

2 線形微分方程式

2.1 定義

微分方程式に含まれている未知関数 $y = y(x)$ の導関数のうちで n 階導関数 $y^{(n)}$ が最も微分の階数が高いものであれば、この微分方程式を n 階微分方程式という。例えば

$$y' - 5y + 3x = 0, \quad y'' - 3(y')^2 + y = x^2 + 1, \quad y''' + 3y'' + 2y' - y = \tan x$$

はそれぞれ、1 階、2 階、3 階微分方程式である。特に、 $y' - 5y + 3x = 0$, $y''' + 3y'' + 2y' - y = \tan x$ の微分方程式は線形といわれる。つまり、未知関数 y とその導関数 y' , y'' , y''' , $\dots$ について 1 次方程式であるものを、線形微分方程式と呼んでいる。

線形とは何かということをもう少し詳しく述べよう。

線形とは直線的という意味である。 $y(x) = x$ は直線を表す代表的なものである。 $x = x_1 + x_2$ としてみよう。すると、 $y(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = y(x_1) + y(x_2)$ と括弧の中の和が外にでて 2 つの和に別れる。また、 $x = ax_1$ (a は定数) とすると、 $y(ax_1) = ax_1 = ay(x_1)$ と括弧の中にあつた定数が外にでる。

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ とある数 a について、微分 $\frac{d}{dx}$ は、

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}, \quad \frac{d(af)}{dx} = a \frac{df}{dx}$$

という性質をもつ。このように和が和に分かれて、数が前に出るという性質を線形とよんでいる。さらに、2 階微分 $\frac{d^2}{dx^2}$ も、

$$\frac{d^2(f+g)}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2g}{dx^2}, \quad \frac{d^2(af)}{dx^2} = a \frac{d^2f}{dx^2}$$

というように線形である。これは一般に n 階微分しても同じである。

さらに、 α, β を数として、 $(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta)$ を

$$(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta)f := \frac{d^2f}{dx^2} + \alpha \frac{df}{dx} + \beta f$$

と定義すれば,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right)(f+g) &= \frac{d^2(f+g)}{dx^2} + \frac{d(f+g)}{dx} \\
 &= \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 g}{dx^2} + \alpha \frac{df}{dx} + \alpha \frac{dg}{dx} + \beta(f+g) \\
 &= \frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha \frac{df}{dx} + \beta f + \frac{d^2 g}{dx^2} + \alpha \frac{dg}{dx} + \beta g \\
 &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right)f + \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right)g, \\
 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right)(af) &= \frac{d^2(af)}{dx^2} + \alpha \frac{d(af)}{dx} + \beta(af) \\
 &= a \frac{d^2 f}{dx^2} + a\alpha \frac{df}{dx} + a\beta f \\
 &= a\left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right)f
 \end{aligned}$$

なので, $\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta y$ も線形であることがわかる. このことから, a, b を数, $R(x)$ を x の連続関数としたとき,

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = R(x)$$

を 2 階の定数係数線形微分方程式という. 一般に a_i ($i = 0, \dots, n$) を数としたとき,

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = R(x)$$

を n 階の定数係数線形微分方程式という.

2.2 2 階の定数係数線形微分方程式の解法

2 階の定数係数微分方程式の最も簡単な形は $R(x) = 0$ の場合である. $R(x) = 0$ のとき, 同次形という. 例で説明しよう. (定数係数) 2 階の定数係数線形微分方程式の同次形

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

を考える. この微分方程式の解法は次のように行う.

(1). $t^2 - 5t + 6 = 0$ を考えると, $t = 2, 3$ である.

↓

(2). よって微分方程式の解は, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ である.
ここで, c_1, c_2 は何らかの定数である.

解に定数 c_1, c_2 が出てくるのは, 変数分離形で考えたときと同じで, 初期値を決めないかぎり, 1つの値に決定することは出来ない. だからこうやってただ漠然と書いている. ところで, $t^2 - 5t + 6$ の代数方程式のことを, **特性方程式** と呼んでいる.

さて, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ は本当に上の微分方程式の解になっているのかチェックしよう.

$$\frac{dy}{dx} = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x}$$

なので,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} - 5(2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}) + 6(c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}) = 0.$$

確かに解である.

たいていの場合はこれで良いのだが, $y'' - 4y' + 4y = 0$ * のような微分方程式は上のようにはいかない. なぜかといえば, その特性方程式に問題がある. つまり特性方程式 $t^2 - 4t + 4 = 0$ を解くと, その解が重根 $t = 2$ になっているのである. そうすると, $y = ce^{2x}$ というなんだか寂しい感じがする.

実は2階の微分方程式が与えられたとき, その解の集合は**ベクトル空間として2次元である**ということが知られている. 解空間が2次元であるから基底が2つある. 最初の微分方程式 $y'' - 5y' + 6 = 0$ の場合は, 解空間の基底が e^{2x}, e^{3x} だったのである.

* y' や y'' は微分の簡略記号である. $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

結論をいえば, $y'' - 4y' + 4y = 0$ の場合は, 基底が e^{2x} と xe^{2x} である. だからこの微分方程式の解は,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

となる.

本当に, xe^{2x} は解になっているのだろうか. チェックしてみよう.

$$y = xe^{2x}, \quad y' = e^{2x} + 2xe^{2x}, \quad y'' = 4e^{2x} + 4xe^{2x}$$

なので, $y'' - 4y' + 4y$ に代入してみると,

$$(4e^{2x} + 4xe^{2x}) - 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 4xe^{2x} = 0.$$

確かに解である.

一般に 2 階線形微分方程式の同次形

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - p \frac{dy}{dx} + qy = 0$$

が与えられたとき, その解法を整理してみよう.

先ず以下の代数方程式を考える.

$$t^2 + pt + q = 0, \\ \text{これを特性方程式という.}$$

↓

特性方程式の解が, $t = \alpha, \beta$ とする.

↓

(1) もし, $\alpha \neq \beta$ ならば, 解は, $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$ である.

↓

(2) もし, $\alpha = \beta$ (重根) ならば, 解は, $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\beta x}$ である.

しかし (1) のケースには不愉快な場合があることに気が付くはずだ. それは, $\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$ と虚数解になるときである. 素直に解をかけば,

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}$$

である. 少し整理すると,

$$y = e^a (c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx})$$

である. ここで, オイラーの公式を考えよう.

オイラーの公式

$$\sin(bx) = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}, \quad \cos(bx) = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$$

である. オイラーの公式は, $\sin(bx)$, $\cos(bx)$ と e^{ibx} , e^{-ibx} のマクローリン展開[†]を考えれば正しいことはすぐ確かめられる.

オイラーの公式によって,

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx), \quad e^{-ibx} = \cos(bx) - i \sin(bx)$$

を得るので,

$$y = e^a (c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) = e^a \{(c_1 + c_2) \cos(bx) + i(c_1 - c_2) \sin(bx)\}$$

となる. $(c_1 + c_2) = A$, $i(c_1 - c_2) = B$ とおけば, 次のような結論を得ることができる.

(3) $\alpha = a + ib$, $\beta = a - ib$ のとき, 微分方程式の解は,
 $y = e^{ax} \{A \cos(bx) + B \sin(bx)\}$

[†]複素関数のマクローリン展開はまだ習っていないかもしれないが, あまり気にしないで, 実数の場合と同じようにやってみよう.

一般の定数係数 n 階微分方程式もその特性方程式を考えれば原理的にはよい。しかし次数が大きい特性方程式を解くことは難しい問題でもある。

問 2 次の定数係数線形微分方程式を解け。

$$(1) \quad y' + 2y = 0$$

$$(2) \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$(3) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$(4) \quad y'' + y' + y = 0$$

2.3 初期条件付き方程式の解法

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (y(0) = 0, y'(0) = 1)$$

というのが初期条件付きの微分方程式である。括弧内の $y(0) = 0, y'(0) = 1$ が初期条件といわれるものである。つまり、 $x = 0$ のとき、 $y = 0, y' = 1$ を出発点とする解の曲線を求めよということである。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

の解は、

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

であつた。この c_1, c_2 は積分したときでてくる積分定数であり、 c_1, c_2 の値が定まれば、 $y = y(x)$ の曲線が定まるのである。 c_1, c_2 の値を決定するために初期条件は与えられる。

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ を微分すると、

$$y = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$$

を得る。初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ なので、

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad y'(0) = 2c_1 + 3c_2 = 1$$

を得る。これより、 $c_1 = -1, c_2 = 1$ を得る。したがって与えられた初期条件付きの微分方程式の解は、

$$y = -e^{2x} + e^{3x}$$

となる。

問 3 次の初期条件付き定数係数線形微分方程式を解け.

(1) $y' + 2y = 0$ ($y(0) = 2$)

(2) $y'' + 3y' + 2y = 0$ ($y(0) = 0, y'(0) = 2$)

(3) $y'' + 4y' + 4y = 0$ ($y(0) = 0, y'(0) = 2$)