4　特殊解の求め方２.（微分演算子法）

4.1　２つの重要な公式

特殊解を求めるための比較的便利な方法がある．それは**微分演算子法**と言われる．$\dfrac{d}{dx}$ を D と書いて**演算子**という．

$y = y(x)$ を n 回微分可能な関数としよう．Dy は y を 1 回微分することであり, $D^2y = D(Dy)$ は y を 2 回微分することである．$\dfrac{1}{D}y$ と書いたら, y を積分することとする．つまり

$$\frac{1}{D} = \int y(x)dx$$

とする．$\dfrac{1}{D}$ を**逆演算子**という．

定数係数線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = F(x)$$

は演算子 $f(D) = D^2 + aD + b$ を用いて,

$$f(D)y = F(x)$$

と書き直せる．一般に $f(D)$ には線形性

$$f(D)(ay_1 + by_2) = af(D)y_1 + bf(D)y_2,$$

が成り立つ．ここで a, b は定数である．この微分方程式の特殊解を求めることは,

$$y_1 = \frac{1}{f(D)}F(x)$$

を知ることである．重要な性質（公式）は以下の２つである．

［**公式**］

(1)　$$\frac{1}{D}e^{\alpha x} = \frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x} \quad (f(\alpha) \neq 0)$$

(2)　$$\frac{1}{f(D)}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}e^{-\alpha x}F(x)$$

公式の証明 (1) $f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}$ であることをみよう．$De^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$, $D^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x}$, $\cdots$,

$$D^n e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x}, \cdots$$

が成り立つことは明らかである． よって $f(D)$ の線形性から，$f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}$ がいえる．$f(\alpha) \neq 0$ なので, (1) が証明される．

(2) $f(D)[e^{\alpha x}F(x)] = e^{\alpha x}f(D+\alpha)F(x)$ であることをみよう．

$$D[e^{\alpha x}F(x)] = \alpha e^{\alpha x}F(x) + e^{\alpha x}DF(x) = e^{\alpha x}(D+\alpha)F(x),$$

$$\begin{array}{rcl} D^2[e^{\alpha x}F(x)] & = & D[D[\alpha x F(x)]] = D[e^{\alpha x}(D+\alpha)F(x)] \\ & = & e^{\alpha x}(D+\alpha)(D+\alpha)F(x) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^2 F(x) \\ \cdots & & \cdots \\ D^n[e^{\alpha x}F(x)] & = & e^{\alpha x}(D+\alpha)^n F(x) \\ \cdots & & \cdots \end{array}$$

よって $f(D)$ の線形性から, $f(D)[e^{\alpha x}F(x)] = e^{\alpha x}f(D+\alpha)F(x)$ がいえる．これより,

$$f(D)\{e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}[e^{-\alpha x}F(x)]\} = e^{\alpha x}f(D+\alpha)\frac{1}{f(D+\alpha)}[e^{-\alpha x}F(x)]$$

$$= e^{\alpha x}e^{-\alpha x}F(x) = F(x).$$

ゆえに,

$$\frac{1}{f(D)}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{D+\alpha}[e^{-\alpha x}F(x)].$$

(証明終)

4.2 公式の使い方

$$y'' + y' + 1 = e^{3x}$$

の特殊解を求めよう．公式 (1) を利用すると

$$y_1 = \frac{1}{D^2+D+1}e^{3x} = \frac{1}{9+3+1}e^{3x} = \frac{1}{13}e^{3x}$$

となる．

次に

$$y' - 5y = xe^{5x}$$

の特殊解を求めよう．$f(D) = D^2 - 5$ とすると，$f(5) = 0$ なので，公式 (1) は使えない．公式 (2) を利用すると

$$y_1 = \frac{1}{D-5}[xe^{5x}] = e^{5x}\frac{1}{(D+5)-5}[e^{-5x}xe^{5x}] = e^{5x}\frac{1}{D}x = e^{5x}(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2e^{5x}$$

となる．

4.3 その他の公式

オイラーの公式を利用すると次のことが成り立つ．

［**注意**］

$\frac{1}{D}[ke^{i\alpha x}] = \eta(x) + i\zeta(x)$ ならば，

$\frac{1}{D}[k\cos ax] = \eta(x), \qquad \frac{1}{D}[k\sin ax] = \zeta(x)$

これを利用して次の微分方程式の特殊解を求めよう．

$$y'' - y' + y = \cos 2x$$

解答

$$\frac{1}{D^2 - D - 1}e^{2ix}$$

を計算する．

$$\frac{1}{D^2-D-1}e^{2ix}\frac{1}{(2i)^2-2i+1}e^{2ix} = \frac{1}{-3-2i}e^{2ix} = \frac{-3+2i}{11}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= \frac{-3}{11}\cos 2x + \frac{-2}{11}\sin 2x + i(\frac{2}{11}\cos 2x + \frac{-3}{11}\sin 2x).$$

よって特殊解は

$$y_1 = \frac{-3}{11}\cos 2x + \frac{-2}{11}\sin 2x.$$

(解答終)

次の公式は証明しないが感覚的には $(1-aD)(1+aD+a^2D^2+a^3D^3+\cdots) = 1$ という意味である.

> ［**展開公式**］
>
> $$\frac{1}{1-aD} = 1 + aD + a^2D^2 + a^3D^3 + \cdots$$

$$y'' - 2y' - 3y = x + 1$$

の特殊解を求めよう.

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{D^2 - 2D - 3} = \frac{1}{(D+1)(D-3)}[x+1] \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+D}\frac{1}{1-\frac{1}{3}D}[x+1] \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+D}(1 + \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9} + \cdots)[x+1] \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+D}(x + 1 + \frac{1}{3}D[x+1] + \frac{1}{9}D^2[x+1]) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+D}(x + 1 + \frac{1}{3}) \\
&= -\frac{1}{3}(1 - D + D^2 - \cdots)[x + \frac{4}{3}] \\
&= -\frac{1}{3}(x + \frac{4}{3} - 1) \\
&= -\frac{1}{3}(x + \frac{1}{3}).
\end{aligned}$$

よって $y_1 = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9}$ である.

問 7　*(1)* $y'' - 6y' + 8y = e^x$ の特殊解を求めよ.

(2) $y'' - 2y' + y = xe^x$ の特殊解を求めよ.

(3) $y'' - 4y = \sin 2x$ の特殊解を求めよ.

(4) $y'' + 4y' + 3y = 3x^2 + 2x$ の特殊解を求めよ.

(5) $y'' - 6y' + 8y = e^x$ $(y(0) = -1, y'(0) = 1)$ を解け.

(6) $y'' + 4y' + 3y = 3x^2 + 2x$ $(y(0) = -2, y'(0) = 1)$ を解け.