

### 3 特殊解の求め方 1.

今度は

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

というタイプの方程式を解く. ここで  $p, q$  はある数で,  $R(x)$  は  $X$  の微分可能な関数である.

線形代数の理論を使えば, これを解くには,

(1) まず,  $y'' + py' + qy = 0$  の解を求め, それを同次解  $y_0$  とせよ.

↓

(2) 次に,  $y'' + py' + qy = R(x)$  の解を 1 つだけ何らかの方法で見つけて来い. この解を特殊解  $y_1$  とせよ.

↓

(3)  $y'' + py' + qy = R(x)$  の (一般) 解  $y$  は同次解  $y_0$  と特殊解  $y_1$  の和で表すことができる. すなわち,  $y = y_0 + y_1$  である.

今述べたことは, 線形代数の理論などと大げさなことをいわなくても, 実際に  $y_0 + y_1$  が解かどうかくらいはすぐ確かめることができる.  $y = y_0 + y_1$  ならば,  $y' = y'_0 + y'_1$ ,  $y'' = y''_0 + y''_1$  なので,

$$y'' + py' + qy = (y''_0 + py'_0 + qy_0) + (y''_1 + py'_1 + qy_1)$$

であり,  $y''_0 + py'_0 + qy_0 = 0$  で  $y''_1 + py'_1 + qy_1 = R(x)$  なのだから,  $y'' + py' + qy = R(x)$  である.

### 3.1 未定係数法

では実際にどのようにして, 特殊解をみつけばよいのだろう. 比較的わかり易い方法が, **未定係数法**である. 例で説明していこう.

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 4x + 3$$

の特殊解を未定係数法で解こう. そのために,

左辺の多項式の次数が 2 であることから特殊解の次数も 2 と考えられるので, 特殊解を仮に  $y_1 = Ax^2 + Bx + C$  とおく.

↓

$y_1$  は  $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = 2x^2 + 4x + 3$  をみたすのだから  $y_1 = Ax^2 + Bx + C$  を代入する.

↓

$x^2$ ,  $x$ , と定数項の係数を比較してみることで,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  は決定される.

実際にやってみよう.  $y_1 = Ax^2 + Bx + C$  より  $y_1' = 2Ax + B$ ,  $y_1'' = 2A$  である. よって

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 4x + 3.$$

整理して

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = 2x^2 + 4x + 3$$

を得る. 係数を比較して,

$$A = 1, B = -1, C = 2$$

となる． よって特殊解は，

$$y_1 = x^2 - x + 2$$

であることがわかる．

同次解は， $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2}$  なので，一般解は

$$y = y_0 + y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2} + x^2 - x + 2$$

である．

問 4  $y'' - 6y' + 8y = x^2 + x + 1$  の同次解と特殊解を求めよ．

$$y'' + 3y' + 2y = 3 \sin 2x$$

の特殊解を未定係数法で解こう． この場合は， $\sin$  を微分すると  $\cos$  になることを考慮して，

特殊解を仮に  $y_1 = A \sin 2x + B \cos 2x$  とおく．

↓

$y_1$  は  $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = 3 \sin 2x$  をみたすのだから  
 $y_1 = A \sin 2x + B \cos 2x$  を代入する．

↓

$\sin 2x$ ,  $\cos 2x$  の係数を比較してみると， $A$ ,  $B$  は決定される．

実際にやってみよう．  $y_1 = A \sin 2x + B \cos 2x$  より  $y_1' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$ ,  $y_1'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$  である． よって

$$(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) + 3(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) + 2(A \sin 2x + B \cos 2x) = 3 \sin 2x.$$

整理して

$$(-2A - 6B) \sin 2x + (-4A + 8B) \cos 2x = 3 \sin 2x$$

を得る．係数を比較して，

$$A = -\frac{3}{5}, \quad B = -\frac{3}{10}$$

となる．よって特殊解は，

$$y_1 = -\frac{3}{5} \sin 2x - \frac{3}{10} \cos 2x$$

であることがわかる．

一般解は

$$y = y_0 + y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2} - \frac{3}{5} \sin 2x - \frac{3}{10} \cos 2x$$

である．

**問 5**  $y'' - 6y' + 8y = 2 \cos x$  の同次解と特殊解を求めよ．

$$y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$$

の特殊解を未定係数法で解こう．この場合は，

特殊解を仮に  $y_1 = Ae^{3x}$  とおく．

↓

$y_1$  は  $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = e^{3x}$  をみたすのだから  
 $y_1 = Ae^{3x}$  を代入する．

↓

$e^{3x}$  の係数を比較してみると， $A$  は決定される．

実際にやってみよう.  $y_1 = Ae^{3x}$  より  $y_1' = 3Ae^{3x}$ ,  $y_1'' = 9Ae^{3x}$  である.  
よって

$$9Ae^{3x} + 3(Ae^{3x}) + 2(Ae^{3x}) = e^{3x}.$$

整理して

$$14Ae^{3x} = e^{3x}$$

を得る. 係数を比較して,

$$A = \frac{1}{14}$$

となる. よって特殊解は,

$$y_1 = \frac{1}{14}e^{3x}$$

であることがわかる.

一般解は

$$y = y_0 + y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{-2} + \frac{1}{14}e^{3x}$$

である.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

の特殊解を未定係数法で解こう. この場合は, 同次解の 1 つに  $e^{-x}$  があるので, 特殊解を  $y_1 = Ae^{-x}$  とおくわけにはいかない. その場合は次のようにおいてみる.

特殊解を仮に  $y_1 = Axe^{-x}$  とおく.

↓

$y_1$  は  $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = e^{-x}$  をみたすのだから  
 $y_1 = Axe^{-x}$  を代入する.

↓

$e^{-x}$  の係数を比較してみると,  $A$  は決定される.

実際にやってみよう.  $y_1 = Axe^{-x}$  より  $y_1' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$ ,  $y_1'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$  である. よって

$$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) + 2(Axe^{-x}) = e^{-x}.$$

整理して

$$Ae^{-x} = e^{-x}$$

を得る. 係数を比較して,

$$A = 1$$

となる. よって特殊解は,

$$y_1 = xe^{-x}$$

であることがわかる.

一般解は

$$y = y_0 + y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{-2} + xe^{-x}$$

である.

**注意 !!**  $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}$  の同次解の 1 つが  $e^{\alpha x}$  だったとする. この場合は上に述べたように, 特殊解を  $y_1 = Axe^{\alpha x}$  とおくのだが, これではうまくいかない場合もある. つまり,  $y_1 = Axe^{\alpha}$  を与えられた微分方程式に代入した際に,  $xe^{\alpha}$  の係数が消えなかった場合である. このときは, 特殊解を  $y_1 = Ax^2e^{\alpha x}$  において再トライしてみる.

**問 6** (1)  $y'' - 6y' + 8y = e^x$  の同次解と特殊解を求めよ.

(2)  $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$  の同次解と特殊解を求めよ.

(3)  $y'' - 2y' + y = xe^x$  の同次解と特殊解を求めよ.

(4)  $y'' - 6y' + 8y = e^x$  ( $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ) の同次解と特殊解を求めよ.

(5)  $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$  ( $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ) の同次解と特殊解を求めよ.