津山高専生のための

知って欲しい定理と証明

（高専１年生レベル）

松田 修・山中 聡

はじめに

定理や命題とは，それが数学的に正しいかどうかが判断できる文章のことである．したがって，正しい定理や命題は，証明可能な文章のことである．

本テキストでは，高専 1 年生レベルの定理とその証明を紹介し，その後，類題を使って証明の練習を行う．最後の節では，数学の研究するためのトレーニングを行う．具体的には，与えられたテーマから，自分なりの法則を発見し，そこから数学的な文章を使って定理をつくり，それを証明する．

目 次

1 高専 1 年生レベル 1
§ 1 素数に関する定理 1
§ 2 公約数と公倍数に関する定理 3
§ 3 無理数に関する定理 5
§ 4 余りに関する定理 7
§ 5 順列に関する定理 9
§ 6 組み合わせに関する定理 11
§ 7 二項定理に関する定理 13
§ 8 等差数列に関する定理 15
§ 9 等比数列に関する定理 17
§ 10 和 $\sum$ に関する定理 19
§ 11 数学的帰納法に関する定理 22
§ 12 平面幾何の定理（チェバの定理） 25
§ 13 平面幾何の定理（メネラウスの定理） 27
§ 14 平面幾何の定理（トレミーの定理） 29
§ 15 数学を研究するためのトレーニング 31
§ 16 コラム 34
§ 17 練習問題の解答（証明の概略） 35

1　高専1年生レベル

§1　素数に関する定理

定理 1.　素数は無限に多く存在する．

(証明)　任意の素数を p とする．いま，p 以下のすべての素数

$$2, 3, 5, 7, \cdots, p$$

の積に 1 を加えた数

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p + 1$$

を考える．明らかに $Q > p$ である．

(i) Q が素数ならば，p より大きい素数が存在することになる．

(ii) Q が素数でないならば，Q はある素数 q を因数にもつが，Q の作り方から，q は 2 から p までの間の素数ではない．したがって，$q > p$ である．

いずれにせよ，p より大きな素数が存在する．したがって，素数の個数は有限個ではない．Q.E.D.

定理 2.　$4n-1$ の形の素数は無限に多く存在する．

(証明)　任意の素数を p とする．

$$2, 3, 5, 7, \cdots, p$$

に対して

$$Q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p - 1$$

を考えると，これは，$4n-1$ の形の数で，$Q > p$ である．

(i) もし，Q が素数ならば，p より大きい $4n-1$ の形の素数が存在することになる．

(ii) Q が素数でない，すなわち合成数であるならば，合成数の素因数は奇数である．つまり，それは

$$4n-1 \quad \text{または} \quad 4n+1$$

の形である．しかし，

$$(4n_1+1)(4n_2+1) = 16n_1n_2 + 4(n_1+n_2) + 1 = 4N + 1$$

の形となるので，Q は必ず $4n-1$ の形の素数を因数にもつ．そこで，因数である $4n-1$ の形の素数を q とする．Q の作り方から，q は 2 から p までの間の素数ではない．したがって，$q > p$ である．

いずれにせよ，p より大きい $4n-1$ の形の素数が存在する．したがって，$4n-1$ の形の素数の個数は有限個ではない．Q.E.D.

練習問題 1.　次の定理を証明せよ．

定理 3.　$6n-1$ の形の素数は無限に多く存在する．

§ 2　公約数と公倍数に関する定理

以下においては，**素因数分解の一意性**は，証明なしに認めることにする．

整数 a, b の**最大公約数**を $\gcd(a, b)$，**最小公倍数**を $\mathrm{lcm}(a, b)$ とする．特に，$\gcd(a, b) = 1$ であるとき，a, b は**互いに素**であるという．

定理 4.　整数 a, b について，$g = \gcd(a, b)$，$l = \mathrm{lcm}(a, b)$ と置くと，以下が成り立つ．
(1) a, b の任意の公約数は g の約数である．
(2) a, b の任意の公倍数は l の倍数である．
(3) $ab = gl$ である．

(**証明**)　(1) と (2) は最大公約数と最小公倍数の定義から明らかである．(3) を示す．$a = ga_1, b = gb_1$ と置くと $\gcd(a_1, b_1) = 1$ である．このことから $l = ga_1b_1$ である．したがって，$ab = g^2a_1b_1 = g(ga_1b_1) = gl$ である．Q.E.D.

定理 5.　整数 N, a, b, c について，以下が成り立つ．
(1)　a, b はどちらも N の約数で，$\gcd(a, b) = 1$ であるとすると，ab は N の約数である．
(2)　b が ac の約数で，$\gcd(a, b) = 1$ であるとすると，b は c の約数である．
(3)　素数 p が ac の約数ならば，p は a, c の少なくとも一方の約数である．

(**証明**)　(1) N は a, b の公倍数であるので，定理 4 (2) より N は $l = \mathrm{lcm}(a, b)$ の倍数である．さらに，$\gcd(a, b) = 1$ であるより $l = ab$ である．よって，ab は N の約数である．

(2) b が ac の約数であるので，$ac = bb'$ と書ける．$\gcd(a, b) = 1$ であるので，素因数分解の一意性より，b の因数はすべて c を因数となる．したがって，b は c の約数となる．

(3) p が a の約数であれば主張は成り立つ．そうでないければ，$\gcd(a, p) = 1$ であるので，上に証明した (2) より p は c の約数となる．Q.E.D.

定理 6.　連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数である．

(証明)　連続する 3 つの整数の積を

$$f(n) = (n-1)n(n+1)$$

とする．定理 5 (1) より $f(n)$ が $6 = 2 \times 3$ の倍数であるためには，$f(n)$ が 2 の倍数でもあり，3 の倍数でもあることを示せばよい．連続する 3 つには必ず偶数が含まれるので，明らかに $f(n)$ は 2 の倍数である．また，連続する 3 つには必ず 3 の倍数も含まれるので，明らかに $f(n)$ は 3 の倍数である．したがって，$f(n)$ は 6 の倍数である．

練習問題 2.　次の定理を証明せよ．

定理 7.　p が 5 より大きい素数であれば，$p^4 - 1$ は 240 の倍数である．

§ 3　無理数に関する定理

以下においては，背理法という証明法を用いる．

背理法とは，命題『x が A の元であるならば，x は B の元である』を示すときに，

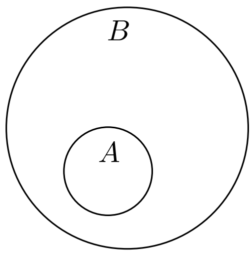
x は A の元で，かつ x は B でないと仮定して，
何らかの矛盾があることを導く

証明法のことである．

では何故，背理法によって，上のような命題が証明されたことになるのか説明しよう．
命題は集合 A と B の関係が，

$$A \subset B$$

であることを主張している．



これは，A の元はすべて B の元であることを意味する．このことから，命題をさらに言い換えると，

「x が A の元で，かつ x は B でないという x が存在することはない」

となる．したがって，背理法の仮定「x が A の元でかつ x は B でない」から，なんらかの矛盾を示すことができれば，背理法の仮定は間違っていることになり，命題が証明されるのである．

定理 8.　x が $x^2 = 2$ を満たすならば，x は整数でも分数でもない．

(証明)　背理法で示す．自然数の $1, 2, 3, 4, \cdots$ の平方を考えると，$1, 4, 9, 16, \cdots$ となり，この中に 2 は無いので，x は整数ではない．次に，x が分数であると仮定すると，それは既約分数として

$$x = \frac{m}{n} \quad (n \neq 1)$$

と表すことができる．このとき，

$$x^2 = \frac{m^2}{n^2} \quad (n^2 \neq 1)$$

であり，素因数分解の一意性より，これも既約分数である．しかし既約分数 $\dfrac{m^2}{n^2}$ が 2 となることない．したがって，x は分数ではない．Q.E.D.

練習問題 3.　次の定理を証明せよ．

定理 9.　x が $x^2 = 3$ を満たすならば，x は整数でも分数でもない．

練習問題 4.　x が $10^x = 2$ を満たすならば，x は整数でも分数でもないことを証明せよ．

§ 4　余りに関する定理

2 つの整数 x, y に対して，$x-y$ が正の整数 a で割り切れるとき，

$$x \equiv y \mod a$$

と書き，これを**合同式**と呼ぶ．すなわち，合同式は x を a で割った余りと，y を a で割った余りが等しいことを意味する． mod はラテン語 modulo の略語で「法として」という意味である．

定理 10.　合同式に関して次の (1) から (5) が成り立つ．
(1) $x \equiv x \mod a$
(2) $x \equiv y \mod a$ ならば $y \equiv x \mod a$
(3) $x \equiv y \mod a$ かつ $y \equiv z \mod a$ ならば $x \equiv z \mod a$
(4) $x \equiv x' \mod a$ かつ $y \equiv y' \mod a$ ならば $x + y \equiv x' + y' \mod a$
(5) $x \equiv x' \mod a$ かつ $y \equiv y' \mod a$ ならば $xy \equiv x'y' \mod a$

(**証明**)　(1), (2), (3) は，合同式の定義より明らかである．

(4) を示す．$x'-x = ma$，$y'-y = na$ と置くと，$(x'-x)+(y'-y) = (m+n)a$ であるので，$x+y \equiv x'+y' \mod a$ である．

(5) を示す．$x'y'-x'y' = (x+ma)(y+na)-xy = (my+nx)a+mna^2 = (my+nx+mna)a$ であるので，$xy \equiv x'y' \mod a$ である．Q.E.D.

練習問題 5.　次の定理を証明せよ．

定理 11.　正の整数 x, y, z が

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすならば，x, y, z の少なくとも 1 つは 5 の倍数である．

練習問題 6.　次の定理を証明せよ．

定理 12.　正の整数 x，y，z が

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすならば，xyz は 4 の倍数である．

定理 13. **（フェルマーの小定理）**　p を素数，a を p と互いに素な正の整数とする．このとき，

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

が成り立つ．

(証明)　a と p が互いに素なので，a，$2a$，$3a$，$\cdots$，$(p-1)a$ を p で割った余りは全て異なる．なぜならば，$ja \equiv ka \mod p$ $(1 \leq k < j < p)$ を仮定すると，$(j-k)a \equiv 0 \mod p$ が得られるが，$j-k$ も a もどちらも p と互いに素であることから，これは起こり得ないからである．

今，a，$2a$，$3a$，$\cdots$，$(p-1)a$ を p で割った余りは全て異なることが分かったので，

$$a \cdot 2a \cdots (p-1)a \equiv (p-1)!$$

が成り立つ．この両辺を $(p-1)!$ で割って $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ が得られる．Q.E.D.

練習問題 7.　次の定理を証明せよ．

定理 14.　p を素数，a を任意の正の整数とすると，

$$a^p \equiv a \mod p$$

が成り立つ．

練習問題 8.　次の定理を証明せよ．

定理 15.　p を 2 でも 5 でもない素数とする．このとき，$1/p$ は循環小数に展開される．

§ 5　順列に関する定理

自然数 n に対して，次の n 個の積

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

を，$n!$ と表し，n の**階乗**と呼ぶ．特に $0! = 1$ と定める．さらに，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ を

$${}_n\mathrm{P}_r := \frac{n!}{(n-r)!}$$

と定義し，n **ピー** r と呼ぶ．P は Permutation（パーミュテーション）の略で，日本語では**順列**と呼ばれる．

定理 16.

$${}_n\mathrm{P}_r = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

(**証明**)　Permutation の定義より，

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!} \\ &= n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \end{aligned}$$

である．Q.E.D.

${}_n\mathrm{P}_r$ は並べ方の数を求めるときに使われる．例えば，1 から n までの異なる番号が書かれてある n 枚のカードから，r 桁の数を作るとき，その場合の数が ${}_n\mathrm{P}_r$ である．

練習問題 9.　次の定理を証明せよ．

定理 17.

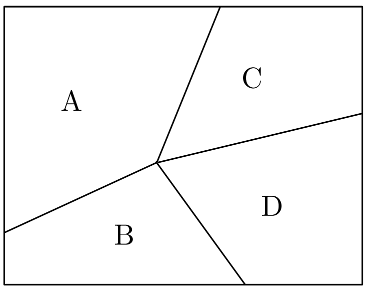
$${}_n\mathrm{P}_r = {}_{n-1}\mathrm{P}_r + r \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$$

練習問題 10.　以下の (1), (2) をそれぞれ証明せよ．

(1) 6 個の数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ のうち相異なる 4 個を用いて，首位の数が 0 でない 4 桁の整数をつくるとき，できる数の総数は 300 個であり，また，そのうち偶数であるもののは 156 個であることを証明せよ．

(2) n を 2 上の自然数として，$n+1$ 個の数字 $0, 1, 2, \cdots, n$ のうち相異なる r 個を用いて，首位の数が 0 でない r 桁の整数をつくるとき，できる数の総数は $n \cdot {}_n\mathrm{P}_{r-1}$ 個であり，また，そのうち偶数であるもののは，r' を $r/2$ の整数部として，${}_n\mathrm{P}_{r-1} + r' \cdot (n-1) \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r'}$ 個となることを証明せよ．

練習問題 11.　異なる 4 色がある．このうち，何色かの色を用いて，下の図形の四つの四角形を塗り分けるとき，塗り分け方は ${}_4\mathrm{P}_2 + 2 \cdot {}_4\mathrm{P}_3 + {}_4\mathrm{P}_4 = 84$ 通りであることを証明せよ．ただし，互いに辺を共有する 2 つの四角形には異なる色を塗ることとする．



§ 6　組み合わせに関する定理

$n \geqq r$ である自然数 n と r に対して，記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ を

$${}_n\mathrm{C}_r := \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

と定義し，n **シー** r と呼ぶ．C は Combination（コンビネーション）の略で，日本語では**組み合わせ**と呼ばれる．

定理 18.

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

(証明)　Combination の定義より

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{\{n-(n-r)\}!(n-r)!} = \frac{{}_n\mathrm{P}_{n-r}}{(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

である．Q.E.D.

${}_n\mathrm{C}_r$ は，組み合わせの数を求めるときに使われる．例えば，1 から n までの異なる番号が書かれてある n 枚のカードから，r 枚のカードを選ぶ組み合わせの数が ${}_n\mathrm{C}_r$ である．

練習問題 12.　次の定理を証明せよ．

定理 19.

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

練習問題 13.　次の定理を証明せよ．

定理 20.　$(a+b)^n$ を展開したとき，項 $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である．

練習問題 14.　第0段目に $(x+1)^0$ の値である1を書き，第1段目に $(x+1)^1$ の x 係数と定数項を並べて，1　1を書き，第2段目に $(x+1)^2$ の x^2, x の係数と定数項を並べて，1　2　1を書く，というように，第 n 段目に $(x+1)^n$ の x^n, $x^{n-1}, \cdots x$ の係数と定数項を並べて書く．そして $\binom{n}{r}$ を上から n 段目，左から r 番目（$r \geqq 0$）の数を表すものとする．以下の図はそれを表したもので，**パスカル三角形**と呼ばれる．

$$
\begin{array}{llllllll}
0\text{段目：} & (x+1)^0 & \to & 1 & & & & \\
1\text{段目：} & (x+1)^1 & \to & 1 & 1 & & & \\
2\text{段目：} & (x+1)^2 & \to & 1 & 2 & 1 & & \\
3\text{段目：} & (x+1)^3 & \to & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
4\text{段目：} & (x+1)^4 & \to & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

（パスカル三角形）

$n \geqq r \geqq 0$ であるとき，

$$\binom{n}{r} + 2\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2} = \binom{n+2}{r+2}$$

が成り立つことを証明せよ．

§ 7　二項定理に関する定理

定理 20 より，$(a+b)^n$ を展開したときの項 $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ であった．これより，

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^n + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

が成り立つ. 上の等式を**二項定理**という.

定理 21.

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n $$

(証明)　二項定理の等式において, $a = b = 1$ とおけば,

$$(\text{左辺}) = (1+1)^n = 2^n$$
$$(\text{右辺}) = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$$

となり, 与えられた等式を得る．Q.E.D.

定理 22.　次の等式が成り立つ.

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + \frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3} + \cdots + \frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} $$

(証明)

$$ r \cdot {}_n\mathrm{C}_r = r \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} $$

が成り立つ．これより

$$ \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}{r} = \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{n},\ \text{すなわち}\ \frac{{}_n\mathrm{C}_{r-1}}{r} = \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_r}{n+1} $$

を得る．したがって，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= {}_n\mathrm{C}_0 + \frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3} + \cdots + \frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1} \\
&= \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_1}{n+1} + \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{n+1} + \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_3}{n+1} + \cdots + \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\left({}_{n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{n+1}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left\{\left({}_{n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\right) - {}_{n+1}\mathrm{C}_0\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right) \\
&= (\text{右辺}) \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

練習問題 15.　次の等式を証明せよ．

$$
{}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 0
$$

練習問題 16.　次の定理を証明せよ．

定理 23.

$$
{}_n\mathrm{C}_1 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + 3\cdot{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n\cdot{}_n\mathrm{C}_n = n\cdot 2^{n-1}
$$

§ 8　等差数列に関する定理

a から始まり, 順に一定の数 d を加えて得られる数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots$$

を**初項** a の**等差数列**といい, 順に加えた一定の数 d を**公差**という. 初項が a, 公差が d の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

で与えられる.

定理 24.　初項 a, 公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は以下で与えられる.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

(証明)　まず

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + +a_{n-1} + a_n$$

であるが, これと和の順序を逆に書いたもの

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

を足し合わせると,

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S_n = & a_1 & + & a_2 & + \cdots + & a_{n-1} & + & a_n \\ +) & S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + \cdots + & a_2 & + & a_1 \\ \hline & 2S_n = & (a_1+a_n) & + & (a_2+a_{n-1}) & + \cdots + & (a_{n-1}+a_2) & + & (a_n+a_1) \end{array}$$

となる. 一方

$$\begin{aligned} a_{r+1} + a_{n-r} &= a + rd + \{a + (n-r-1)d\} \\ &= 2a + (n-1)d \end{aligned}$$

であるので,

$$2S_n = n\{2a+(n-1)d\}$$

を得る. この両辺を 2 で割れば, 与えられた等式を得る. Q.E.D.

練習問題 17.　パスカル三角形において，次の等式を証明せよ．

$$(1)\qquad \binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\cdots+\binom{n}{0}=\binom{n+1}{1}=n+1$$

$$(2)\qquad \binom{1}{1}+\cdots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2},\quad (n \geqq 1)$$

$$(3)\qquad \binom{2}{2}+\cdots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3},\quad (n \geqq 2)$$

(3) のヒント：$\dfrac{(k-1)k}{2}=\dfrac{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k}{6}$ を使う．

練習問題 18.　パスカル三角形において，次の等式を証明せよ．

$$\binom{n}{1}^2=\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

（パスカル三角形）

§ 9　等比数列に関する定理

a から始まり, 一定の数 r を次々にかけて得られる数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots$$

を初項 a の**等比数列**といい, 次々にかけられる一定の数 r を**公比**という.

定理 25.　初項 a, 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は以下で与えられる.

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ na & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(証明)　まず

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

であるから, $r = 1$ のとき

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ 個}} = na$$

となる.

$r \neq 1$ のとき, S_n から $rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ を引くと

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} & S_n = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-1} & & \\ -) & rS_n = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\ \hline & (1-r)S_n = & a & & & & & & & & & - & ar^n \end{array}$$

となり, したがって $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ が成り立つ. この両辺を $1-r$ で割れば, 与えられた等式を得る. Q.E.D.

練習問題 19.　次の定理を証明せよ.

定理 26.　整式 $x^n - 1$ は $x - 1$ を因数にもつ.

練習問題 20. 次の数列の第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$ であることを証明せよ．

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots$$

練習問題 21. 次の数列の第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n = \dfrac{2 \cdot (10^{n+1} - 9n - 10)}{27}$ であることを証明せよ．

$$6,\ 66,\ 666,\ 6666,\ \cdots$$

練習問題 22. $x \neq 1$ とする．このとき，

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{1 - x}$$

であることを証明せよ．

§ 10　和 $\sum$ に関する定理

数列の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を，記号 $\sum$(“シグマ” とよぶ) を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と表す．この記号は，k を 1 から n まで変えて得られる数 a_k の和をとることを表す．k の代わりに i や j が使われることもある．以下に例を示す．

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10$$

$$\sum_{k=1}^{9} 2^{k-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8$$

$$\sum_{j=1}^{8} (2j-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 15$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

定理 27.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_n \pm b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_n \pm \sum_{k=1}^{n} b_n$　(複合同順)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_n = c\sum_{k=1}^{n} a_n$　(c は定数)

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$　(c は定数)

(証明)　(1) のみ示す．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_n \pm b_n) &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_n \pm \sum_{k=1}^{n} b_n \qquad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

練習問題 23.　定理 27 の (2)，(3) を証明せよ．

定理 28.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(証明)　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ は初項 1, 公差 1 の等差数列の初項から第 n 項までの和であるから，定理 24 より，

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\{2+(n-1)\}}{2} = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{Q.E.D.}$$

(2) まず恒等式 $(k+1)^3-(k-1)^3 = 6k^2+2$ より

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{(k+1)^3-(k-1)^3\right\} = \sum_{k=1}^{n} \left(6k^2+2\right)$$

が成り立つが，上式の左辺と右辺をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 \\
&= \left\{2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3\right\} \\
&\qquad -\left\{0^3+1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\right\} \\
&= n^3+(n+1)^3-1 \\
&= n^3+(n^3+3n^2+3n+1)-1 \\
&= 2n^3+3n^2+3n \\
(\text{右辺}) &= \sum_{k=1}^{n} 6k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2 \\
&= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2n
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$2n^3 + 3n^2 + 3n = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2n$$

となり，これを整理すると

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を得る．　Q.E.D.

練習問題 24.　次の等式を証明せよ.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

練習問題 25.　次の等式を証明せよ.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

練習問題 26.　恒等式 $(k+1)^4 - (k-1)^4 = 8k^3 + 8k$ を用いて, 次の定理を証明せよ.

定理 29.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

§ 11　数学的帰納法に関する定理

数学の証明法には，背理法以外にもう一つ重要な証明法があり，それは数学的帰納法と呼ばれるものである．

数学的帰納法とは，自然数 n に関する命題 $\mathrm{P}(n)$ が与えられたとき，$\mathrm{P}(n)$ がすべての n について正しいことを，以下の 2 つのステップから証明する方法である．
(i)　$\mathrm{P}(1)$ が正しいことを示す．
(ii)　$\mathrm{P}(k)$ が正しいことを仮定して，$\mathrm{P}(k+1)$ が正しいことを示す．
そして，証明の終わりに,『(i)，(ii) よりすべての自然数 n について $\mathrm{P}(n)$ は正しい.』と書く．

数学的帰納法によって，何故，すべての自然数 n について，命題 $\mathrm{P}(n)$ が正しいかについて説明しよう．

(i) と (ii) が示されたことによって,『命題 $\mathrm{P}(1)$ が正しいことから，(ii) より $\mathrm{P}(2)$ が正しい』ことが示されたことになる．そして，今 $\mathrm{P}(2)$ が正しいとなったので，再び，(ii) より $\mathrm{P}(3)$ も正しい．同様にして，$\mathrm{P}(3)$ が正しいとなったので，(ii) より $\mathrm{P}(4)$ も正しく，$\mathrm{P}(4)$ が正しいとなったので，(ii) より $\mathrm{P}(5)$ も正しく，$\cdots$ このことは無限に続く．つまり，(i) と (ii) が示されたことは，すべての n について $\mathrm{P}(n)$ が正しいことを意味する．このような理由から，数学的帰納法の証明法は，(i) と (ii) を示せばよいということになっている．

そして，証明の終わりに書く『(i)，(ii) よりすべての自然数 n について $\mathrm{P}(n)$ は正しい.』という文章は，上で述べたことを簡潔にした表現として使用する．数学的帰納法に十分慣れて，最後の文章を省いたりする人もいるが，数学的帰納法の意味を忘れないようにするためにも，初心者は必ず書くようにしよう．

定理 30.　任意の自然数 n について，n^3+2n は 3 の倍数である．

(**証明**)　P(n) を「n^3+2n は 3 の倍数である」とし，n に関する数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，

$$n^3+2n = 1^3+2=3$$

となり，これは 3 の倍数である．したがって，$P(1)$ は正しい．

(ii) P(k) は正しい，すなわち，k^3+2k が 3 の倍数であることは正しいと仮定する．これは，

$$k^3+2k=3m \quad (m \text{ は自然数})$$

ということである．この仮定から P($k+1$) が正しいことを示す．$(k+1)^3+2(k+1)$ を式変形すると，

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)+(2k+2)\\ &= (k^3+2k)+(3k^2+3k+3)\\ &= 3m+3(k^2+k+1)\\ &= 3(m+k^2+k+1)\end{aligned}$$

となる．これは $(k+1)^3+2(k+1)$ が 3 の倍数であることを意味する．したがって，P($k+1$) が正しいことが示された．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n について P(n) は正しい．Q.E.D.

練習問題 27.　任意の自然数 n について，$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数であることを証明せよ．

練習問題 28.　任意の自然数 n について，5^n-2^n は 3 の倍数であることを証明せよ．

定理 31.　任意の自然数 n について，$2^n \geqq 2n$ が成り立つ．

(証明)　$\mathrm{P}(n)$ を「$2^n \geqq 2n$」とし，n に関する数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，$P(1)$ の左辺と右辺は，それぞれ

$$\text{左辺} = 2^1 = 2, \quad \text{右辺} = 2 \cdot 1 = 2$$

であるので，よって $\mathrm{P}(1)$ は正しい．

(ii) $\mathrm{P}(k)$ は正しい，すなわち，$2^k \geqq 2k$ は正しいと仮定し，$\mathrm{P}(k+1)$ が正しいこと，すなわち $2^{k+1} \geqq 2(k+1)$ が正しいことを示す．$\mathrm{P}(k+1)$ の左辺は，

$$\text{左辺} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

となるが，帰納法の仮定 $2^k \geqq 2k$ を用いると，

$$\text{左辺} \geqq 2 \cdot 2k = 2k + 2k \geqq 2k + 2 = 2(k+1) = \text{右辺}$$

となる．したがって，$\mathrm{P}(k+1)$ が正しいことが示された．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n について $\mathrm{P}(n)$ は正しい．Q.E.D.

練習問題 29.　$n \geqq 5$ をみたす自然数 n について，$2^n > n^2$ が成り立つことを証明せよ．

練習問題 30.　以下の定理を証明せよ．

定理 32.　任意の自然数 n について，以下の不等式が成り立つ．

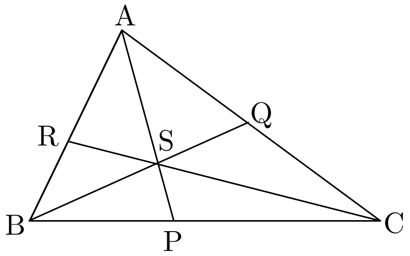
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geqq \frac{2n}{n+1}$$

§ 12　平面幾何の定理（チェバの定理）

定理 33.　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点 S で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

が成り立つ．



(証明)　△ABS と △CAS の面積をそれぞれ，S_1，S_2 として，△ABS と △CAS の面積比を考えると，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{S_1}{S_2}$$

である．△BCS の面積を S_3 として，△ABS と △BCS の面積比を考えると，

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{S_3}{S_1}$$

であり，△CAS と △BCS の面積比より，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{S_2}{S_3}$$

である．したがって，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_1} \cdot \frac{S_2}{S_3} = 1$$

となる．Q.E.D.

練習問題 31. 次の定理（チェバの定理の逆）を証明せよ．

> **定理 34.** $\triangle$ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，
>
> $$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$
>
> が成り立つとき，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

練習問題 32. 次の定理を証明せよ．

> **定理 35.** $\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とするとき，3 本の中線 AL，BM，CN は 1 点で交わり，この点は各中線を 2 : 1 に内分することを証明せよ．

練習問題 33. 次の定理を証明せよ．

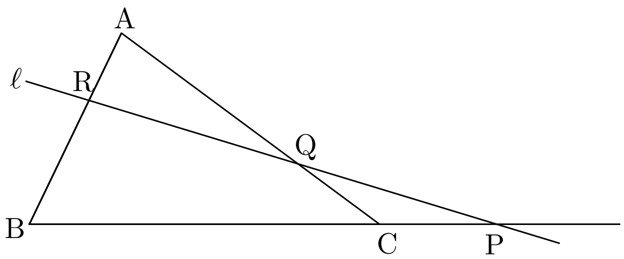
> **定理 36.** $\triangle$ABC の各頂点から対辺に下ろした 3 つの垂線は 1 点で交わる．

§ 13　平面幾何の定理（メネラウスの定理）

定理 37.　△ABC の 3 頂点 A, B, C のいずれも通らない直線 ℓ が辺 BC，CA，AB またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立つ．



(証明)　C を通り，AB と平行な直線と ℓ との交点を S とする．△PBR と △PCS は相似であるので，

$$\mathrm{BP}:\mathrm{CP}=\mathrm{RB}:\mathrm{SC}$$

である．よって，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{SC}}$$

である．また，△QAR と △QCS は相似であるので，

$$\mathrm{AR}:\mathrm{QA}=\mathrm{CS}:\mathrm{QC}$$

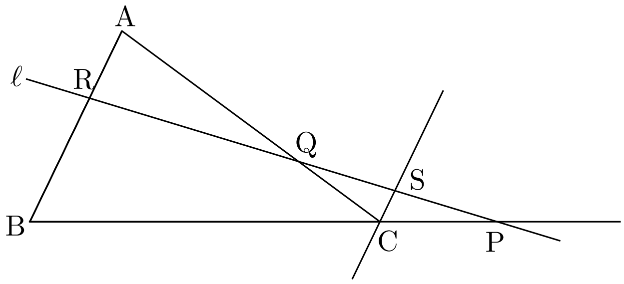
よって，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{QA}}=\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{QC}}$$

である．したがって，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{RB}}=1$$

となる．Q.E.D.



練習問題 34.　次の定理（メネラウスの定理の逆）を証明せよ．

> **定理 38.**　△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長線上に，それぞれ，点 P，Q，R があり，これら 3 点のうち 1 点だけ，または 3 点が辺の延長線上にあって，
>
> $$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$
>
> が成り立つとき，3 点 P，Q，R は一直線上にある．

練習問題 35.　次の定理を証明せよ．

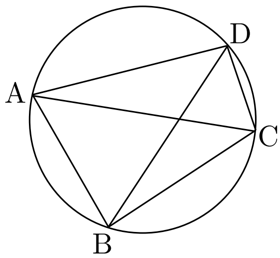
> **定理 39.**　△ABC は ∠A < ∠B とする．そして，∠A の 2 等分線と BC の交点を P，∠B の 2 等分線と CA の交点を Q，∠C の 2 等分線と AB の交点を R とする．このとき，3 点 P，Q，R は一直線上にある．

§ 14　平面幾何の定理（トレミーの定理）

定理 40.　円に内接する四角形 ABCD の辺と対角線の長さについて，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

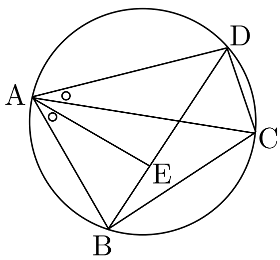
が成り立つ．



(**証明**)　BD 上に点 E を

$$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{CAD}$$

となるようにとる．



△ABE と △ACD において

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{ACD}$$

である．したがって，△ABE と △ACD は相似である．よって，AB : BE = AC : CD より，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE} \tag{1.1}$$

である．同様にして △AED と △ABC も相似である．よって，AD : ED = AC : BC より，

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{ED} \tag{1.2}$$

である．(1.1) と (1.2) より

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}+\mathrm{AC}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{AC}\cdot(\mathrm{BE}+\mathrm{ED})=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

である．Q.E.D.

練習問題 36.　次の定理を証明せよ．

定理 41.　一辺の長さが 1 の正 5 角形の対角線の長さは，

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．

練習問題 37.　次の定理を証明せよ．

定理 42.　正 7 角形の *2* つの頂点を結ぶ線分の長さを短いほうから，a, b, c とすると，

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

が成り立つ．

§ 15　数学を研究するためのトレーニング

数学の研究をするためには，やはりある種のトレーニングが必要である．以下にそのためのトレーニングのテーマを与える．与えられたテーマから，自由に発想して，それから定理を作って，それを証明してみよう．

[テーマ１] p を 2 でも 5 でもない素数とすると，$\dfrac{1}{p}$ は循環小数に展開された．そこで，例えば，

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$$

であるが，循環節の 142857 を取り出して，これを 142 と 857 と 2 分割すると，

$$142 + 857 = 999$$

となる．さらに，

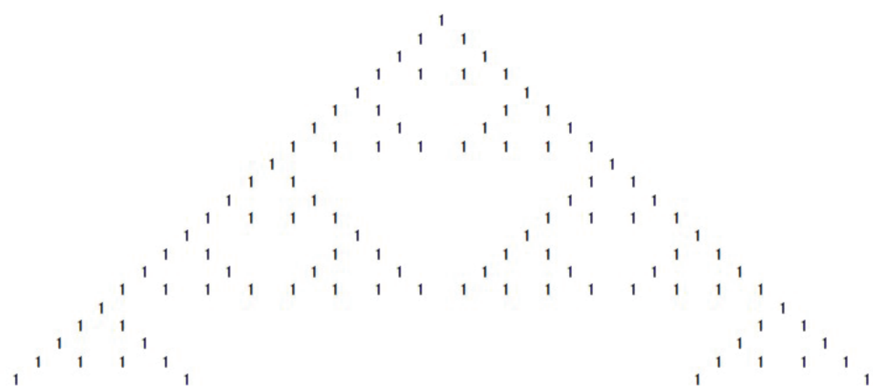
$$\frac{1}{17} = 0.05882352941176470588235294117647\cdots$$

も，循環節の 0588235294117647 を取り出して，これを 05882352 と 35294117647 と 2 分割すると，

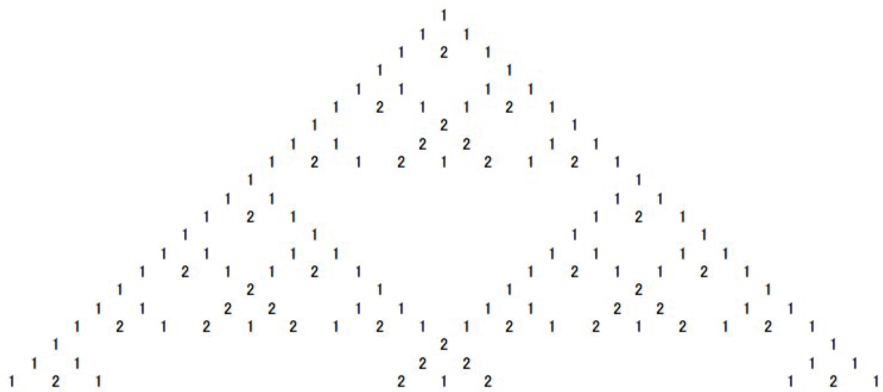
$$105882352 + 35294117647 = 99999999999$$

となる．このようなタイプの分数 $\dfrac{1}{p}$ を考えて，定理を作り，それを証明せよ．

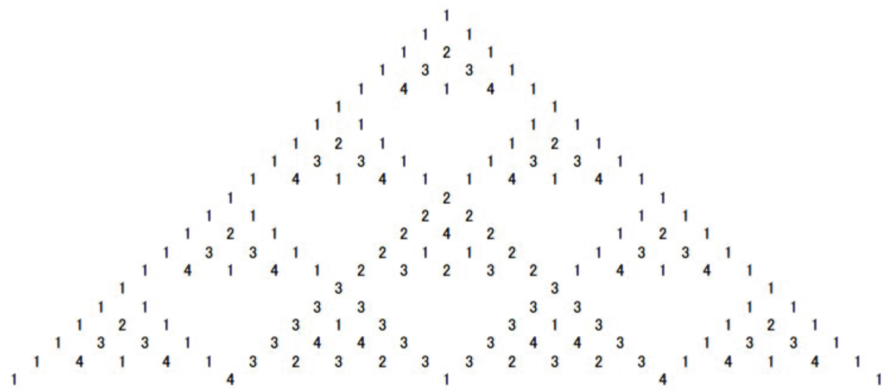
[テーマ２] p を素数として，パスカル三角形　mod p を考える．このとき，見つけた法則を定理にして，それを証明せよ．



（パスカル三角形 mod 2）



（パスカル三角形 mod 3）



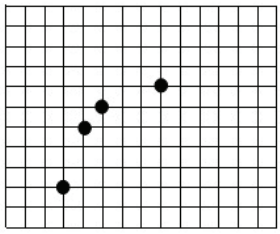
（パスカル三角形 mod 5）

[テーマ 3]　適当なルールを決めて数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

をつくり，その数列から発見した最初のルール以外の法則を定理にしてまとめ，それを証明せよ．

[テーマ４]　正方形で区切られた方眼紙を用意して，４つの格子点を考える．その４点が同一円上にあるパターンを分類して，そのことを定理としてまとめ，それを証明せよ．



（４点が同一円上にある例）

[テーマ５]　数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$$

は**フィボナッチ数列**と呼ばれるものである．この数列の n 番目を F_n で表すと，

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

と表すことができる．さて，この数列には，様々な多くの法則があることが知られている．例えば，

$$F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2, \quad F_4 - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4, \quad F_5 - 1 = 5 - 1 = 4$$
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7, \quad F_6 - 1 = 8 - 1 = 7$$
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12, \quad F_7 - 1 = 13 - 1 = 12$$

である．この他に，自分なりに法則を見つけ，それを定理にして証明せよ．

§ 16　コラム

高専１年生レベルに関係する未解決問題の中から１０個の問題を紹介する．未解決問題とは,「未だ証明が得られていない命題」というものである．

1. （ゴールドバッハ予想）　4 以上の偶数は二つの素数の和で表すことができるか.

2.　a^2+1 という形の素数は無限に存在するか.

3.　$n!+1$ という形の素数は無限に存在するか.

4.　p を素数としたとき，2^p-1 という形の素数は無限に存在するか．2^p-1 をメルセンヌ素数と呼ぶ.

5.　n を正の整数としたとき，$2^{2^n}+1$ という形の素数は有限個しかないだろうか．$2^{2^n}+1$ をフェルマー数と呼ぶ.

6. （双子素数問題）　双子素数は無限に存在するか．ここで，双子素数とは差が 2 である 2 つの素数の組のことを指す.

7.　$1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(n-1)^{n-1}$ が n で割り切れるならば，n は素数であるか.
（ p を素数としたとき，$1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}$ は p で割り切れることは証明されている.）

8. （コラッツ問題）　ある正の整数 n を考える．もし n が偶数なら 2 で割り，奇数なら $3n+1$ とする．どんな n もこの操作を何回か繰り返して，いつかは 1 とすることができるか.

9. （郵便切手問題）　切り離されていない，横に並んだ n 枚の切手を，折りたたんでいって，切手 1 枚のサイズまで折りたたむ．このとき，左端の切手が一番上になるような折りたたみ方は何通りあるか.

10. （魔方陣の問題）　$n\geq 6$ のとき，n 次魔方陣の種類は何通りあるか.

§ 17　練習問題の解答（証明の概略）

練習問題 1．任意の素数を p とする．$2, 3, 5, 7, \cdots, p$ に対して $Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p - 1$ を考えると，これは $6n - 1$ の形の数であり，p 以下の素数では割り切れない．また，$(6n_1 + 1)(6n_2 + 1) = 6N + 1$ となるので，Q が素数でないなら，Q は p より大きい $6n - 1$ の形の素数で割り切れる．

練習問題 2．$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ であるので，$f(p) = p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ が 2^4, 3, 5 の各々の倍数であることを証明すればよい．(1) $f(p)$ が 3 の倍数であることは，p が $3k + 1$ のとき，$f(3k + 1) = 3k(3k + 2)(9k^2 + 1)$ となり，$f(p)$ は 3 の倍数であり，同様にして，p が $3k - 1$ のときもを $f(p)$ は 3 の倍数であることからわかる．このとき，p は 5 より大きい素数なので p は $3k$ は考えなくてよい．(2) $f(p)$ が 5 の倍数であることも p が $5k + 1$, $5k + 2$, , $5k + 3$, $5k + 4$ のときに全て 3 の倍数であることからわかる．(3) $f(p)$ が 2^4 の倍数であることは，p が $2k + 1$ のときを考えれば，$f(p) = 2^3 k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$ となり，$k(k + 1)$ が偶数なので，$f(p)$ は 2^4 の倍数であることがわかる．

練習問題 3．定理 8 と同様な方法で証明できる．

練習問題 4．m, n を互いに素な自然数とし，$x = \dfrac{m}{n}$ と置くと，$10^{m/n} = 2$ より，$10^m = 2^n$ となり，よって $2^m \cdot 5^m = 2^n$ が得られる．しかしこれは素因数分解の一意性に矛盾する．

練習問題 5．x, y, z はどれも 5 の倍数ではないとすると，$x \equiv \pm 1 \mod 5$，$y \equiv \pm 1 \mod 5$，$z \equiv \pm 1 \mod 5$ が成り立つ．しかし，$x^2 + y^2 - z^2 \equiv 0 \mod 5$ に矛盾する．

練習問題 6．x, y, z はどれも 4 の倍数ではないとすると，$x^2 \equiv \pm 1 \mod 4$，$y^2 \equiv \pm 1 \mod 4$，$z^2 \equiv \pm 1 \mod 4$ が成り立つ．しかし，$x^2 + y^2 - z^2 \equiv 0 \mod 4$ に矛盾する．よって，xyz は 4 の倍数である．

練習問題 7．a が p の倍数であるときは明らかである．a が p の倍数でないとする．a_1 と a_2 はどちらも p と互いに素であるととし，$a = a_1 a_2$ であったとする．定理 11（フェルマーの小定理より）$a_1^p \equiv a_1 \mod p$，$a_2^p \equiv a_2 \mod p$ が成り立つ．よって，$a^p = a_1^p a_2^p \equiv a_1 a_2 = a \mod p$ である．このように，a を因数分解して，それぞれの因数に定理 11 を適用すれば示される．

練習問題 8．定理 13（フェルマーの小定理）より，$10^{p-1} \equiv 1 \mod p$ である．よって，$n = (10^{p-1} - 1)/p$ は正の整数である．$\alpha = 1/p$ と置くと，$n = 10^{p-1}\alpha - \alpha$ である．これは，α を小数展開したとき，小数点以下 10^p 以下に並んだ数が，α の小数展開と同じ数で

並ぶことを意味する．したがって，α は循環小数である．

練習問題 9. ${}_{n-1}\mathrm{P}_r = \dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}$ と ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} = \dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$ より示される．

練習問題 10. (1) 総数は $5 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 300$ 個であり，その内の偶数は，一の位が 0 のときの場合に ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 個，一の位が $2, 4$ のときの場合に $2 \times (4 \times {}_4\mathrm{P}_2) = 96$ 個よりいえる．

(2) 総数は $n \times {}_n\mathrm{P}_{r-1}$ であり，その内の偶数は，一の位が 0 のときの場合に ${}_n\mathrm{P}_{r-1}$，一の位が偶数の場合に $r' \times (n-1) \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r'}$ よりいえる．

練習問題 11. 2 色で塗り分けるときは ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り，3 色で塗り分けるときは $2 \times {}_4\mathrm{P}_3$ 通り，4 色で塗り分けるときは ${}_4\mathrm{P}_4$ 通りである．以上のことから示される．

練習問題 12. ${}_{n-1}\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{P}_r}{r!} = \dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$ と ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}}{(r-1)!} = \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$ より示される．

練習問題 13. $(a+b)^n = (a+b)\cdots(a+b)$ と考え，$a^n - rb^r$ の係数は，n 個の $(a+b)$ の中から r 個の b を取り出すことから示される．

練習問題 14. $\dbinom{n}{r}$ は ${}_n\mathrm{C}_r$ と同じ意味であり，定理 19 より，$({}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1}) + ({}_n\mathrm{C}_{r+1} + {}_n\mathrm{C}_{r+2}) = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+2} = {}_{n+2}\mathrm{C}_{r+2}$ となる．

練習問題 15. 定理 18 よりいえる．

練習問題 16. $S = 0 \cdot {}_n\mathrm{C}_0 + 1 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n$ と置いて，$S = n \cdot {}_n\mathrm{C}_n + \cdots + 1 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 0 \cdot {}_n\mathrm{C}_0$ と考えたものと足すと，$2S = n({}_n\mathrm{C}_0 + 1 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n)$ であり，定理 15 より，$2S = n \cdot 2^n$ であることから示される．

練習問題 17. (1) $\dbinom{k}{0} = 1$ よりいえる．

(2) $\dbinom{k}{1} = k$ であり，$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ よりいえる．

(3) $\dbinom{k}{2} = \dfrac{(k-1)k}{2} = \dfrac{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k}{6}$ であり，$S = \dbinom{2}{2} + \dbinom{3}{2} + \cdots + \dbinom{n}{2} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} + \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3}{6} + \cdots + \dfrac{(n-2)(n-1)n - (n-1)n(n+1)}{6} + \dfrac{(n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n}{6}$ より，$S = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6} = \dbinom{n+1}{3}$ となり示される．

練習問題 18. $\dbinom{n}{2} + \dbinom{n+1}{2} = n^2$ よりいえる．

練習問題 19. 定理 25 より $(x-1)S_n = x^n - 1$ であるので成り立つ．

練習問題 20. $S_n = (10-1) + (10^2-1) + \cdots + (10^n-1) = 10 + 10^2 + \cdots + 10^n - n$

より $S_n = \dfrac{10(10^n-1)}{9} - n$ よりいえる．

練習問題 21．　$6+66+666+\cdots = \dfrac{2}{3}(9+99+999+\cdots)$ と考えると，練習問題 18 より，$S_n = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{9}$ よりいえる．

練習問題 22．　$S = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ として，$xS = x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ を引くと，$(1-x)S = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$ である．定理 19 より $(1-x)S = \dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$ よりいえる．

練習問題 23．　定理 27 と同様の方法で証明できる．

練習問題 24．　$(\text{左辺}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n} = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n = n^2 = (\text{右辺})$

練習問題 25．　$(\text{左辺}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$ $= \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) = (\text{右辺})$

練習問題 26．　問題文の恒等式より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^4-(k-1)^4\right\} = \sum_{k=1}^{n}(8k^3+8k)$ が成り立つが, 定理 28 (2) の証明と同様の計算により $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^4-(k-1)^4\right\} = 2n^4+4n^3+6n^2+4n+1$ がいえる．一方, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(8k^3+8k) = 8\sum_{k=1}^{n}k^3+4n(n+1)$ であるから，これらを整理すると与えられた等式を得る．

練習問題 27．　(i) $n=1$ のとき，$2n^3-3n^2+n = 2-3+1 = 0$ よりこれは 6 の倍数である．(ii) $n=k$ のとき，$2n^3-3n^2+n = 2k^3-3k+k$ が 6 の倍数であると仮定すると，$2k^3-3k^2+k = 6m$ (m は自然数) と表せる．ここで $n=k+1$ のとき，$2n^3-3n^2+n = 2(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1) = 2(k^3+3k^2+3k+1)-3(k^2+2k+1)+k+1 = 2k^3+3k^2+k = 2k^3-3k^2+k+6k^2 = 6m+6k^2 = 6(m+k^2)$ となり，$n=k+1$ のときも $2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である．(i)，(ii) より，すべての n について $2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である．

練習問題 28．　(i) $n=1$ のとき，$5^n-2^n = 5-2 = 3$ よりこれは 3 の倍数である．(ii) $n=k$ のとき，$5^n-2^n = 5^k-2^k$ が 3 の倍数であると仮定すると，$5^k-2^k = 3m$ (m は自然数) と表せる．すなわち $5^k = 2^k+3m$ である．ここで $n=k+1$ のとき，$5^n-2^n = 5^{k+1}-2^{k+1} = 5\cdot5^k-2\cdot2^k = 5(2^k+3m)-2\cdot2^k = 5\cdot2k+15m-2\cdot2^k = 3\cdot2^k+15m = 3(2^k+5m)$

となり，$n=k+1$ のときも 5^n-2^n は 3 の倍数である．(i)，(ii) より，すべての n について 5^n-2^n は 3 の倍数である．

練習問題 29.　(i) $n=5$ のとき，$2^n=2^5=32$ および $n^2=5^2=25$ より $2^n>n^2$ が成り立つ．(ii) $n=k$ のとき，$2^k>k^2$ が成り立つと仮定する．ここで $n=k+1$ のとき，$2^{k+1}-(k+1)^2=2\cdot 2^k-(k^2+2k+1)>2k^2-(k^2+2k+1)=k^2-2k-1=k(k-1)-1>0$ より $2^{k+1}>(k+1)^2$ を得る．すなわち $n=k+1$ のときも $2^n>n^2$ が成り立つ．(i)，(ii) より $n\geqq 5$ をみたす自然数 n について $2^n>n^2$ が成り立つ．

練習問題 30.　(i) $n=1$ のとき，(左辺) $=\dfrac{1}{1}=1$ および (右辺) $=\dfrac{2\cdot 1}{1+1}=1$ より与えられた不等式が成り立つ．(ii) $n=k$ のとき，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{2k}{k+1}$ が成り立つと仮定する．ここで $n=k+1$ のとき，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}\ \cdots\cdots\ (*)$$

となるが，$\dfrac{2k+1}{k+1}$ と $\dfrac{2(k+1)}{(k+1)+1}$ の大小を比較すると，

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

より $\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{(k+1)+1}$ が成り立つ．したがって $(*)$ より

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

となるので，$n=k+1$ のときも与えられた不等式は成り立つ．(i)，(ii) よりすべての自然数 n について与えられた不等式は成り立つ．

練習問題 31.　2 直線 BQ と CQ の交点を S とし，2 直線 AS と BC の交点を P' とする．3 直線 AP′，BQ，CR は 1 点 S で交わっているから，定理 33（チェバの定理）より，$\dfrac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ である．よって，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}}$ である．これより，P と P′ は線分 BC を同じ比に内分するので，P と P′ は一致する．すなわち，AQ，BQ，CR は 1 点で交わる．

練習問題 32.　定理 34（チェバの定理の逆）より，3 本の中線 AL，BM，CN は 1 点 G で交わる．線分 AG を BC の方向へ延長して AG = GD となる点 D をとる．このとき，△ABD の中点連結定理より NG と BD は平行なので，GC と BD も平行である．また △ADC の中点連結定理より MG と CD は平行なので，GB と CD も平行である．よって，四角形 GBDC は平行四辺形である．したがって，直線 GD は線分 BC を点 L で 2 等分す

る．よって，$\mathrm{AG}:\mathrm{GL}=2:1$ である．$\mathrm{BG}:\mathrm{GM}=2:1$，$\mathrm{CG}:\mathrm{GN}=2:1$ であることも同様に示される．

練習問題 33．A, B, C から対辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足を順に I, J, K とする．△ABI と △CBK は相似より，$\mathrm{AB}:\mathrm{BI}=\mathrm{CB}:\mathrm{BK}$ で，これより $\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BK}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$ を得る．同様に，$\dfrac{\mathrm{CJ}}{\mathrm{CI}}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$，$\dfrac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AJ}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を得る．よって，$\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BK}}\cdot\dfrac{\mathrm{CJ}}{\mathrm{CI}}\cdot\dfrac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AJ}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}\cdot\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}\cdot\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=1$ である．したがって，定理 34（チェバの定理の逆）より，３つの垂線は 1 点で交わる．

練習問題 34．P が線分 BC 上の延長線上にあると仮定する．このとき，直線 PQ は辺 AB またはその延長と A, B 以外の点で交わるから，その交点を R′ と置くと，定理 37（メネラウスの定理）より $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}'}{\mathrm{R}'\mathrm{B}}=1$ となる．よって，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\mathrm{AR}'}{\mathrm{R}'\mathrm{B}}$ である．これより R と R′ は AB を同じ比に内分または外分するから R と R′ は一致する．したがって，３点 P，Q，R は一直線上にある．

練習問題 35．線分 RC 上の延長線上に点 S を，AS と BC が平行になるようにとる．さらに，線分 AC 上の延長線上の線分 C 方向側に 1 点 D をとる．$\angle\mathrm{ACS}=\angle\mathrm{RCD}=\angle\mathrm{BCB}=\angle\mathrm{CSA}$ より $\mathrm{AC}=\mathrm{AS}$ である．△RAS と △RBC は相似であるので，$\mathrm{RA}:\mathrm{RB}=\mathrm{AS}:\mathrm{BC}=\mathrm{AC}:\mathrm{BC}$ である．これは，R が AB を $\mathrm{CA}:\mathrm{CB}$ に外分していることを意味する．よって，$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=\mathrm{AC}:\mathrm{BC}$ である．一方，AP が ∠A の二等分線であるため，$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$ である．同様に，BQ が ∠B の二等分線であるため，$\mathrm{CQ}:\mathrm{QA}=\mathrm{BC}:\mathrm{AB}$ である．よって，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\cdot\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=1$ である．したがって，定理 38（メネラウスの定理の逆）より，３点 P，Q，R は一直線上にある．

練習問題 36．正 5 角形 ABCDE とその外接円を考える．このとき，四角形 ABCD について，定理 40（トレミーの定理）より $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$ が成り立つ．$x=\mathrm{DA}=\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$ と置くと，$1+x=x^2$ である．これより $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ がいえる．

練習問題 37．正 7 角形 ABCDEFG とその外接円を考える．$a=\mathrm{AB}$，$b=\mathrm{AC}$，$c=\mathrm{AD}$ と置く．このとき，四角形 ACDE について，定理 40（トレミーの定理）より $\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DE}+\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EA}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CE}$ が成り立つ．よって，$b\cdot a+a\cdot c=c\cdot b$ であり，両辺を abc で割ることで $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ が得られる．

数学を研究するためのトレーニングテーマのヒント

[テーマ 1] 例えば，$\dfrac{1}{p}$ を小数展開したとき，循環節が $2m$ であるものを考える．このとき，その循環節を 2 分割して足すと $99\cdots9$ となることが観察されるので，このことを定理と考えることができる．そこで，その証明の方針を以下に述べる．練習問題 8 の解答で

扱ったように，$\dfrac{10^{2m}}{p} - \dfrac{1}{p}$ は整数なので，$10^{2m} \equiv 1 \mod p$ がいえる．これより $10^m \equiv -1 \mod p$ でなければならない．すなわち，$\dfrac{10^m}{p} + \dfrac{1}{p}$ は整数となる．これは，$\dfrac{10^m}{p}$ の小数部と $\dfrac{1}{p}$ の和が $1 = 0.99\cdots$ であることを意味する．よって，循環節の 2 分割和は $99\cdots 9$ となる．

［テーマ 2］ 例えば，パスカル三角形　mod 3 を考えると，n 段目（$n = 0, 1, 2, \cdots$）に対して，$3^k n$ 段目は，n 段目の数列を $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_s$ とすると，$n \times 3^k$ 段目は，$a_1, 0, \cdots, 0, a_2, 0, \cdots, 0, a_3, 0 \cdots, 0, \cdots, 0 \cdots 0, a_s$ で，a_i と a_{i+1} の間に 0（空白）が $3^k - 1$ 個挟まれることが観察される．これを「$n \times 3^k$ 段目は n 段目の O_{3^k-1} 拡大である」と呼ぶことにして，このことを定理と考えることができる．そこで，その証明の方針を以下に述べる．n 段目は $(x+1)^n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{s-1} x + 1$ の係数の数列である．さらに，$(x+1)^3 \equiv x^3 + 1 \mod 3$ である．このことと，フェルマーの小定理 $a_i^3 \equiv a_i \mod 3$ を用いて，$(x+1)^{3n} = x^{3n} + a_1 x^{3(n-1)} + \cdots + a_{s-1} x^3 + 1$ である．これは，$3n$ 段目が n 段目の O_2 拡大であることを意味する．$3^k n$ 段目が n 段目の O_{3^k-1} 拡大であることも同様に示される．

［テーマ 3］ 例えば，平方数の数列

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ \cdots$$

について考える．これを 2 で割った余りは，1, 0, 1, 0, $\cdots$ であることは当然である．3 で割った余りをみると，

$$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots$$

5 で割った余りをみると，

$$1,\ 4,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 4,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 4,\ 4,\ \cdots$$

となっている．

［テーマ 4］ 例の図の下側にある点から順に A,B,C,D とする．$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \sqrt{10}$，$\mathrm{AD} = 5\sqrt{2}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} = 2\sqrt{5}$ である．よって，$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} = 20$ が成り立ち，トレミーの定理から A,B,C,D は同一円上にある．

［テーマ 5］ 例えば，以下を考えてみてはどうだろう．

(1) $F_1 + F_3 + F_5 - + \cdots + F_{2n-1}$

(2) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n}$

(3) $F_1 - F_2 + F_3 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n$

(4) $F_1 - F_2 + F_3 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n$

(5) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2$