数理・データサイエンス教材案（ブール代数２）

2022 年 6 月 29 日

提案者：松田 修

１．**基本公式**

(1) $A \wedge B = B \wedge A$　(2) $A \vee B = B \vee A$

(3) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (4) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$　(5) $A \wedge (A \vee B) = A$

(6) $A \vee (A \wedge B) = A$　(7) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$,　$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$　（ド・モルガン則）

(8) $A \to B = \overline{A \wedge \bar{B}} = \bar{A} \vee B$（ならばの言い換え）(9) $A \to B = \bar{B} \to \bar{A}$（対偶）

２．**背理法**　$(\bar{A} \to A) = A$

３．**モーダス・ポーネス（Modus ponens）**　① $\{(A \to B) \wedge A\} \to B$,　② $\{(A \to B) \wedge \bar{B}\} \to \bar{A}$

４．**三段論法**　$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

５．**同値**：$A \sim B = (A \to B) \wedge (B \to A)$　このとき $\bar{A} \sim \bar{B}$

５．**述語論理と妥当性（全称と存在と否定）**　① $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$　② $\neg\{\forall x P_x\} = \exists x P_x$,　③ $\neg\{\exists x P_x\} = \forall x P_x$

④ $\neg\{\forall x (P_x \wedge Q_x)\} = \exists x (\overline{P_x} \vee \overline{Q_x})$　⑤ $\neg\{\forall\exists (P_x \vee Q_x)\} = \neg\{\forall x (\overline{P_x} \wedge \bar{Q}_x)\}$ ⑥ $\neg\{\forall x (P_x \to Q_x)\} = \exists x (P_x \wedge \bar{Q}_x)$

６．**論理式のトートロジーでの変形**：⇒

例１（妥当な述語論理）

「すべての車は国産品である」「高級な車が存在する」よって，「高級な国産品が存在する」

〈証明〉P_x：xは車である．Q_x：xは国産品である．R_x：xは高級である．

$$\text{前提} = \forall x \{P_x \to Q_x\} \wedge \exists x \{P_x \wedge R_x\} \Rightarrow \exists \{P_x \to Q_x\} \wedge \exists x \{P_x \wedge R_x\}$$

$$\Rightarrow \exists x \{(P_x \to Q_x) \wedge (P_x \wedge R_x)\} \Rightarrow \exists x \{Q_x \wedge R_x\} = \text{結論}$$

よって，この述語論理は妥当である．

例２（妥当でない述語論理）

「ある人は羽をもつならば空が飛べる」「すべての人が羽をもっているということはない」よって「ある人は空を飛べない」

〈妥当でない証明〉P_x：xは人である．Q_x：xは羽をもつ．R_x：xは空を飛ぶ．

$$\text{前提} = \exists x \{Q_x \to R_x\} \wedge \neg(\forall x Q_x) \Rightarrow \exists x \{Q_x \to R_x\} \wedge \exists x \overline{Q_x} \Rightarrow \exists x \{(Q_x \to R_x) \wedge \overline{Q_x}\} \Rightarrow \exists x \{(\overline{Q_x} \vee R_x) \wedge \overline{Q_x}\}$$

$$\Rightarrow \exists x \{\overline{Q_x}\}$$

これより述語論理は，$\exists x \{\overline{Q_x}\} \to \exists x \{\overline{R_x}\} \Rightarrow \exists x \{\overline{Q_x} \to \overline{R_x}\}$となる．よって妥当でない．

演習

１．以下の論理文がトートロジーとなる結論を①から④に中から全て選べ.

問１．前提：「K は音楽が好きならば絵も好きである」「K は絵が好きではない，または写真が好きである」「K は写真が好きではない」

結論：① K は絵が好き　② K は音楽が好き　③ K は絵が好きでない　④ K は音楽が好きでない

問２．前提：「K が元気で朝走るならば，朝食は白米である」「K の朝食はパンでない，または白米でない」「K は元気である」

結論：① K は朝食がパンでないならば白米である　② K は朝走るならば朝食はパンではない

③ K は元気でないならば朝食はパンである　④ K は朝食がパンならば朝走らない

２．次の述語論理が妥当となる結論を①から④に中から全て選べ.

前提：「点の色が赤色ならば全て光る」「“光っている赤色以外の点が存在する”ということはない「青い点が存在する」

結論：① ある点が青色でないならば光っている　② 光っていない点は全て青色である

③ 光っていない赤色以外の点が存在する　④ 光っていない全ての点は赤色でない

解答

問１ (1) A：音楽が好き，B；絵が好き，C；写真が好き

$$前提 = (A \to B) \land (\bar{B} \lor C) \land \bar{C} \ \Rightarrow (A \to B) \land (B \to C) \land \bar{C} \Rightarrow (A \to B) \land \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$$

よって，④

(2)A：元気である B：朝走る C：朝食は白米 D：朝食はパン

$$前提 = \{(A \land B) \to C\} \land (\bar{D} \lor \bar{C}) \land A \ \Rightarrow \ (D \to \bar{C}) \land \{\bar{C} \to \overline{A \land B}\} \land A \ \Rightarrow \ \{D \to \overline{A \land B}\} \land A$$

$$\Rightarrow \{\bar{D} \lor \overline{A \land B}\} \land A \ \Rightarrow \{\bar{D} \lor \bar{A} \lor \bar{B}\} \land A \ \Rightarrow \{A \to (\bar{B} \lor \bar{D})\} \land A \ \Rightarrow \bar{B} \lor \bar{D} \ \Rightarrow \ B \to \bar{D} \ \mathit{or} \ D \to \bar{B}$$

よって，②と④

問２． $P(x)$：xは点である.　 $Q(x)$：xは赤色 $R(x)$：xは光っている

$$前提 = \forall x\{Q(x) \to R(x)\} \land \neg\left[\exists x\left(Q(x) \land \overline{R(x)}\right)\right] \land \ \exists x \ \overline{Q(x)}$$

$$\Rightarrow \ \forall x\{Q(x) \to R(x)\} \land \forall x \ \overline{\left(Q(x) \land \overline{R(x)}\right)} \land \ \exists x \ \overline{Q(x)}$$

$$\Rightarrow \ \forall x\{Q(x) \to R(x)\} \land \forall x \ \left(\overline{Q(x)} \lor \ R(x)\right) \land \ \exists x \ \overline{Q(x)}$$

$$\Rightarrow \ \forall x\{Q(x) \to R(x)\} \land \forall x \ \left(R(x) \to Q(x)\right) \land \ \exists x \ \overline{Q(x)}$$

$$\Rightarrow \forall x\{Q(x) \sim R(x)\} \land \ \exists x \ \overline{Q(x)} \ \Rightarrow \ \forall x\left\{\overline{Q(x)} \sim \overline{R(x)}\right\} \land \ \exists x \ \overline{Q(x)}$$

よって，③