数理・データサイエンス教材案（１次元調和振動子と古典的ハミルトニアン）

2022 年 5 月 19 日

提案者：松田 修

ばねの運動などの単振動に関して，その変位をx，ωを角速度（角振動数），tを時間，Aを定数とすると，

$$x = A \sin \omega t$$

となる．これより，

$$\dot{x} = A\omega \cos \omega t, \qquad \ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

となる．運動方程式$F = m\ddot{x}$より

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

である．以下の図において，mは質点の質量，kはばね定数，xは質点の位置である．

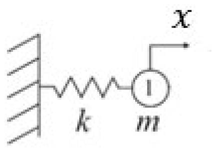


図 1 ばねの運動

単振動の質点に働く力は$F = -kx$なので，$k = m\omega^2$となる．したがって，そのポテンシャルエネルギーUは

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である．

さて，質点がばねの運動などの単振動のような引力（$F = -kx$）を受けて振動する粒子の系を**１次元調和振動子**と呼ぶ.

調和振動子の定義から，運動エネルギーTとポテンシャルエネルギーUは，それぞれ

$$T = \frac{1}{2m}p^2, \qquad U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である．ここで，$p = m\dot{x}$で運動量である．

$$H = T + U = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

を，**古典的ハミルトニアン**と呼ぶ.

以下，１次元調和振動子について，演習を行う．

問１．Eを定数（エネルギーと呼ぶ）とし，$H=E$を仮定する．すなわち，

$$\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E$$

とする．この式から得られる曲線をxp座標平面で表すと，どのような曲線となるか．また，tが増加するとき点$\big(x(t),p(t)\big)$は曲線の上をどのように動くか.

問２．領域$H\le E$の面積Sを求めよ.

問３．放物線$U(x)=E$となるxを求めよ.

問４．$x_0=-\sqrt{2E/(m\omega^2)}$, $x_1=\sqrt{2E/(m\omega^2)}$とする．このとき

$$2\int_{x_0}^{x_1}p(x)\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)h \tag{A1}$$

となるEを求めよ．ただし，$p(x)\ge 0$とし，hは定数で，**プランク定数**と呼ばれる.

20 世紀前半，ドイツの物理学者マックス・プランクは，黒体に関する光の色と温度の関係の研究から，光のエネルギー（単振動エネルギー）は離散的であるという**量子仮説**を唱えた．この仮説から現在の量子力学が発展したと言われている．以下，

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$$

と考える．ここで，$n=0,1,2,\cdots$は**量子数**と呼ばれ，調和振動子の状態を表すものとして扱われる．E_0は**零点エネルギー**と呼ばれる． さらに，式$(A1)$は，**プランク・ゾンマーフェルトの量子条件**と呼ばれる.

問５．領域$H\le E_{\mathrm{n}}$の面積をS_nとするとき，S_n-S_{n-1}を求めよ.

解答

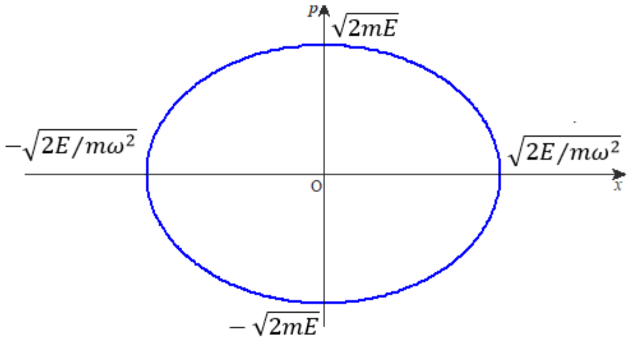
問１． $\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E$を変形すると，

$$\frac{x^2}{2E/m\omega^2}+\frac{p^2}{2mE}=1$$

であるので，これは楕円を表す．また，

$$x=A\sin\omega t\,,p=m\dot{x}=mA\omega\cos\omega t$$

なので，点$\big(x(t),p(t)\big)$は楕円の上を時計回りに動く．



問２．領域$H\leq E$の面積は，楕円の面積なので，

$$S=\pi\sqrt{2E/m\omega^2}\sqrt{2mE}=\frac{2\pi}{\omega}E$$

問３． $\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E$より

$$x=\pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega}}$$

である．

問４． $2\int_{x_0}^{x_1}p(x)\,dx$ は，領域$H\leq E$の面積Sを意味するので，

$$\frac{2\pi}{\omega}E=\left(n+\frac{1}{2}\right)h$$

よって，$\nu=\omega/2\pi$（振動数）なので，

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$$

となる．

問５． $S_n = \dfrac{2\pi}{\omega} E_n = \dfrac{2\pi}{\omega}\left(n+\dfrac{1}{2}\right) h\nu = \left(n+\dfrac{1}{2}\right) h$

したがって，

$$S_n - S_{n-1} = \left(n+\frac{1}{2}\right) h - \left(n-1+\frac{1}{2}\right) h = h$$