

問題 6-8 「虹が見える角度のモデル」

【解答】 C

【解説】 この問題の鍵は、文章中の「偏角の変化が極めて小さくなる」「光が強く集まる」という記述を、どの数学的概念が表しているかを理解することである。ある関数の「変化が極めて小さくなる」点、あるいは「変化が止まる」点は、その関数の極値（極大値または極小値）に対応する。関数 $y = f(x)$ の極値を求めるための基本的な方法は、その導関数 $\frac{dy}{dx}$ を 0 とおくことである。導関数は関数の変化率（傾き）を表しており、その値が 0 になる点が、元の関数の傾きが水平になる点、すなわち極値の候補となる。この問題では、偏角 $D(\theta)$ の変化が最も小さくなる点を探しているので、 $D(\theta)$ を入射角 θ で微分した導関数 $\frac{dD}{d\theta}$ が 0 になる点を探せばよいことになる。この計算を実際に行うと、主虹（はっきりと見える内側の虹）の場合、この条件を満たす偏角が約 138° であることがわかる。これは太陽と反対側を向いたときの角度であり、観測者から見える虹の角度（視半径）としては $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$ となる。これが有名な「虹の 42 度」の正体である。

ちなみに、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} D(\theta) d\theta$ は偏角 D を全入射角にわたって積分（合計）する操作であり、光が集中する「特定の角度」を見つけることには繋がらない。 $D(\theta) = 0$ は偏角が 0、つまり光の進行方向が全く変わらない入射角を探す操作であり、水滴による屈折と反射を考えると、これは物理的にあり得ない。 $D(\theta) = k\theta$ は偏角と入射角が単純な比例関係にあるという、非常に単純化されたモデルであるが、実際の光の屈折や反射はサイン（sin）を含む複雑な関係であり、線形ではない。 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} D(\theta)$ は入射角が $\frac{\pi}{2}$ （水滴の縁にギリギリ当たる光）という、ある特定の極端なケースでの偏角を求める操作であり、虹が形成されるメカニズムである「多くの光が特定の角度に集中する」という現象全体を説明するものではない。