

6 連立微分方程式を解こう.

t を独立変数とする. 2つの未知関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ についての微分方程式を考える. D は $\frac{d}{dt}$ とする.

例

$$\begin{cases} (D+2)x + y = e^t & (1) \\ (D+6)x + Dy = 0 & (2) \end{cases}$$

$D \cdot (1) - (2)$ より

$$D(D+2)x - (D+6)x = De^t.$$

よって

$$(D+3)(D-2)x = e^t.$$

したがって,

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{4} e^t.$$

これを (1) に代入して,

$$y = -4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{7}{4} e^t$$

が得られる.

注意 上の解法は次のように考えることもできる.

$$\begin{vmatrix} (D+2) & 1 \\ (D+6) & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ 0 & D \end{vmatrix}$$

これより

$$(D+3)(D-2)x = e^t$$

したがって

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{4} e^t.$$

一方

$$\begin{vmatrix} (D+2) & 1 \\ (D+6) & D \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} (D+2) & e^t \\ (D+6) & 0 \end{vmatrix}$$

これより

$$(D+3)(D-2)y = -7e^t$$

したがって

$$y = c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t} + \frac{7}{4} e^t.$$

(1) より, $c_3 = -4c_1$, $c_4 = c_2$ という関係式が得られる. よって

$$y = -4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{7}{4} e^t.$$

この方法は線形代数で習ったクラメールの方法である.

問 10 次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} (D+3)x + 2y &= e^t \\ (D+1)x + Dy &= 0 \end{cases}$$