空間（時空と呼ぶ）と考えました。**アインシュタインが考える4次元空間での距離の測り方は、時間を考慮した測り方で、みなさんが知っている方法と少し違います。そのために、もしあなたが光に限りなく近い速度で移動することができたなら、あなたの時計は通常の状態よりもゆっくと進むことになるのです。例えば、あなたが光の速度の0.99倍の速さの亀に乗せられて、あなたの時計で1日かけて竜宮城に行き、2日遊んで、また1日かけて家に戻って来たとすると、移動日の2日間で時計の速さが変わるために、あなたの友達からは「16日間もどこへ行っていたの？」と聞かれることになるのです。このような理論を駆使して**アインシュタインは、ブラックホールの存在を予言**しました。そして**2016年9月14日にブラックホールの存在を示す重力波がアメリカのレーザー干渉計型重力波検出器「LIGO」で検出された**のです。

4次元の世界だけでなく、数学はたくさんの不思議で面白い世界を私たちに見せてくれます。つまり、数学は私たちの想像を大きく膨らませて、人生を豊かにしてくれるものなのです。そして、日々数学を研究している数学者と呼ばれる人たちは、今まで誰も知らなかった**面白くて美しい数学的真実を探究している**のです。

著者紹介

松田 修 (まつだ おさむ)

1963 年生まれ, 津山工業高等専門学校 総合理工学科 教授, 博士 (理学)

著書

「1 から始まる数学 k -パスカル三角形, k -フィボナッチ数列, 超黄金比」(東京図書)

「微分積分 基礎理論と展開」(東京図書)

「改訂新版 これからスタート! 理工学の基礎数学」(電気書院)

「これからスタート! 理工学の基礎数学 演習ノート」(電気書院)

「物理から考える微分積分入門」電気書院)

「ベクトル空間からはじめる抽象代数入門」(森北出版)

ホームページ: <http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/>

数学クラブのホームページ: <http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub.html>