マルコフ連鎖の推移

松田 修

1 マルコフ連鎖の推移

例1 麻疹やインフルエンザ等の感染症では、流行期間中にそのウイルスに人が暴露したとき，確率的に感染した後に発病し，一定の期間を経て治癒して免疫を獲得する．このような感染現象に対する数理モデルを考える．

あるウイルスによる感染症が流行する場合を想定し，簡単のために次のことを仮定する．

(1) ウイルスに免疫の無い人が暴露した場合，次の日に確率0.6で感染する．

(2) 感染している人は次の日に確率0.9で発病する．

(3) 発病している人は確率0.3で次の日に治癒し，ウイルスに対して免疫を獲得する．

(4) 流行期間（ウイルスが存在する期間）は十分長く，現在（0日目）でウイルスは存在している．

(5) 人は毎日必ずウイルスに暴露する．

この数理モデルに関して，感染していなくて免疫の無い状態S_1，感染している状態S_2，発病している状態S_3，治癒し免疫を獲得した状態S_4の4つの状態を考える．さらに，S_1の人がn日目に状態S_kである確率を$p_n(k)$とする．ただし，$p_0(1) = 1, p_0(2) = p_0(3) = p_0(4) = 0$とする．以下の問いに答えよ．

（1）推移行列Pを求めよ．

（2）Pは既約でないことを示せ．

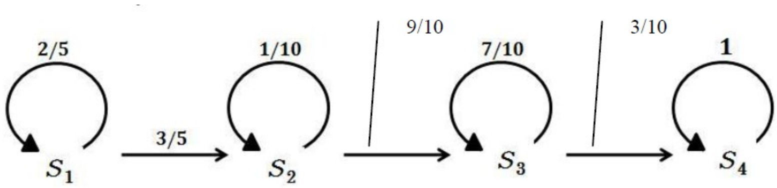
（3）$p_n(1)$を求めよ．

（4）$p_n(2)$を求めよ．

（5）$p_3(3)$を求めよ．

（6）$p_4(4)$を求めよ．

（解答）(1)



$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Pのグラフは強連結でないので既約ではない．

(3)

$$\begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1}(1) & p_{n-1}(2) & p_{n-1}(3) & p_{n-1}(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4p_{n-1}(1) \\ 0.6p_{n-1}(1) + 0.1p_{n-1}(2) \\ 0.9p_{n-1}(2) + 0.7p_{n-1}(3) \\ 0.3p_{n-1}(3) + p_{n-1}(4) \end{pmatrix}$$

よって，　$p_n(1) = 0.4^n$

(4)　$p_n(2) = 0.6p_{n-1}(1) + 0.1p_{n-1}(2)$より

$$p_n(2) = 0.6 \cdot 0.4^{n-1} + 0.1 \cdot p_{n-1}(2)$$

特性方程式は，$\lambda = 0.1$より$p_n(2) = C \cdot 0.1^n$．特殊解を$p_n(2) = A \cdot 0.4^n$と置く．$p_{n-1}(2) = A \cdot 0.4^{n-1}$

よって，

$$A \cdot 0.4^n = 0.6 \cdot 0.4^{n-1} + 0.1A \cdot 0.4^{n-1}$$

$$0.4A = 0.6 + 0.1A$$

$$0.3A = 0.6$$

$$A = 2$$

よって，

$$p_n(2) = C \cdot 0.1^n + 2 \cdot 0.4^n$$

$p_0(2) = 0$より$C = -2$．したがって，

$$p_n(2) = 2 \cdot (-0.1^n + 0.4^n)$$

(5)　$p_n(3) = 0.9p_{n-1}(2) + 0.7p_{n-1}(3)$より

$$p_1(3) = 0.9p_0(2) + 0.7p_0(3) = 0$$

$$p_2(3) = 0.9p_1(2) + 0.7p_1(3) = 0.9 \cdot 2 \cdot \left(-0.1^1 + 0.4^1\right) = 0.54$$

$$p_3(3) = 0.9p_2(2) + 0.7p_2(3) = 0.9 \cdot 2 \cdot \left(-0.1^2 + 0.4^2\right) + 0.7 \cdot 0.54 = 0.648$$

(6)　$p_n(4) = 0.3p_{n-1}(3) + p_{n-1}(4)$より

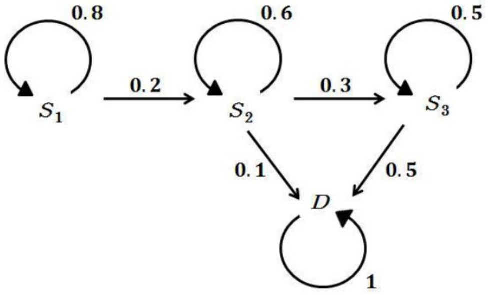
$$p_1(4) = 0.3p_0(3) + p_0(4) = 0$$

$$p_2(4) = 0.3p_1(3) + p_1(4) = 0$$

$$p_3(4) = 0.3p_1(3) + p_1(4) = 0.3 \cdot 0.54 = 0.162$$

$$p_4(4) = 0.3p_3(3) + p_3(4) = 0.3 \cdot 0.648 + 0.162 = 0.3564$$

問1　治療法が無い疾病があり，病状はS_1（初期），S_2（中期），S_3（末期）の３段階がある．また，Dは死亡を表している．この疾病は１年間隔の追跡調査を行い，次の図で示される病状推移が観察されたと仮定する．S_1の人がn日目に状態S_kである確率を$p_n(k)$，ただし，$D = S_4$とする．さらに，$p_0(1) = 1, p_0(2) = p_0(3) = p_0(4) = 0$とする．以下の問いに答えよ．



（１）推移行列Pを求めよ．

（２）Pは既約でないことを示せ．

（３）$p_n(1)$を求めよ．

（４）$p_n(2)$を求めよ．

（５）$p_3(3)$を求めよ．

（６）$p_4(4)$を求めよ．