マルコフ連鎖

１．マルコフ連鎖

マルコフ連鎖とは，確率変数の列$\{X_t\}$について，　X_{t+1}がX_tにのみに依存して得られる式

$$p(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \cdots, X_1) = p(X_{t+1}|X_t)$$

を満たす$\{X_t\}$のことである．

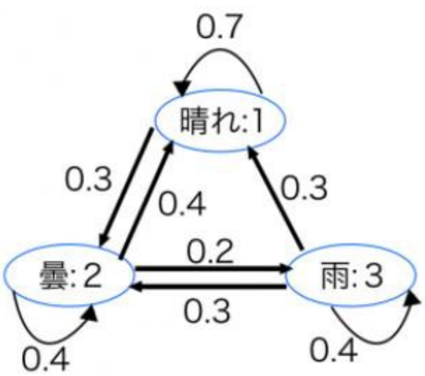
X_tがとりうる値の集合を**状態空間**という．例えば，　S={晴れ，曇り，雨}は，状態空間である．

$p(X_{t+1}|X_t)$を **推移確率**（または **遷移確率**）という 例えば,「今日曇りであるとき，明日晴れになる確率は 0.3 である」というときは,

$$p\left(X_{t+1} = \text{晴れ}\ \ |X_t = \text{曇り}\right) = 0.3$$

となる．

状態空間を頂点で表し，　推移確率を枝で表したグラフを**状態推移図**という．



状態推移図を表に表すと，以下のようになる．

前＼後	晴れ	曇	雨
晴れ	0.7	0.3	0
曇	0.4	0.4	0.2
雨	0.3	0.3	0.4

上の表を行列にしたもの

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

を**推移確率行列**という．

問題１．上の天気に関する推移確率行列Pを用いて，今日雨であったとき，２日後に晴れである確率を求めよ．

２．チャップマン－コルモゴロフ方程式

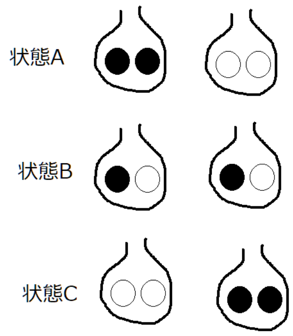
例えば，袋１と袋２があって，その中には２個ずつ計４個の玉が入っている．このうち，２個は黒玉，２個は白玉とする，この状態空間は，

状態 A: 袋１が２個とも黒玉，袋２は２個とも白玉

状態 B: 袋１も袋２も黒玉と白玉が１個ずつ

状態 C: 袋１が２個とも白玉，袋２は２個とも黒玉

である．



ここで，両方の袋から１個ずつ取り出して，その玉を入れ替える操作を行う．この推移確率を考えてみよう． 明らかに，

$$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\ (p=1),\quad \mathrm{C}\to\mathrm{B}\ (p=1)$$

である．さらに

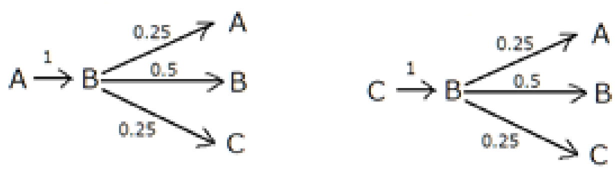
$$\mathrm{B}\to\mathrm{A}\left(p=\frac{1}{4}=0.25\right),\quad \mathrm{B}\to\mathrm{B}\left(p=\frac{1}{2}=0.5\right),\quad \mathrm{B}\to\mathrm{C}\left(p=\frac{1}{4}=0.25\right)$$

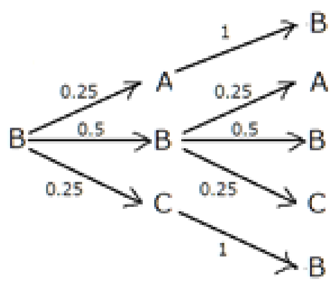
である．したがって，推移確率行列は

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．ここで注意すべきことは，各行の値の和は必ず 1 となることである．

では，この操作を２回行ったらどうなるだろう． 状態推移図は以下となる．





すなわち，$P^{(2)}$をこの操作を２回行った後の推移確率行列とすると，

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0.125 & 0.75 & 0.125\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$$

となる．ところで，

$$P^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0.125 & 0.75 & 0.125\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$$

でもある．したがって，

$$P^{(2)}=P^2$$

を得る．一般に，

$$P^{(n)}=P^n$$

が成り立つ．

以下が，**チャップマン–コルモゴルフ方程式**である．

$$P^{(n+m)}=P^{(n)}P^{(m)}$$

問題２．袋１と袋２があって，その中には３個ずつ計６個の玉が入っている．このうち，２個は黒玉，４個は白玉とする，この状態空間は，

状態 A: 袋１が２個が黒玉，袋２は３個とも白玉

状態 B: 袋１も袋２も１個が黒玉

状態 C: 袋１が３個とも白玉，袋２は２個が黒玉

である．両方の袋から１個ずつ取り出して，その玉を入れ替える操作を行う．

(1) 推移確率行列Pを求めよ．

(2) この操作を２回行った後の推移確率行列$P^{(2)}$を求めよ．

(3) 最初の袋の状態が状態 B であったとき，２回の操作後，状態 C になる確率を求めよ．

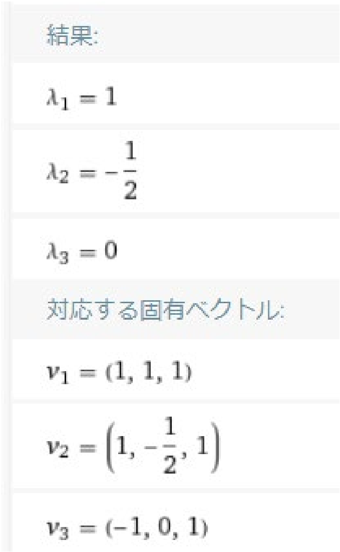
３．マルコフ連鎖の収束値

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

に対して，$P^{(\infty)}$を求めよう．すなわち，上の推移行列をもつマルコフ連鎖を無限回おこなったとき，どのような状態になるかについて調べよう．

そのためには，Pの固有値を調べる必要がある．それは，WolframAlpha というサイトなどを使うと求めることができる．

計算結果は,



である．このことから,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと，線形代数の理論により

$$Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$(Q^{-1}PQ)$をn回掛けると，$(Q^{-1}PQ)(Q^{-1}PQ)\cdots(Q^{-1}PQ) = Q^{-1}P^nQ$であるので,

$$Q^{-1}P^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0.5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

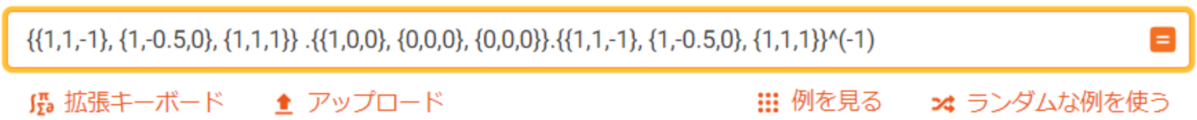
となる．よって,

$$P^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0.5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

したがって,

$$P^\infty = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

となる．



入力:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

結果:

$$\begin{pmatrix} 0.166667 & 0.666667 & 0.166667 \\ 0.166667 & 0.666667 & 0.166667 \\ 0.166667 & 0.666667 & 0.166667 \end{pmatrix}$$

問題３．問題２の推移確率行列Pについて$P^{(\infty)}$を求めよ．

解答

問題１．0.45　問題２．(1) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ (2) $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 7/27 & 16/27 & 4/27 \\ 16/81 & 49/81 & 16/81 \\ 4/27 & 16/27 & 7/27 \end{pmatrix}$ (3) $\frac{16}{81}$　問題３．$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$