

7 その他の微分方程式の解法

1 階の微分方程式で特徴的なものをいくつか挙げる.

7.1 1 階の線形微分方程式

$y' + P(x)y = Q(x)$ という微分方程式を考えよう. これは **1 階の線形微分方程式** である. 以前は $P(x)$ が定数である場合を取り扱ったが, 今回は $P(x)$ が x の関数になっている場合を考える. 1 階の微分方程式には解の公式がある.

1 階の微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ の解の公式

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} + c \right)$$

証明は微分方程式の教科書にも載っているので省略する. ここでは実際にこの公式をどのように使うのかを例で示す.

例

$$y' + \frac{1}{x}y = x + 1$$

$P = \frac{1}{x}$, $Q = x + 1$ とおく. $\int P dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$ であり,

$$\int Q e^{\int P dx} dx = \int (x + 1) e^{\log x} dx = \int (x^2 + x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

したがって,

$$y = e^{-\log x} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \right).$$

つまり

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{c}{x}.$$

問 11 次の微分方程式を解け.

$$y' + xy = x^2 + x + 1$$

7.2 ベルヌーイの微分方程式

1 階の微分方程式のちょっとした応用に**ベルヌーイの微分方程式**といわれるものがある.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

これがベルヌーイの微分方程式である.

ベルヌーイの微分方程式の解法

$z = y^{1-n}$ において, x と z の微分方程式に書き換えると線形微分方程式になる.

例

$$y' - \frac{y}{x} = -(x+1)y^2$$

解 $z = y^{1-2} = y^{-1}$ とおく.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{-1})}{dy} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2} y'$$

これより, $y' = -y^2 z'$ を得る. 与えられた微分方程式を y^2 で割って z と x に書き換えると

$$z' + \frac{z}{x} = x + 1$$

となる. 1 階の線形微分方程式の公式に代入して

$$z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + c$$

$z = y^{-1}$ なので,

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + c$$

となる.

問 12 次の微分方程式を解け.

$$y' + xy = xy^{-1}$$

7.3 完全微分方程式

2変数関数 $u = u(x, y)$ の全微分は、 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ であった。もし微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

で、ある関数 $u(x, y)$ が存在して、 $du = Pdx + Qdy$ となっていれば、上の微分方程式は

$$du(x, y) = 0$$

となっている。つまりこの微分方程式の一般解は、

$$u(x, y) = c$$

である。このような形になっているものを、**完全微分方程式**という。

例 $ydx + xdy = 0$ は完全微分方程式である。なぜならば、 $u = xy$ とすると $du = ydx + xdy$ となるからである。したがって一般解は、 $xy = c$ である。

与えられた微分方程式を見分けるための方法がある。

$Pdx + Qdy = 0$ が完全微分方程式であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

必要条件はほとんど明らかであるし、完全形かどうかを判断するだけなら、十分条件だけでよいのでそれを確かめる。 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ [†]を仮定する。 a, b を定数として、

$$u = \int_a^x P(x, y)dx + \int_b^y Q(a, y)dy$$

[†] $\frac{\partial P}{\partial y}$ を P_y , $\frac{\partial Q}{\partial x}$ を Q_x というように簡略記号を用いることも多い。

を考える。ただし最初の積分は、 y を定数とみなして x で積分する。このとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= P(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x P(x, y) dx + Q(x, y) \\ &= \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(a, y) \\ &= \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + Q(a, y) \\ &= [Q(x, y)]_{x=a}^{x=x} + Q(a, y) \\ &= Q(x, y)\end{aligned}$$

よって $Pdx + Qdy = 0$ は完全微分方程式である。

[証明終]

この証明から同時に次のこともいえたことになる。

完全微分方程式 $Pdx + Qdy = 0$ の一般解は、

$$\int_a^x P(x, y) dx + \int_b^y Q(a, y) dy = c$$

特に初期条件 $x = a, y = b$ が与えられたときは、

$$\int_a^x P(x, y) dx + \int_b^y Q(a, y) dy = 0$$

先ほどの例をもう一度考えてみよう。

$$ydx + xdy = 0$$

は、 $P = y, Q = x$ であり、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

なので完全形である。よって一般解は、

$$\int_0^x y dx + \int_0^y 0 dy = c$$

より $xy = c$ である。

練習 次の微分方程式を解いてみよう.

$$\left(\frac{1}{x+y}+1\right)dx+\frac{1}{x+y}dy=0$$

解 $P = \frac{1}{x+y} + 1$, $Q = \frac{1}{x+y}dy$ とおくと, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2}$ なので完全形である. よって一般解は, $a = 0$, $b = 1$ とおけば,

$$\int_0^x \left(\frac{1}{x+y}+1\right)dx + \int_1^y \frac{1}{y}dy = c$$

より $\log(x+y) + x = c$ である.

問 13 次の微分方程式を解け.

$$(1) \quad \cos(x+y)dx - \sin(x+y)dy = 0$$

$$(2) \quad \left(\frac{2x}{x^2+y^2}+6x+2y\right)dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}+2x\right)dy = 0$$

7.4 2 階の変数係数線形微分方程式

(1) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ という同次方程式から考えていこう．これにはいくつか方法があると思うが，ここでは直感的な解法で解いてみる．

2 階の微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の解の解法

まず直感で 1 つの解 y_1 が見つかったとする．
このときもうひとつの解 y_2 は $y_2 = y_1 u$ とおくことで，
まず u が求まり，したがって y_2 が求まる．
これで，方程式の解 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ が求まる．

例

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0.$$

解 明らかに， $y = x^2$ は上の方程式の解である．もうひとつの解を見つけるために， $y_2 = x^2 u$ とおき，与えられた方程式に代入すると $y_2' = 2xu + x^2 u'$ ， $y_2'' = 2u + 4xu' + x^2 u''$ なので，

$$x(xu'' + 5u') = 0$$

を得る．よって $xu'' + 5u = 0$ から u を求めればよい． $p = u'$ とおく． $p' + 5P = 0$ となるので，

$$p = \frac{1}{x^5}.$$

したがって， $u' = \frac{1}{x^5}$ より

$$u = -\frac{1}{4x^4}.$$

$y_2 = y_1 u$ より

$$y_2 = -\frac{1}{4x^2}$$

したがって求める微分方程式の解は

$$y = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x^2}.$$

(2) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ という方程式を考えよう. ここでは特にオイラーの線形微分方程式を取り扱う.

オイラーの線形微分方程式 $ax^2y'' + bxy' + cy = R(x)$ の解の解法

まず, $x = e^z$ とおく.

これより, $\frac{dx}{dz} = e^z = x$ である.

さらに, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$ であり,

$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{dy}{dz} \frac{dy}{dz} = x \frac{dy}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = xy' + x^2 y''$ なので,

$x^2 y'' = \frac{dy^2}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$ である.

これらを上の方程式に代入して, z と y の変数にすると,

上の微分方程式は定数係数線形微分方程式に変わる.

例

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2.$$

解 $x = e^z$ とおくと, $\frac{dx}{dz} = e^z = x$, $xy' = \frac{dy}{dz}$ で $x^2 y'' = \frac{dy^2}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$ である. よって上の方程式は,

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 3y = e^{2z}$$

となる. これを解くと,

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{3z} - e^{2z}$$

を得る. $z = \log x$ なので,

$$y = c_1 x + c_2 x^3 - x^2$$

が解である.

問 14 次の微分方程式を解け.

(1) $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

(2) $x^2y'' - xy' + y = x^2$

7.5 その他

問 15 次の微分方程式を解け.

(1) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$

(2) $(1 + x^2)y'' + 1 + y'^2$

(3) $2yy' = 1 + (y')^2$

ヒント: いずれも $z = y'$ とおいてみる. (3) は, $y'' = \frac{dz}{dy}z$ となることに注意せよ.