定規とコンパスの数学

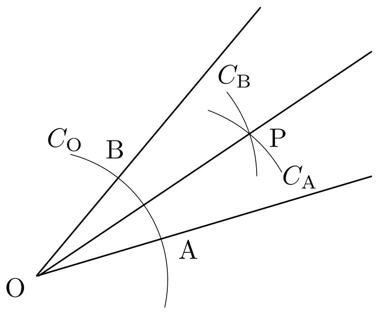
松田 修　著

2022 年 2 月 10 日

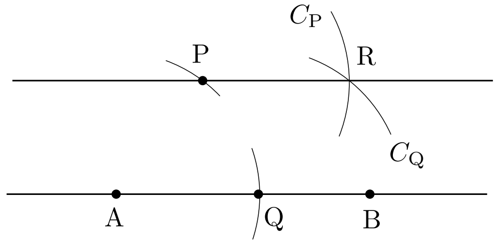
1　角の二等分線と平行線の作図の確認

このテキストでいう作図とは，定規とコンパスのみを使って図形を描くことをいう．以下において，最も基本となる作図である角の二等分線の作図と，平行線の作図を確認する．

まず，**角の二等分線**の作図を確認しよう．頂点 O から，コンパスを使って適当な半径の円弧 C_{O} を描き，円弧と角を作っている 2 つの線分との交点を A と B とする．そして，A と B を中心にした適当な同じ半径の円弧 C_{A} と C_{B} をそれぞれ描き，C_{A} と C_{B} の交点を P とする．三角形 OBP と OAP は三辺がそれぞれ等しいため合同であり，直線 OP は角 AOB の二等分線となる．



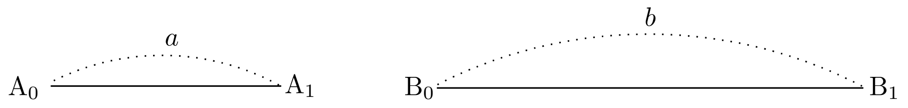
次に，直線 AB の**平行線の作図**を確認しよう．直線 AB 上にはない点 P をとり，直線 AB 上に点 Q をとる．AP を半径とする円弧をコンパスで描き，続けて Q を中心に同じ半径の円弧 C_{Q} を描く．次に，AQ を半径とする円弧をコンパスで描き，続けて P を中心に同じ半径の円弧 C_{P} を描く．C_{Q} と C_{P} の交点をその交点を R とすると，AP = QR で AQ = PR より，APRQ は平行四辺形であり，直線 PR は直線 AB の平行線となる．

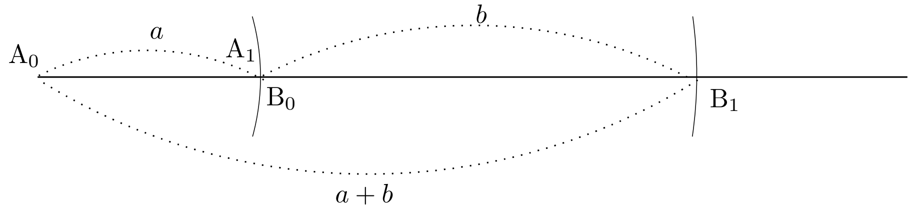


練習 1. 下の図の直線の垂線を作図してみよう．

2　足し算と引き算の作図

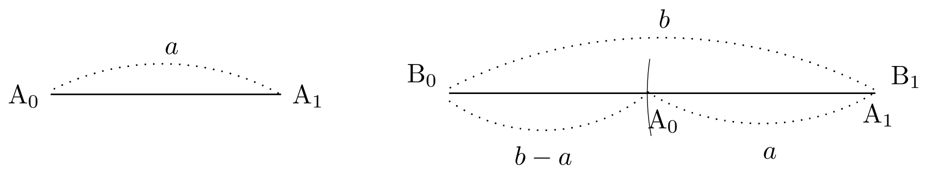
与えられた長さ a の線分 $\mathrm{A_0A_1}$ と長さ b の線分 $\mathrm{B_0B_1}$ から，長さ $a+b$ の線分を作図しよう．





定規で $a+b$ よりも長い直線を引き，その直線上にコンパスで長さ a の線分 $\mathrm{A_0A_1}$ をとり，次に端点 $\mathrm{A_1}$ からコンパスで長さ b の線分をとれば，$a+b$ の作図が完成する．

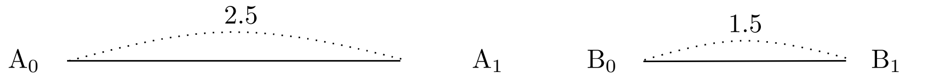
次に与えられた長さ a の線分 $\mathrm{A_0A_1}$ と長さ b の線分 $\mathrm{B_0B_1}$ から，長さ $b-a$ の線分を作図しよう．

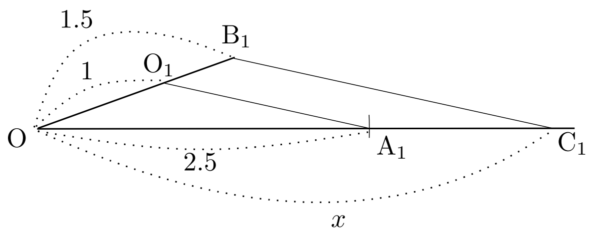


線分 $\mathrm{B_0B_1}$ の端点 $\mathrm{B_1}$ からコンパスで長さ a の線分 $\mathrm{A_0A_1}$ をとれば，$\mathrm{B_0A_0}$ が長さ $b-a$ の線分である．

3　掛け算の作図

与えられた長さ 2.5 の線分 A_0A_1 と長さ 1.5 の線分 B_0B_1 から，長さ $2.5 \times 1.5 = 3.75$ の線分を作図しよう．





点 A_0 と B_0 を重ねて O とする．長さ 2.5 の線分 OA_1 を水平にとり，それに対して，長さ 1.5 の線分 OA_1 を斜めに引き，その線上に長さ 1 の線分 OO_1 をとる．点 O_1 と A_1 を直線で結ぶ．その直線 O_1A_1 に平行な直線を B_1 通るように引き，OA_1 の延長線上との交点を C_1 とする．そして，得られた線分 OC_1 の長さを x とする．二つの三角形 OA_1O_1 と OC_1B_1 は相似であるため，

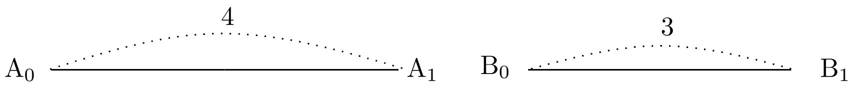
$$2.5 : 1 = x : 1.5$$

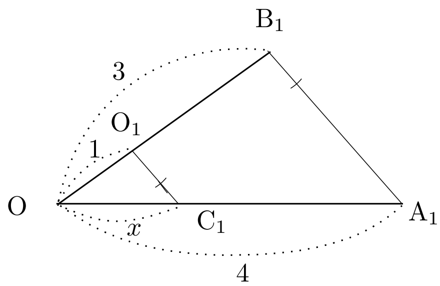
である．したがって，$x = 2.5 \times 1.5 = 3.75$ となることから，線分 OC_1 の長さが 3.75 である．

練習 2. 以下の長さ 1 と長さ a と長さ b の線分をもとに，長さ $a \times b$ の線分を作図してみよう．

4　割り算の作図

与えられた長さ 4 の線分 A_0A_1 と長さ 3 の線分 B_0B_1 から，長さ $4 \div 3 = \dfrac{4}{3}$ の線分を作図しよう．



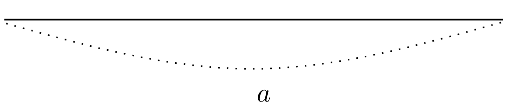


点 A_0 と B_0 を重ねて O とする．水平方向に長さ 4 の線分 OA_1 をとる．点 O から，直線 OA_1 に対し斜めの直線を引き，その上に長さ 3 の線分 OB_1 と，長さ 1 の線分 OO_1 をとる．そして，直線 A_1B_1 を引き，その直線 A_1B_1 に平行な直線を O_1 通るように引き，OB_1 との交点を C_1 とする．そして，得られた線分 OC_1 の長さを x とする．二つの三角形 OC_1O_1 と OA_1B_1 は相似であるため,

$$x : 1 = 4 : 3$$

である．したがって，$3x = 4$ より $x = \dfrac{4}{3}$ であり，線分 OC_1 の長さが $\dfrac{4}{3}$ である．

練習 3. 以下の長さ a の線分に対し，長さ $\dfrac{a}{3}$ の線分を作図してみよう．



5　作図と有理数体 $\mathbf{Q}$（大学の数学，わからなくてもよい.）

私たちは，1 という数から次々と 1 を加えていくことで，自然数 $1.2.3.\cdots$ を得ることができる．さらに，1 から次々と 1 を引いていくことで，$0, -1, -2, -3, \cdots$ も得られる．これらの数の集合は**整数環**と呼ばれ，$\mathbf{Z}$ と書かれれる．この記号 $\mathbf{Z}$ はドイツ語の Zahlen「数」に由来する．$\mathbf{Z}$ の中では掛け算もできる．整数環に含まれる数のことを**整数**と呼んでいる．

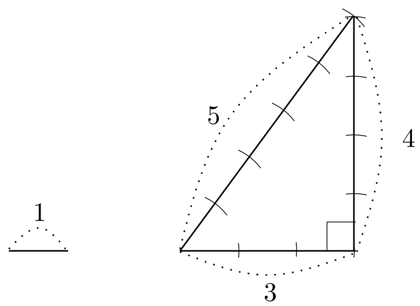
しかし，$\mathbf{Z}$ においては，割り算はできない．割り算で得られる数とは，$\mathbf{Z}$ のゼロではない整数 a と整数 b に対して，$ax = b$ となる x のことであり，x は一般に整数ではない．たとえば，$2x = 6$ となる x は整数 3 であるが，$2x = 1$ となる x は $\mathbf{Z}$ の中の数ではない．そこで，$ax = b$ となる x を $\dfrac{b}{a}$ と書く．これは，a に対する b の比であり，**分数**と呼ばれる．以上によって，$\mathbf{Z}$ に分数を追加した集合が出来上がり，この集合の中では四則演算（和・差・積・商）が可能となる．この集合を**有理数体**といい，記号で $\mathbf{Q}$ と書く．この記号 $\mathbf{Q}$ はイタリアの数学者ペアノが Quoziente「商」からつけたものである．そして，有理数体に含まれている数のことを**有理数**と呼んでいる．また，**体**とは四則演算ができる集合を意味する．

これまで，定規とコンパスを使って，足し算，引き算，掛け算，割り算ができることを説明してきたが，長さ 1 が与えられると，それを基準に定規とコンパスを使って，有理数体の数が作図できるということがわかったのである．

6　ピタゴラスの定理と平方根

紀元前 5 世紀ごろ，古代ギリシアには**ピタゴラス学派**という数学を研究する集団があった．彼らは整数や分数以外の数（有理数以外の数）が存在することを証明した．しかし，当時は，どんな数も比（分数）で表されるということが信じられていたため，このような数が存在することをピタゴラス学派は内密にしていた．それにも関わらず，あるとき一人の男がこのことを口外してしまった．その後，この男は地中海で溺れて死んでしまったと伝えられた．

底辺が 3 で，高さが 4 の直角三角形を描くと，斜辺が 5 となっている．この 3 つの数字はどのような関係で結びついているのだろうか？



練習 4. 3 つの数字 3，4，5 にはどんな法則がなりたつか？

練習 4 の解答は，

$$(3 \times 3) + (4 \times 4) = (5 \times 5)$$

という法則である．数学では 3×3 を 3^2 と書いて，3 **の** 2 **乗**と言う．つまり，底辺の長さが 3 で，高さが 4 の直角三角形は，斜辺の長さが 5 であり，

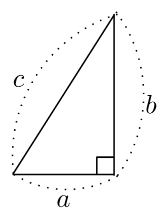
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

という関係で結びついている．これ以外にも，底辺の長さが 5 で，高さが 12，斜辺の長さが 13 の三角形も直角三角形である．そして，

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

が成り立っている．

実は，直角三角形ならば，底辺の長さの 2 乗プラス高さの 2 乗は，斜辺の長さの 2 乗となる．これを**ピタゴラスの定理**または**三平方の定理**という．



ピタゴラスの定理　直角三角形 ABC の底辺の長さを a，高さを b，斜辺の長さを c とすると，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ．

特に，$a = b = 1$ であるとき，$c^2 = 2$ となる．このような正の数 c はどんな 2 つの整数 x と y を用いても

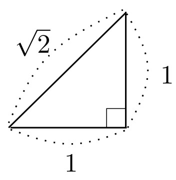
$$c = \frac{x}{y}$$

とすることはできないことを証明できる．これが，ピタゴラス学派が発見した有理数体の中に存在しない数だったのである．

現在，$c^2 = 2$ をみたす正の数 c を

$$c = \sqrt{2}$$

と表し，**平方根** 2，あるいは**ルート** 2 と呼ぶ．さらに一般に a を有理数とし，$x^2 = a$ をみたす正の数 x を $\sqrt{a}$ と表し，平方根 a，あるいはルート a と呼ぶ．



7　平方根 $\sqrt{a}$ の作図

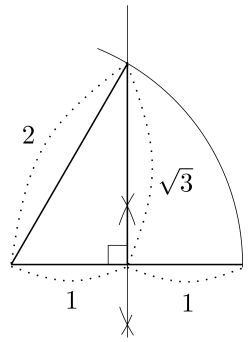
$\sqrt{2}$ の作図は，ピタゴラスの定理より，底辺の長さと高さが共に 1 の直角三角形を描くことで，斜辺の長さとして得られることがわかった．

$\sqrt{3}$ の作図はどうだろうか？

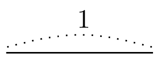
$\sqrt{3}$ を作図するためには，

$$(\sqrt{3})^2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$$

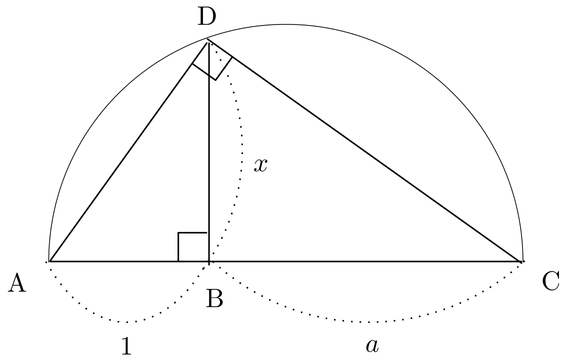
と考えればよい．つまり，底辺が 1 で斜辺の長さが 2 の直角三角形をつくれば，高さが $\sqrt{3}$ となるのである．



練習 5. 以下の線分の長さを 1 として，長さ $\sqrt{5}$ と $\sqrt{7}$ の線分を作図してみよう．



今，練習したように $\sqrt{a}$ の作図は，３辺の長さのどれかに $\sqrt{a}$ が含まれる直角三角形を考えなくてはならないので，少し面倒である．そこで，どんな $\sqrt{a}$ の作図でも使える方法を説明しよう．まず，長さ１の線分 AB とそれに長さ a の線分 BA を足して長さ $1+a$ の線分 ABC を作る．そして，直径 $1+a$ の半円を描く．

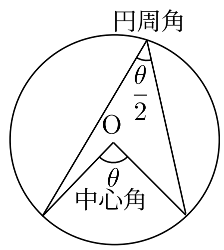


点 B を通る線分 AC の垂線を描き，円との交点の１つを D とする．線分 BD の長さを x とする．直角三角形 ACD と直角三角形 ADB は３つの角が等しいので相似であり，このことから，直角三角形 ABD と直角三角形 DBC も相似となる．したがって，

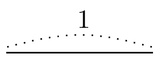
$$1 : x = x : a$$

より，$x^2 = a$ が得られ，$x = \sqrt{a}$ であることがわかる．

注意 角 ADC は円周角は中心角の半分であるという**円周角の定理**より直角である．



練習 6. 以下の線分の長さを１として，$\sqrt{\sqrt{2}}$ を作図してみよう．



8　定規とコンパスで描ける数の集合（大学の数学，わからなくてもよい．）

ピタゴラスの定理を説明するまでは，定規とコンパスで描ける数の集合は有理数体 $\mathbf{Q}$ であると説明した．しかし，$\sqrt{a}$ が描けることもわかったので，定規とコンパスで描ける数の集合は，$\mathbf{Q}$ に $\sqrt{a}$ を付け加えた集合となる．これを，$\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ で表し，$\mathbf{Q}$ に $\sqrt{a}$ を**添加した体**という．

$\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ が，なぜ「体」という四則演算ができる集合であるかは，有理数 x と y に対して，$x+y\sqrt{a}$ も $x-y\sqrt{a}$ も作図できるし，さらに有理数 z と w に対して，$(x+y\sqrt{a})(z+w\sqrt{a})$ も $\dfrac{x+y\sqrt{a}}{z+w\sqrt{a}}$ も作図できるからである．

以上によって，定規とコンパスで描ける数の集合は，すべての $\mathbf{Q}$ の数 q_j の平方根 $\sqrt{q_j}$ を添加して得られる体

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \cdots) \supset \mathbf{Q}$$

にまで拡大される．

これで終わりだろうか？ よく考えると，$\mathbf{Q}_1$ の数 $q_j^{[1]}$ に関して $\sqrt{q_j^{[1]}}$ も作図可能である．したがって，定規とコンパスで描ける数の集合は，$\mathbf{Q}_1$ のすべての $q_j^{[1]}$ の平方根 $\sqrt{q_j^{[1]}}$ を添加した体

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1(\sqrt{q_1^{[1]}}, \sqrt{q_2^{[1]}}, \cdots) \supset \mathbf{Q}_1$$

にまで拡大できる．

同様にして，体 $\mathbf{Q}_2$ は $\mathbf{Q}_2$ のすべての数 $q_j^{[2]}$ の平方根 $\sqrt{q_j^{[2]}}$ を添加した体

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2(\sqrt{q_1^{[2]}}, \sqrt{q_2^{[2]}}, \cdots) \supset \mathbf{Q}_2$$

にまで拡大できる．

この操作は，今考えている体のすべての数の平方根の作図が可能であることから，順次繰り返される．すなわち，

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}_1 \subset \mathbf{Q}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{Q}_k \subset \cdots$$

という平方根による拡大の無限列が得られる．ここで，$\mathbf{Q}_k$ とは，一つ前の体 $\mathbf{Q}_{k-1}$ のすべての数 $q_j^{[k-1]}$ の平方根 $\sqrt{q_j^{[k-1]}}$ を添加した体のことである．得られた結論を以下に定理としてまとめる．

定理（作図可能な数）定規とコンパスで描ける数の集合は，

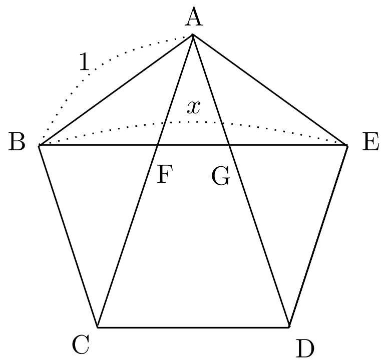
$$\mathbf{Q}_k \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

である．

以上の理論は，**ガロア理論**の一部である．ガロアとは 19 世紀のフランスの数学少年の名前で，この理論は彼が十代のときに考えたものである．しかし，ガロアは決闘によって 20 歳の若さで亡くなった．

9　正五角形の作図（高校の数学，チャレンジだ！）

正五角形は定規とコンパスで作図できる．この作図は，ピタゴラス学派の入試問題でもあった．以下に，この作図について説明する．作図のキーワードは，**黄金比** ϕ（ファイ）と呼ばれる数である．



辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE を考える．対角線 AC と AD，そして BE を結び，上の図のように得られた交点を B に近い方から F,G とする．このとき三角形 GEA は GA=GE の二等辺三角形である．したがって，角 E を共有する二等辺三角形 ABE と GEA は相似である．さらに，角 BAD= 角 CDE= 角 BGA より，三角形 BGA は BG=BA= 1 の二等辺三角形であることもわかる．

そこで，BE $= x$ とすると，GE $= x - 1$ である．二等辺三角形 ABE と GEA は相似であるので，

$$x : 1 = 1 : x - 1$$

である．これより，

$$x^2 - x = 1$$

を得る．これは，

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1$$

と変形できる．したがって

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

であり，

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

より，

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

この x が黄金比 ϕ なのである．以上により，次のことがわかった．

定理（黄金比） 一辺の長さが 1 である正五角形の対角線の長さは黄金比

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

であり，正五角形は作図可能である．

実は，次の定理が知られている．

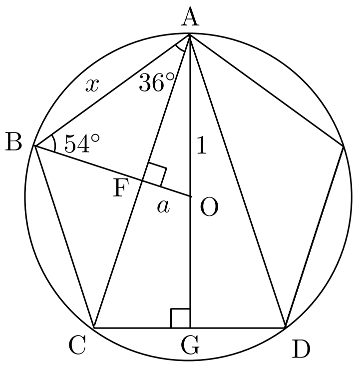
定理（作図可能な正 p 角形） p を素数とし，$n = 1, 2, \cdots$ とする．

$$p = 2^n + 1$$

をみたすとき，正 p 角形は作図可能である．

練習 7. 黄金比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を長さとする線分を作図するための手順を，言葉で説明してみよう．

次に，半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さ x を求めよう．



上の図から, 三角形 AFO と三角形 ACG は相似である．AC$=\dfrac{(1+\sqrt{5})x}{2}$ に注意して, OF$=a$ とすると,

$$1 : a = \frac{(1+\sqrt{5})x}{2} : \frac{x}{2}$$

これより,

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

である．また,

$$\mathrm{AF}^2 = 1 - a^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$\mathrm{BF}^2 = (1-a)^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

したがって,

$$x^2 = \mathrm{AF}^2 + \mathrm{BF}^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

定理（円に内接する正五角形） 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さは,

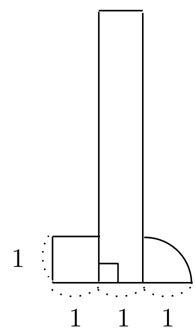
$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

練習 8. 長さ $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ の線分を作図するための手順を，言葉で説明してみよう．

10　角の三等分線の作図（意外な方法）

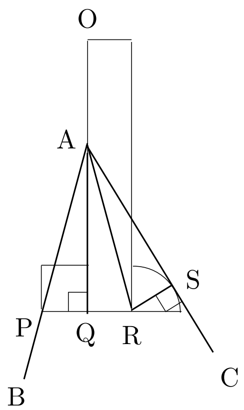
「与えられた角を定規とコンパスを使って描くことは可能か？」という問題は，紀元前から関心がもたれ，長い間未解決であった．現代においては，ガロア理論により，「与えられた角を定規とコンパスを使って描くことは，特別な角を除けば不可能である」ということが証明できている．

しかし，特別な定規を使えば，角の三等分線を引くことは可能となる．例えば，それは以下の直角定規と半円定規を組み合わせた定規である．これを**角の三等分定規**と呼ぼう．

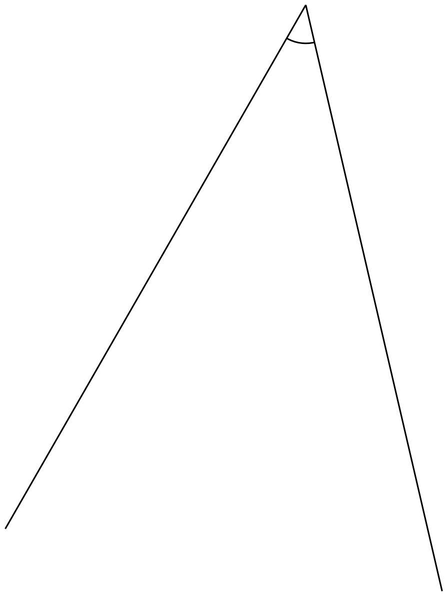


角の三等分定規を使った作図の方法を説明する．

角 BAC が与えられたとする．定規の頂点は図のように O,P,Q,R とする．角の頂点 A を直線 OQ 上に，直線 AB を P を通るように，そして直線 AC を右側の四分円に接するように合わせる．そして四分円との接点を S とする．このとき，３つの直角三角形 APQ，AQR，ARS は合同である．したがって，線分 AQ と線分 AR を引くと，これらが角 BAC の三等分線になる．



練習 9. 角の三等分定規を使って以下の角を三等分してみよう．



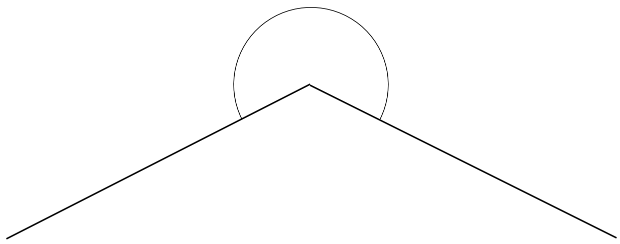
11　練習問題

特に断りがない限り，定規１本とコンパス１個のみを使って，以下の作図の問題を解いてみよう．ただし，基準（長さ１の線分）は自分で決めよ．

問題 1.　長さ a の線分を描き，長さ $\frac{a}{5}$ の線分を作図せよ．（レベル１）

問題 2.　面積が 3 となる正方形を作図せよ．（レベル２）

問題 3.　角の三等分定規も使って，以下の 180° より大きい方の角の三等分線を作図せよ．（レベル３）



問題 4.　面積が $\sqrt{5}$ となる正方形を作図せよ．（レベル４）

問題 5.　一辺の長さが $\frac{4}{\sqrt{3}}$ となる正方形を作図せよ．（レベル５）

問題 6.　$0 < a < 1 < b$ のとき，長さ a と b の２つの線分を使って，縦の長さが $\sqrt{ab}$ で面積が 1 となる長方形を作図せよ．（レベル６）

問題 7.　半径１の円に内接する面積 $\dfrac{8\sqrt{5}}{9}$ の長方形を作図せよ．（レベル７）

問題 8.　一辺の長さが１の正五角形を作図せよ．（レベル８）

問題 9.　一辺の長さが１の正八角形を作図せよ．（レベル９）

（ヒント：正方形の４つの頂点から直角二等辺三角形を切り取る．）

問題 10.　半径１の円 O に内接する正五角形を作図せよ．（レベル１０）

12　自由研究のためのテーマ

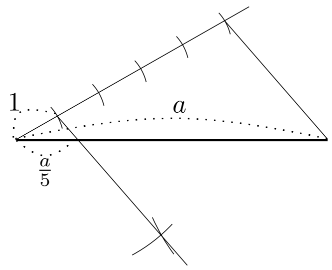
定規とコンパスの数学に興味がもてて，自由研究をやってみたいと思う人は，以下の研究テーマに取り組んでみてはどうだろう．とても難しいテーマだが，アイディアがひらめけば，科学コンテストで発表できるだろう．

研究テーマ１． 角の五等分定規の開発

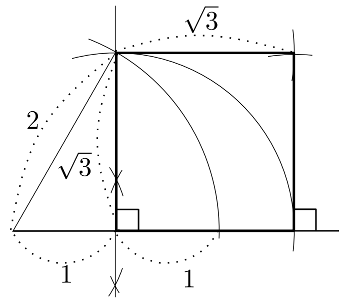
研究テーマ２． 正七角形が作図できる定規の開発

練習問題の解答例

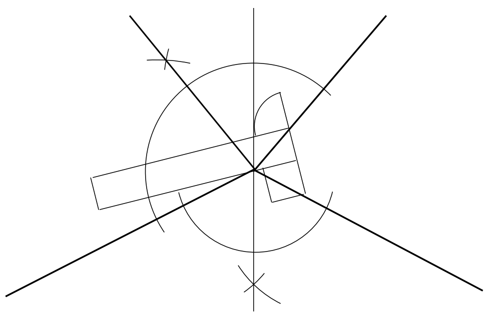
問題１．



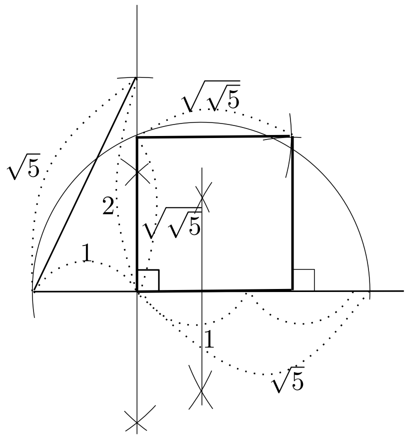
問題２．



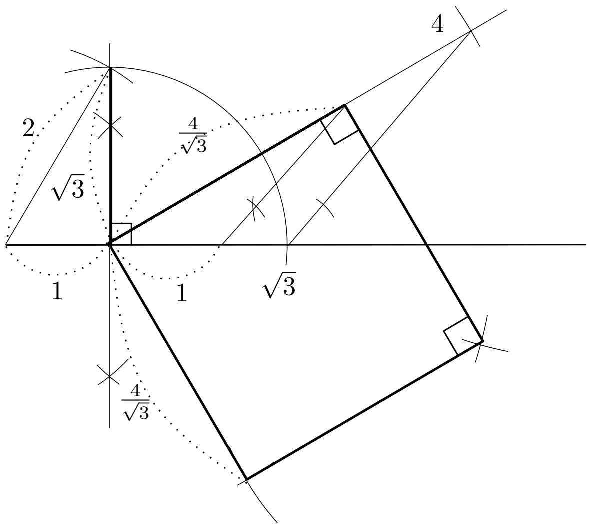
問題３．



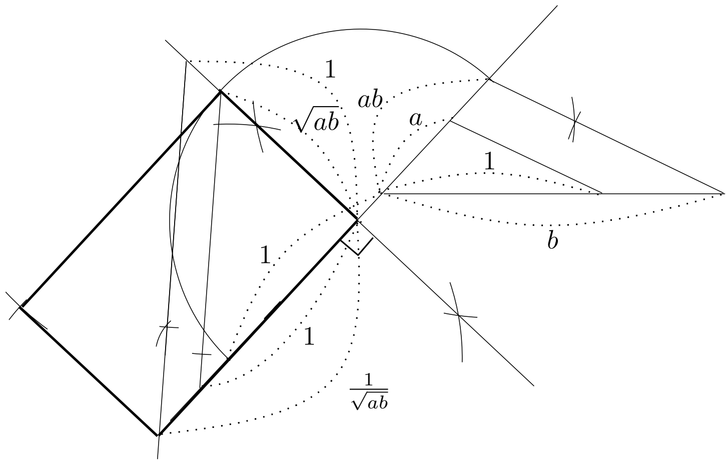
問題４．



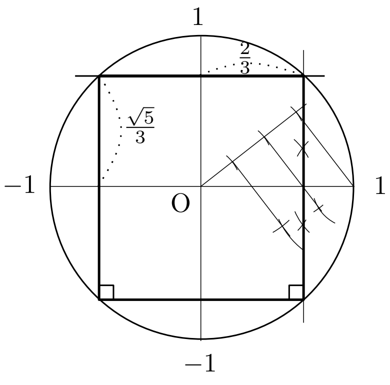
問題５.


4
2
$\frac{4}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{3}$
1
1
$\sqrt{3}$
$\frac{4}{\sqrt{3}}$

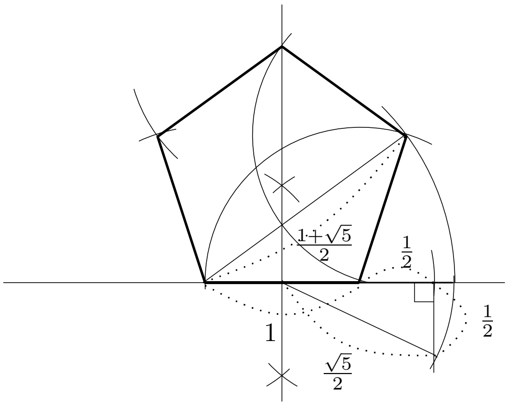
問題６.


1
ab
$\sqrt{ab}$
a
1
b
1
1
$\frac{1}{\sqrt{ab}}$

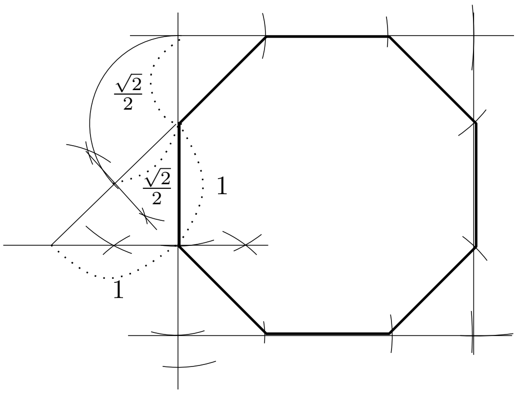
問題７.


1
$\frac{2}{3}$
$\frac{\sqrt{5}}{3}$
-1
1
O
-1

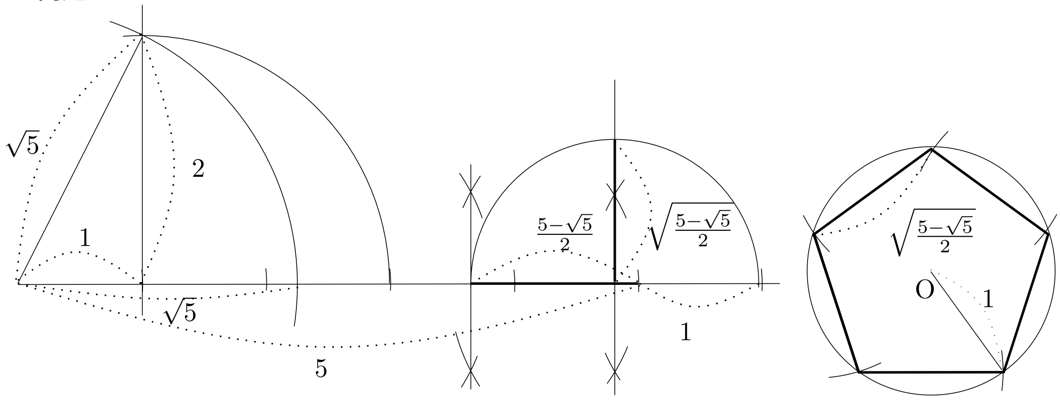
問題８．

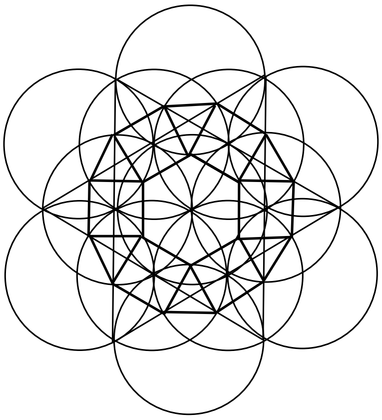

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{\sqrt{5}}{2}$

問題９．


$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
1

問題１０．


$\sqrt{5}$
2
1
$\sqrt{5}$
5
$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$
1
$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$
O
1



松田研究室ホームページ：http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/