ガンマ関数とベータ関数

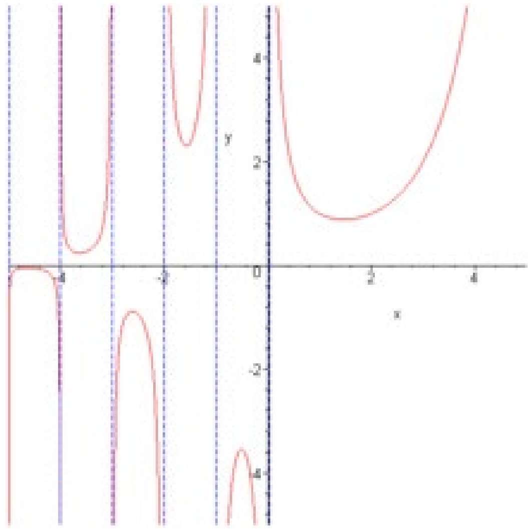
ベイズ推定で必要なガンマ関数とベータ関数を理解しよう．

1　ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (x > 0)$$

を**ガンマ関数**という．

$y = \Gamma(x)$のグラフ



次の定理１は，ガンマ関数が階乗の一般化であることを示すものである．

定理１　$\boldsymbol{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$，特に任意の自然数$\boldsymbol{n}$に対して，$\boldsymbol{\Gamma(n) = (n-1)!}$

（証明）

$$\Gamma(1) = \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}dt = [e^{-t}]_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \left[\frac{t^x}{x}e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^x}{x}(-e^{-t})dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

よって，$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$である．

特に，$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-2) = (n-2)(n-3)\Gamma(n-4) = \cdots = (n-1)\cdots 2\Gamma(1) = (n-1)!$

Q.E.D.

定理２　$\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

（証明）

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$t = u^2$と置くと，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2}(2u) du = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Q.E.D.

例題１　次の値を求めよ.

（１）$\Gamma(5)$　　　（２）$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

［解答］

（１）$\Gamma(5) = 4! = 24$　　　（２）$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

問題１　次の問いに答えよ.

（１）$\frac{\Gamma(n+2)}{n} = (n+1)\Gamma(n)$を証明せよ.　　　（２）$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$の値を求めよ.

２ ベータ関数

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \qquad (a,b>0)$$

を**ベータ関数**という．

以下に，ベータ関数の基本性質を示す定理を列挙する．

定理３ $\boldsymbol{B(a,b)=B(b,a)}$

（証明）$s=1-x$と置くと，

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx=\int_1^0 (1-s)^{a-1}s^{b-1}(-1)\,ds=\int_0^1 s^{b-1}(1-s)^{a-1}\,ds=B(b,a)$$

Q. E. D.

定理４

$$\boldsymbol{B(a,b)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2a-1}\theta\cos^{2b-1}\theta\,d\theta}$$

（証明）$x=\sin^2\theta$と置くと

$$\begin{aligned}B(a,b)&=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{a-1}(1-\sin^2\theta)^{b-1}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\\&=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2\mathrm{a}-1}\theta\cos^{2b-1}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

Q. E. D.

定理５

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

（証明）

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

に対して，$t=s^2$と置くと，

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds$$

これより，

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\left(2\int_0^\infty u^{2a-1}e^{-u^2}du\right)\left(2\int_0^\infty v^{2b-1}e^{-v^2}dv\right)$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2-v^2} u^{2a-1} v^{2b-1} dudv$$

ここで，$u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$と置くと，

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r^{2(a+b)-2} \sin^{2a-1}\theta \cos^{2b-1}\theta\, r dr d\theta$$

$$= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(a+b)-1} dr\right)\left(2\int_0^{2\pi} \sin^{2a-1}\theta \cos^{2b-1}\theta\, d\theta\right) = \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)$$

Q. E. D.

例題２　次の値を答えよ．

（１）$B(2,3)$　　　　（２）$B\left(1,\frac{1}{2}\right)$

［解答］

（１）　$B(2,3) = \frac{B(2)B(3)}{B(5)} = \frac{1\cdot 2}{4!} = \frac{1}{12}$

（２）　$B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 2$

問題２　次の問いに答えよ．

（１）$(n+1)B(n+1-r,\quad 1+\ r) = \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_r}$を証明せよ．

（２）$B\left(2,\frac{1}{2}\right)$の値を求めよ．

練習問題１　次の値を求めよ．

$$(1)\ \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \qquad (2)\ B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

練習問題２　次の定積分の値を求めよ．

$$(1)\ \int_0^1 x^8 (1-x^3)^3 dx \qquad (2)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx$$

ヒント：置換積分からベータ関数の定義式の形にする．

解答　練習問題１　（1）$\frac{105\sqrt{\pi}}{16}$　（2）π　練習問題２　（1）$\frac{1}{180}$　（2）$\frac{8}{3}$