

5 ラプラス変換を使おう.

今までの問題の中で、特に初期条件が与えられた微分方程式を解く時は、結構面倒な思いをしたのではないだろうか。そこでラプラス変換を使った微分方程式の解法を考えてみよう.

5.1 ラプラス変換とは.

まずラプラス変換の定義を述べよう. 区分的には連続である関数 $y = f(x)$ を考える. この関数の次のような複素関数への変換 $\mathcal{L}$ を考える.

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ここで、上の積分は広義積分を意味し、 s は複素数である. 複素積分というと怖気ずくかもしれないが、そう気にしないでただの変数だと思って欲しい.

注意すべきことが2つある. 第1番目は、上で定義した積分がいつ存在するのかということだが、ここで扱う関数のほとんどが、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ で存在するので、以後何も断らない限り、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ とする.

第2番目の注意は、線形性があるということである. つまり、明らかに

$$\mathcal{L}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{L}[f(x)] + b\mathcal{L}[g(x)]$$

が成り立つ.

ラプラス変換に関する重要な定理 (事実) がある.

定理. $f(x)$ と $g(x)$ は連続関数とする.
もし $\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[g(x)]$ ならば $f(x) = g(x)$ である.

上の定理の証明は省略するが、重要なことは、 $F(s)$ が与えられたとき、 $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ となる連続関数は一意的に求められるということである. $f(t)$ を、 $F(s)$ の **ラプラス逆変換** といい、 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(x)$ と書く.

5.2 ラプラス変換表

実際にラプラス変換を行ってみよう.

(1) まず一番簡単な $f(x) = 1$ の場合から始める.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx}$$

ここで, $\operatorname{Re}(s) > 0$ なら $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} = 0$ となることを見よう. $s = a + bi$, $a > 0$ としよう.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-sx}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} = 0$$

したがって,

$$F(s) = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

逆に $\frac{1}{s}$ の逆変換は $f(x) = 1$ であることもいえる.

(2) 次に, $f(x) = x$ の場合を計算しよう.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x dx = \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} x \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} x + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} x = 0$ であることは, ロピタルの定理よりわかる. 勿論 $\frac{1}{s^2}$ の逆変換は $f(x) = x$ である.

同様な計算で, $f(x) = x^2$ のときは,

$$\mathcal{L}[x^2] = \frac{2!}{s^3}$$

となることがわかる.

(3) 一般に, 以下の公式が成り立つ.

$$(1) \quad \mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

(4) $\mathcal{L}[e^{ax}]$ を計算しよう.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}e^{ax} &= \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)x} \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s-a} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(s-a)x} + \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

ここで, $\operatorname{Re}(s-a) > 0$ であるならば, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(s-a)x} = 0$ である. したがって,

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \frac{1}{s-a} \quad (\operatorname{Re}(s-a) > 0)$$

となることがわかった.

(5) 次は $\mathcal{L}[\sin \omega x]$ を計算しよう. まずオイラーの公式より,

$$\sin \omega x = \frac{e^{\omega i x} - e^{-\omega i x}}{2i}$$

である. これより

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \omega x] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega i x} - e^{-\omega i x}}{2i}\right] = \frac{1}{2i} \{\mathcal{L}[e^{\omega i x}] - \mathcal{L}[e^{-\omega i x}]\} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{s - \omega i} - \frac{1}{s + \omega i} \right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

である.

同様に $\mathcal{L}[\cos \omega x] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ を得る.

以上を公式としてまとめよう.

$\begin{aligned}(2) \quad \mathcal{L}[e^{ax}] &= \frac{1}{s-a} \quad (\operatorname{Re}(s-a) > 0) \\ (3) \quad \mathcal{L}[\sin \omega x] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0) \\ (4) \quad \mathcal{L}[\cos \omega x] &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)\end{aligned}$
--

問 8 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $5x^2 - 3x + 1$

(2) $e^{-3x} + 5e^{4x}$

(3) $\sin 2x$

(4) $\sin \sqrt{2}x + \cos(-3x)$

5.3 ラプラス変換で微分方程式を解く.

微分方程式を解くときに次の公式が非常に重要になってくる.

$y = f(x)$ は2階微分可能とする.

$$(5) \quad \mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(+0)$$

$$(6) \quad \mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - y(+0)s - y'(+0)$$

証明 条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} f(x) = 0$ が成り立っているとする. (これは普通使われる関数に関してはたいてい成り立つ. チェックせよ.)

(5) について

$$\mathcal{L}[y'] = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = [e^{-sx} f(x)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = s\mathcal{L}[y] - y(+0).$$

(6) は (5) を利用することで簡単に得られる. すなわち

$$\mathcal{L}[y''] = \mathcal{L}[(y')'] = s\mathcal{L}[y'] - y'(+0) = s^2\mathcal{L}[y] - y(+0)s - y'(+0).$$

全て準備は整った. 早速次の微分方程式を解いてみよう.

$$(\text{例}) \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \quad [y(0) = 0, y'(0) = 0]$$

$$\mathcal{L}[y'' - 4y' + 4y] = \mathcal{L}[e^{2x}]$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}[y''] - 4\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

$\Downarrow$

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 4\{s\mathcal{L}[y] - y(0)\} + 3\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

$\Downarrow$

$$(s^2 - 4s + 3)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{(s-1)} + \frac{-1}{(s-2)} + \frac{2}{(s-3)}$$

$\Downarrow$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-3}\right]$$

$\Downarrow$

$$y = 2e^x - e^{2x} + 2e^{3x}$$

注意 $\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$ と部分分数に分解した. 部分分数のやり方は複素関数論で習う留数計算の方法を知っていれば比較的楽に計算できる. たとえば, $s=1$ の留数は, $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = 2$ であり, $s=2$ の留数は, $\lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = -1$ である.

問 9 つぎの微分方程式をラプラス変換を使って解け.

(1) $y' - y = e^x$ $[y(0) = 1]$

(2) $y'' - 2y' + y = e^x$ $[y(0) = 0, y'(0) = 0]$

(3) $y'' - 4y = \cos 2x$ $[y(0) = 0, y'(0) = 1]$