

無限 ∞ の数学

松田 修



写真出典：<https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/iss060e002083.jpg>

1. 無限の記号



上の記号を、日本語では「無限大」、英語「infinite」(インフィニット)、ドイツ語「unendlich」(ウンエンドリヒ)、フランス語「Infini」(アンフィニー)、ロシア語「бесконечность」(ビスケンニッチトス)、ギリシア語「ἄπειρο」(アペイロ)、イタリア語「infinito」(インフィニート)、アラビア語「لانهاية」(レンハイヤ)、ヒンデー語「अनन्तता」(アヌッタ)、韓国語「무한」(ムハン)、中国語では「無限」(ウーシエン)などと呼ばれています。

2. 無限とは何か？

「無限とは何でしょう？」

Wikipedia では、最初に、

“無限とは果てがないこと”

と書かれています。この説明では、何となく分かった気がします。本当に分かったかどうかは怪しいところ。そこで、次の命題を考えてもう少し無限の意味理解することにします(数学では、命題とは、正しいかどうか判断できる文章のことです)。

命題. 自然数は無限に存在する。

この命題の中に無限という言葉が出てきました。この命題を証明することができれば、無限の意味がある程度分かったことになると思います。そこで証明に入る前に、やはり無限ということを、数学的に扱えるようにしておく必要があります。自然数は1,2,3,4と増えていく数のことです。ここで証明すべき無限は、自然数に最大値が無いということです。すなわち、ここで述べられた無限とは、最大値がないという意味だとすることができます。すなわち、上の命題は



命題. 自然数には最大値が存在しない。

と書き直せば証明することができます。

(証明) 自然数に最大値が存在すると仮定し、それを N とする。しかし、 $N+1$ も自然数であり、これは、 N よりも大きい。これは N が最大値であることに矛盾する。したがって、自然数には最大値が存在しない。すなわち、自然数は無限に存在する。Q.E.D.

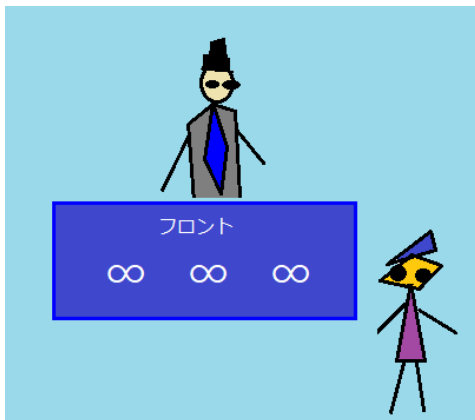
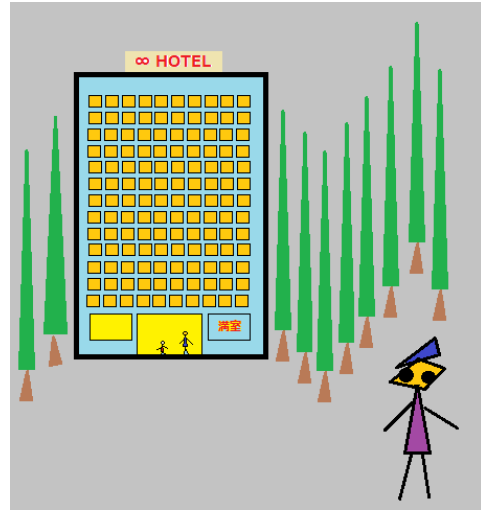
チャレンジ問題 1. 「命題. 偶数は無限に存在する」を証明してください.

3. 無限の部屋をもつホテル

ある旅人が、旅の途中の森の中で「 ∞ HOTEL」という奇妙なホテルを見つけました。それは、無限の部屋をもつホテルでした。その旅人は、今夜はこのホテルに泊まろうと決めました。ところが、ホテルの入り口には、

「満室」

と書いてありました。周りにはホテルらしきものがありません。旅人は困りましたが、倉庫でもいいから泊めてもらおうと、受付に行きました。



支配人「いらっしゃいませ」

旅人「今夜泊めてもらおうと思ったのですが、満室のようです。倉庫でもいいから泊めて欲しいのですが。」

支配人「当ホテルには無限に部屋がありますから、大丈夫ですよ。」

旅人 「えっ？」

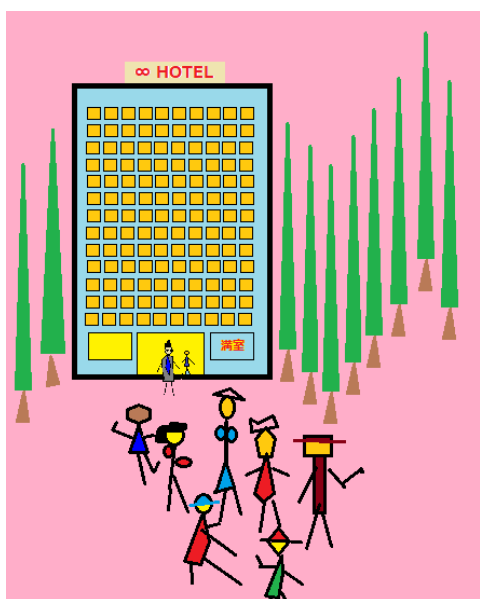
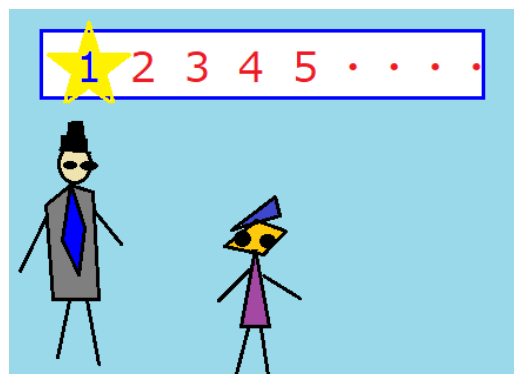
支配人「それでは1号室を空けますから、しばらくお待ちください。」

支配人は、マイクのスイッチをいれて放送しました。

支配人「宿泊のお客様にお願いがございます。本日満室ですが、新たに一人のお客様が宿泊されたいとのことで、大変困っていらっしゃいます。このお客様のために、大変申し訳ありませんが、今お泊りの部屋の番号の次の番号の部屋にお移りください。ただいま全部屋のロックを解除します。なお移動されましたら、部屋の机横にある移動完了ボタンを押してください。よろしくおねがいします。」

しばらくして、支配人がやってきて、旅人に言いました。

支配人「お待たせいたしました。1号室が空きましたので、そちらにお泊りください。」



次の日、「無限ホテル」は、また満室でした。そこへ30人の新しい客たちがやってきました。

チャレンジ問題2. 30人の新しい客たちを、支配人はどのようにして泊めたのでしょうか。

1週間後、「無限ホテル」は、また満室でした。そこへ無限人の新しい客がやってきました。

チャレンジ問題3. 無限人の新しい客たちを、支配人はどのようにして泊めたのでしょうか。

4. 素数は無限に存在する？

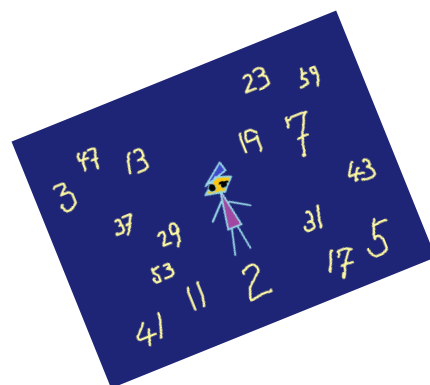
素数とは1か自分自身でしか割り切れない数のことで、小さい方から10個並べると

2,3,5,7,11,17,19,23,29,31

となります。次の命題を証明しましょう。

命題 素数は無限に存在する。

証明は、素数の中に最大値が無いことを示せばよいのです。



(証明) 素数に最大値があると仮定し、それを P とする。いま、 P まで現れる全ての素数を使って、それらを全て掛けたものに1を足した数を Q とする。すなわち

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times \cdots \times P) + 1$$

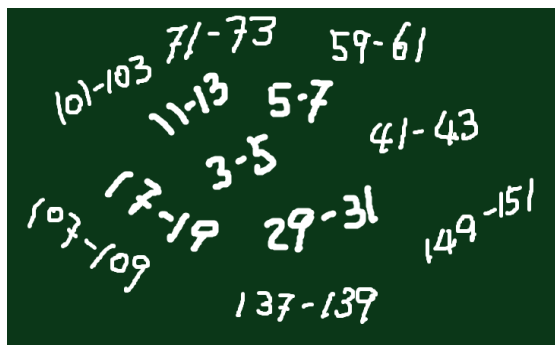
である。明らかに $Q > P$ である。 P は素数の最大値なので、 Q は素数ではない。つまり、 Q は P 以下のある素数で割りきれないはずである。しかし、 Q は P 以下のどんな素数で割っても1余る。これは、 Q が素数であることを意味する。これは、 P が素数の中の最大値であるということに矛盾する。したがって、素数は無限に存在する。Q.E.D.

素数 p, q で $q - p = 2$ である素数のペア (p, q) のことを双子素数と呼んでいます。最初の5個の双子素数を並べると、

$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)$

となります。

命題 双子素数は無限に存在する。



この命題を証明しましょう、と言いたいところですが、残念ながら証明を紹介することができません。なぜならば、これは未だだれも証明した人がいないからです。すなわち、上の命題は未解決問題なのです。

チャレンジ問題 4. 「命題. 4 で割って 3 余る素数は無限に存在する」を証明してください。

5. 有理数の無限

有理数とは、その数を小数で表したときに、0.5 や 0.1729 などのような有限小数になるか、0.333... や 79.54123123123... のように、小数点以下に並んだ数が循環する循環小数になる数のことといいます。実は、有限小数か循環小数になる数は、整数や分数だけなので、有理数は整数または分数といった数のことです。

次の命題を証明しましょう。

命題 0 と 1 の間には有理数が無限に存在する。

証明は、0 と 1 の間のどんな 2 つ有理数の間にも必ずその 2 つとは異なる有理数があることを示せばよいのです。

(証明) a, b を $a < b$ であって、そして0と1の間の有理数で、 a と b の間には有理数は存在しないと仮定する。いま、 a と b の半分の数を考え、それを c とする。すなわち

$$c = \frac{a+b}{2}$$

とする。ところが、 a, b は分数であるので、 c も分数である。これは、 a と b の間には有理数は存在しないという仮定に矛盾する。したがってどんな2つ有理数の間にも必ずその2つとは異なる有理数が存在する。つまり、0と1の間には有理数が無限に存在する。Q.E.D.

0と1の間には有理数が無限に存在することが分かったのですが、
有理数たちはどのように並んでいるのか想像してみてください。

証明からも想像できるように、有理数たちは、有理数と有理数の間には必ず隙間があって、そこにまた別の有理数が存在していて、そしてその有理数の近くの有理数との間にもまた小さな隙間があって、というような感じに並んでいるのです。つまり、

確かに0と1の間には有理数が無限に存在するのだけれど、
どんなに近い2つの有理数の間にも必ず隙間がある

のです。これが有理数の無限なのです。

チャレンジ問題5。「命題. 0に最も近い有理数は存在しない」を証明してください。

6. 連続的な無限 (アレフ)

数直線上にある数の中で、有理数でない数を無理数といいます。たとえば、2回かけて2になる数を $\sqrt{2}$ と書きますが、

$$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$$

で、小数点以下の数字は決して巡回しない数となっているので、 $\sqrt{2}$ は無理数です。

有理数と無理数の数の集まりを実数の集合

といいます。

0と1の間には有理数が無限に存在するのだけれど、どんなに近い2つの有理数の間にも必ず隙間がありました。そして、無理数はその隙間を液体のように完全に埋めているのです。これが実数の無限です。

このように実数の無限のあり方は、有理数の無限のあり方とは完全に異なるのです。これらのことから、無限には濃さの違い、つまり**濃度**があることが分かりました。

そして、現代の数学では、有理数の無限の濃度を $\aleph_0$ と書いてアレフゼロと呼び、実数の無限の濃度を $\aleph$ と書いてアレフと呼んでいます。さらに、 $\aleph$ は $\aleph_0$ より無限の濃度が濃いという意味を、

$$\aleph < \aleph_0$$

と表します。まとめると、

実数の無限の濃度 $\aleph$ は、有理数の無限の濃度 $\aleph_0$ より濃い

となります。

7. 無限個の数の計算にチャレンジ！

次の計算をやってみよう。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = ?$$

これは簡単で、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{8} = \frac{15}{8}$$

となります。 それでは、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$

はどうでしょう。 $+\dots$ は、この後続く同じ法則で作られる分数を無限個足しなさいという記号です。

この計算を行うために、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (A)$$

と置きます。そして、 $\frac{S}{2}$ を考えます。つまり、

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (B)$$

を作ります。 $(A) - (B)$ を計算すると、

$$\frac{1}{2}S = 1 \quad \Rightarrow \quad S = 2$$

となります。 すなわち、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

が分かりました。

このように無限の数の足し算もちょっとしたアイディアで計算することができるようになります。

では、次の問題はどうでしょう！

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \cdots = ?$$

これも

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \cdots$$

と置きます。ここで、

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{1 \times 3} = \frac{2}{1 \times 3}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{3 \times 5} = \frac{2}{3 \times 5}, \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{7-5}{5 \times 7} = \frac{2}{5 \times 7},$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{9-7}{7 \times 9} = \frac{2}{7 \times 9}, \quad \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{11-9}{9 \times 11} = \frac{2}{9 \times 11}, \cdots$$

なので、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \right\} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となります。つまり、

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \cdots = \frac{1}{2}$$

となりました。

ところで、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$$

という有名な計算があります。この計算をここで説明することはできません。この計算は、高専に入学して微分積分を勉強すれば理解することができるようになります。

チャレンジ問題 6. 次の計算を行ってください。

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = ?$$

$$(2) \quad \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots = ?$$

8. ライプニッツの調和三角形

17世紀のドイツの哲学者で数学者でもあるライプニッツは、以下の数の三角形を考案しました。

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
 & & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
 & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8} \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & & \\
 \end{array}$$

この数の三角形を、ライプニッツの調和三角形と言います。

この三角形の基本性質について説明します。まず、一つの分数 a に着目します。そして、その分数 a を頂点とする3つの分数 a, b, c の小さい三角形

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 b & & c
 \end{array}$$

を考えます。このとき、

$$a - b = c$$

となっている。これがライプニッツ調和三角形の基本性質です。例えば、三角形

$$\begin{array}{ccc}
 & \frac{1}{3} & \\
 \frac{1}{4} & & \frac{1}{12}
 \end{array}$$

において、

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

となっているのです。

実は、このライプニッツの調和三角形には、ある秘密が隠されています。それは、無限輪に関する秘密です。

ライプニッツの調和三角形の両端の数列は、

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

で、この無限和は、前節で紹介したように、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots = \infty$$

です。しかし、その他の列の無限和は ∞ ではありません。

例えば、左から第2列目（または右から第2列目）を見てみます。その数列は、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \dots$$

です。この無限和はどのような値にあるのでしょうか？ どの答えは、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \dots = 1$$

となります。

この計算の仕組みを説明しましょう。ライプニッツの調和三角形の基本性質より、

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

です。これらを辺々足していきます。すると、左辺は1以外の数は打ち消しあって、

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \dots$$

が得られるのです。そして、さらに上の式の右辺の分数を1個ずつ順に減らしていくと

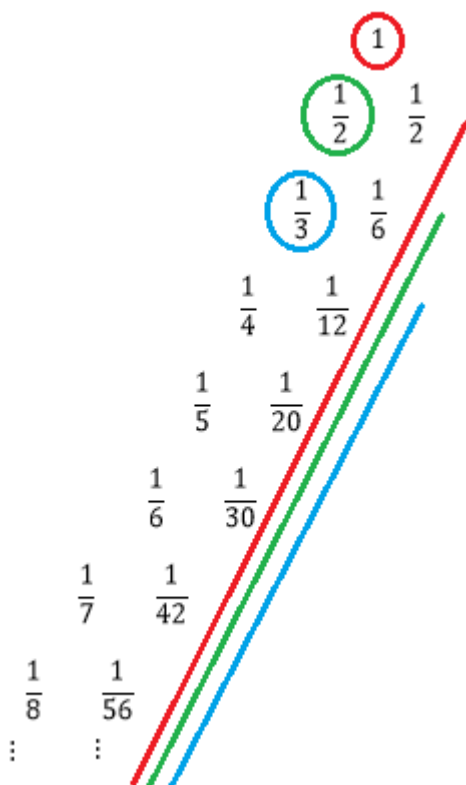
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \dots$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \cdots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \cdots$$

が得られるのです。そしてこれらの無限和の計算は、以下の図のようにライプニッツの調和三角形の中に答えは用意されていたのです。



この無限和の計算の仕組みは明らかに他の列にも適応されます。例えば第3列目を見ると、

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{105}, \frac{1}{168}, \cdots$$

で、この無限和は、

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \frac{1}{168} + \cdots = \frac{1}{2}$$

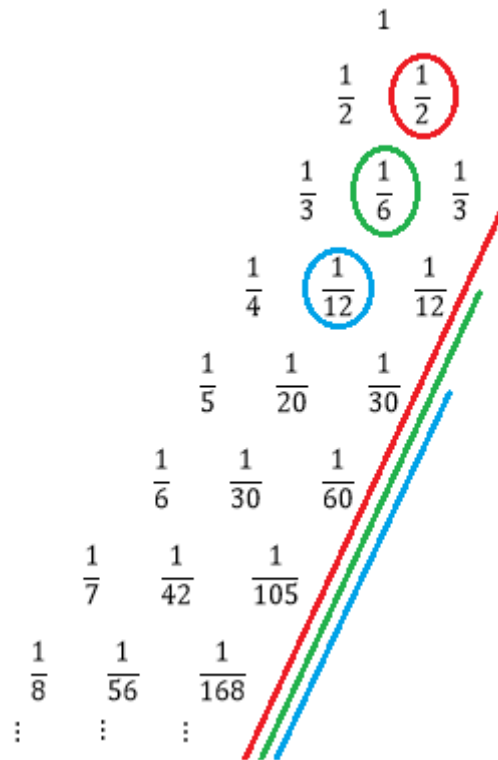
さらに、

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \frac{1}{168} + \cdots = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \frac{1}{168} + \cdots = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \frac{1}{168} + \cdots = \frac{1}{20}$$

となります。これらの無限和の計算の答えは、ライプニッツの調和三角形の中に用意されているのです。



チャレンジ問題 7. 以下の無限和の等式を証明してください.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \frac{1}{280} + \cdots = \frac{1}{3}$$