数理・データサイエンス教材案（消費者行動の数理モデル）

2022 年 4 月 21 日

提案者：松田 修

問題 $x(t), P(t), A(t)$は以下のように定義されている．

$x(t)$：時間tにおける商品Xの販売個数

$P(t)$：時間tにおける商品Xの購入が希望されている個数

$A(t)$を時間tにおける商品Xの広告レベル

$x(t), P(t), A(t)$に関して，以下の連立微分方程式が立てられた．

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = 3(P - \alpha x), \qquad (2)\quad \frac{dP}{dt} = 2(x - \beta P) + A$$

ただし，α, βは正の定数で，$\alpha\beta > 1$とする．

Q１．微分方程式(1)の意味を文章で説明せよ．

Q２．微分方程式(2)の意味を文章で説明せよ．

Q３．微分方程式(1)と(2)から$x(t)$に関する 2 階の定数係数線形微分方程式を立てよ．

Q４．Q３で立てた微分方程式の同次形の補助方程式を文字mを使って求めよ．

Q５．Q４の補助方程式の解には負の解m_1があることを示せ．

Q６．Q４の補助方程式の解のm_1とは異なる解m_2も負となる必要十分条件を求めよ．

Q７．Q３で立てた微分方程式の同次解を求めよ．

Q８．Aを定数A_0とするとき，Q３で立てた微分方程式の特殊解を求めよ．

Q９．Aを定数A_0とするとき，Q３で立てた微分方程式の一般解を求めよ．

Q１０．Q９で求めた解について，$m_2 < 0$のとき，$\lim_{t\to\infty} x(t)$を求めよ．

Q１１．Q９で求めた解について，$m_2 > 0$のとき，$\lim_{t\to\infty} x(t)$を求めよ．.

解答

Q１．任意の時刻tにおける商品Xの販売個数$x(t)$の微小時間dtに対する変化率$dx(t)$は，時間tにおける商品Xの購入が希望されている個数$P(t)$とαxとの差に比例する．

Q２．任意の時刻tにおける商品Xの購入が希望されている個数$P(t)$の微小時間dtに対する変化率$dP(t)$は，時間tにおける商品Xの販売個数$x(t)$とαPの差に加えて広告レベル$A(t)$にも依存する．

Q３． $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}+\alpha x\right)=2\left(x-\frac{\beta}{3}\frac{dx}{dt}-\alpha\beta x\right)+A$より

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(3\alpha+2\beta)\frac{dx}{dt}+6(\alpha\beta-1)x=3A$$

Q４．同次形 $\frac{d^2x}{dt^2}+(3\alpha+2\beta)\frac{dx}{dt}+6(\alpha\beta-1)x=0$ の補助方程式は，

$$m^2+(3\alpha+2\beta)m+6(\alpha\beta-1)=0$$

Q５．解の公式より，

$$m=\frac{-(3\alpha+2\beta)\pm\sqrt{D}}{2},$$

$$D=(3\alpha+2\beta)^2-24(\alpha\beta-1)=(3\alpha-2\beta)^2+24$$

$D>0$ より$m_1=\frac{-(3\alpha+2\beta)-\sqrt{D}}{2}<0.$

Q６． $m_2=\frac{-(3\alpha+2\beta)+\sqrt{D}}{2}<0$ ならば$D<(3\alpha+2\beta)^2$なので，$-24(\alpha\beta-1)<0.$
したがって，$\alpha\beta>1$．逆に$\alpha\beta>1$ならば，$D<(3\alpha+2\beta)^2$なので，$\sqrt{D}<(3\alpha+2\beta)$である．よって，$m_2<0$である．したがって，$m_2<0$であるための必要十分条件は$\alpha\beta>1$である．

Q７． $x=C_1e^{m_1t}+C_2e^{m_2t}$

Q８．特殊解を$x=k$（kは定数）と置くと，$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}=0$より，$6k(\alpha\beta-1)=3A_0$を得る．よって，特殊解は

$$x=k=\frac{A_0}{2(\alpha\beta-1)}.$$

Q９．一般解は，

$$x=C_1e^{m_1t}+C_2e^{m_2t}+\frac{A_0}{2(\alpha\beta-1)}$$

Ｑ１０． $m_1 < 0, m_2 < 0$より$\lim_{t\to\infty}(C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}) = 0$なので,

$$\lim_{n\to\infty} x(t) = \frac{A_0}{2(\alpha\beta - 1)}$$

となる.

Ｑ１１． $m_1 < 0, m_2 > 0$より$\lim_{t\to\infty}(C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}) = \infty$なので,

$$\lim_{n\to\infty} x(t) = \infty$$

となる.