数理・データサイエンス教材案（広告の反応モデル）

2022 年 4 月 29 日

提案者：松田 修

問題１．　時間tにおける商品の販売速度$S(t)$に関して，様々なデータをもとに，以下の連立微分方程式が立てられた.

$$(1)\quad \frac{dS}{dt} = -2S$$

Ｑ１．微分方程式(1)の意味を文章で説明せよ.

Ｑ２．微分方程式(1)を解け.

Ｑ３．微分方程式(1)の解を解釈せよ.

問題２．　問題１の続きとして，$A(t)$を時間tにおける広告の普及率，正の定数Mを$S(t)$の想定された極大値とし，以下の連立微分方程式が立てられた.

$$(2)\quad \frac{dS}{dt} = 5A\frac{(M-S)}{M} - 2S$$

Ｑ４．微分方程式(2)の意味を文章で説明せよ.

Ｑ５．$A(t)$を定数A_0とし，さらに$S(0) = 4$としたとき，微分方程式(2)を解け.

Ｑ６．$A_0 = 10, M = 10$のとき，微分方程式(2)の解を解釈せよ.

Q7．$A_0 = 50, M = 10$のとき，微分方程式(2)の解を解釈せよ.

解答

問題１.

Ｑ１. 任意の時刻tにおける商品の販売加速度は，その時刻の販売速度$S(t)$に比例して減少する.

Ｑ２. $\frac{dS}{dt} = -2S \rightarrow \int \frac{1}{S} ds = -2\int dt \rightarrow \log S = -2t + C' \rightarrow S = Ce^{-2t}$ （Cは任意定数）

Ｑ３. 販売速度$S(t)$は時刻tに対し指数関数的に減衰する.

問題２.

Ｑ４. 任意の時刻tにおける商品の販売加速度は，その時刻の販売速度$S(t)$に比例して減少するが, 広告の普及率$A(t)$と$\frac{(M-S)}{M}$の積の効果から販売速度$S(t)$は増加する場合もある. ただし，$S(t) = M$となった時点で，その効果は消える.

Ｑ５. $\frac{dS}{dt} = 5A_0 \frac{(M-S)}{M} - 2S \rightarrow \frac{dS}{dt} + \left(\frac{5A_0}{M} + 2\right)S = 5A_0$ を得る.

$$\frac{dS}{dt} + \left(\frac{5A_0}{M} + 2\right)S = 0 \quad \rightarrow \mathrm{S} = Ce^{-\left(\frac{5A_0}{M}+2\right)t} \text{ である.}$$

特殊解を$S = K$（定数）と置くと，

$$\left(\frac{5A_0}{M} + 2\right)K = 5A_0 \rightarrow K = \frac{5A_0 M}{5A_0 + 2M} \text{ である.}$$

したがって，

$$S = Ce^{-\left(\frac{5A_0}{M}+2\right)t} + K \quad \text{ただし，} K = \frac{5A_0 M}{5A_0 + 2M}$$

$S(0) = 4$より，$4 = C + K \rightarrow C = 4 - K$である．したがって，

$$S = (4-K)e^{-\left(\frac{5A_0}{M}+2\right)t} + K$$

Ｑ６. $A_0 = 10, M = 10$より，$K = \frac{50}{7}$であり，$S = -\frac{22}{7}e^{-7t} + \frac{50}{7}$である．このグラフは，$t = 0$のとき$S = 4$で，単調に増加し，$\lim_{t\to\infty} S = \frac{50}{7} \sim 7.14$である.

Ｑ７. $A_0 = 50, M = 10$より, $K = \frac{250}{27}$であり, $S = -\frac{142}{27}e^{-27t} + \frac{250}{27}$である. このグラフは，$t = 0$のとき$S = 4$で，単調に増加し，$\lim_{t\to\infty} S = \frac{250}{27} \sim 9.26$である.