ポアソン分布を理解する

１．ポアソン分布の使い方

ポアソン分布$P_O(\lambda)$は，求めたい事象の発生確率pが非常に小さくて，統計量nを十分大きくとったとき，$np=\lambda$（一定）で，$n\to\infty$，$p\to 0$が成り立つときに利用できる分布である．より具体的には，単位時間当たりに平均λ回起こる事象において，その事象が単位時間にk回起こる確率を求めるときに利用できる．

１．定数λの設定：$\lambda=np$

２．ポアソン分布$P_O(\lambda)$の確率密度関数$f(k|\lambda)$

$$f(k|\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

３．ポアソン分布$P_O(\lambda)$の平均$E[X]$と分散$V[X]$

$$E[X]=\lambda,\quad V[X]=\lambda$$

【例題１】 ある航空会社の航空事故の発生確率$p=1/100000$である．そして，この航空会社の 1 年間の運行回数は 20000 である．この航空会社が，1 年間に航空機事故が 2 件以上起こる確率を求めよ．

（解答）事故の発生確率$p=1/100000$であることから，ポアソン分布を利用する．$n=20000$におけるポアソン分布$P_O(\lambda)$の平均は，

$$\lambda=np=0.2$$

である．そして，1 年間に事故が 2 件以上の事故が起こる確率は，

$$P(k\geq 2|\lambda=0.2)=1-\{P(k=0|\lambda=0.2)+P(k=1|\lambda=0.2)\}$$
$$=1-\left\{\frac{e^{-0.2}\times 0.2^0}{0!}+\frac{e^{-0.2}\times 0.2^1}{1!}\right\}\sim 0018$$

すなわち，1.8%である．

【問題１】M さんのもとには，１時間当たりに平均 6 通のメールが届く．終業時間残り 30 分の間に１通もメールが届かない確率を求めよ．

【問題２】ある流れ星の観測で，5 分間に平均0.8個の流れ星を観測した．10 分間の観測で流れ星が 1 個以上発生する確率を求めよ．

【問題３】1 ℓ 中のある菌の数が 1500 個である液体から 1 mℓをとって培養したとき，コロニー数が 3 個以上である確率を求めよ．

２．ポアソン分布のグラフ

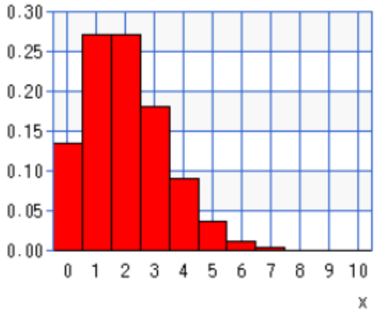
【例題２】ポアソン分布$P_O(2)$の確率密度関数$f(x|\lambda = 2)$は

$$f(x|\lambda = 2) = \frac{e^{-2}2^x}{x!}$$

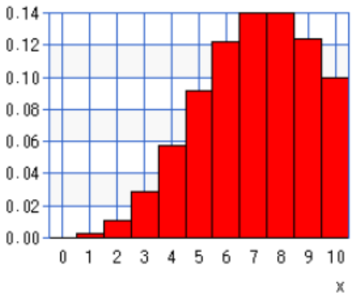
である．この計算結果は以下である．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x\|\lambda = 2)$	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.012	0.003	0.001

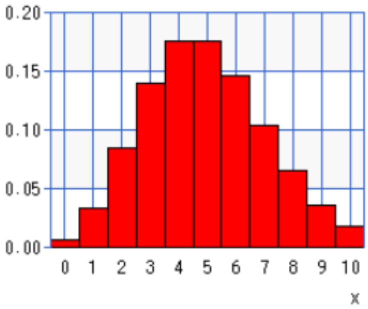
そして，このグラフは，以下のようになる．



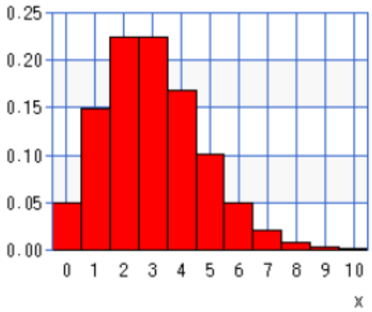
【問題４】以下のグラフの(A)から(F)の中から，ポアソン分布$P_O(5)$と$P_O(7)$のグラフを選べ．



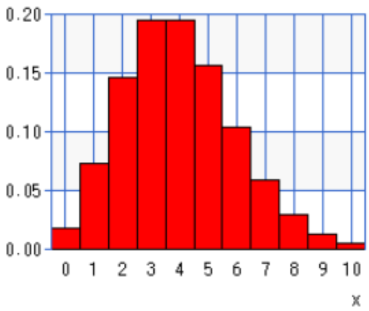
(A)



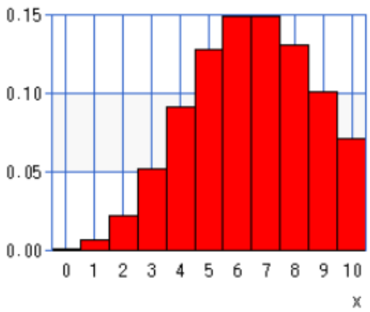
(B)



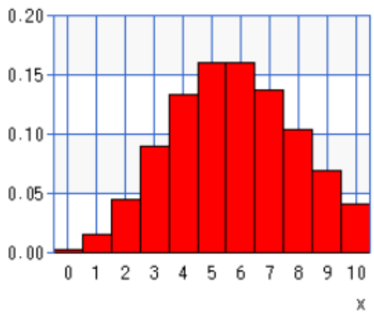
(C)



(D)



(E)



(F)

問題の解答

問題１．$\lambda = 0.5 \times 6 = 3$で，ポアソン分布$P_O(3)$を考える．終業時間残り 30 分の間に 1 通もメールが届かない確率は,

$$P(k=0|\lambda=3) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} \sim 0.05$$

問題２．$\lambda = 2 \times 0.8 = 1.6$で，ポアソン分布$P_O(1.6)$を考える．10 分間の観測で流れ星が 1 個以上発生する確率は,

$$P(k \geq 1|\lambda=1.6) = 1 - P(k=0|\lambda=1.6) \quad = 1 - \frac{e^{-1.6} \times 1.6^0}{0!} \sim 0798$$

問題３．$\lambda = \frac{1}{1000} \times 1500 = 1.5$で，ポアソン分布$P_O(1.5)$を考える．コロニー数が 3 個以上である確率は,

$$P(k \geq 3|\lambda=1.5) = 1 - \{P(k=0|\lambda=1.5) + P(k=1|\lambda=1.5) + P(k=2|\lambda=1.5)\}$$

$$= 1 - \left\{\frac{e^{-1.5} \times 1.5^0}{0!} + \frac{e^{-1.5} \times 1.5^1}{1!} + \frac{e^{-1.5} \times 1.5^2}{2!}\right\} \sim 0191$$

問題４．$P_O(5)$の平均は$E[X] = 5$で,

$$P(k=4|\lambda=5) = \frac{e^{-5} \times 5^4}{4!} \sim 1.75, \quad P(k=5|\lambda=5) = \frac{e^{-5} \times 5^5}{5!} \sim 1.75$$

よって，グラフは(B)である．

$P_O(7)$の平均は$E[X] = 7$で,

$$P(k=6|\lambda=7) = \frac{e^{-7} \times 7^6}{6!} \sim 0.149, \quad P(k=7|\lambda=7) = \frac{e^{-7} \times 7^7}{7!} \sim 1.49$$

よって，グラフは(E)である．