数理・データサイエンス教材案（ブール代数１）

2022 年 6 月 29 日

提案者：松田 修

１．基本公式

(1) $A \wedge B = B \wedge A$ (2) $A \vee B = B \vee A$

(3) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (4) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (5) $A \wedge (A \vee B) = A$

(6) $A \vee (A \wedge B) = A$ (7) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$, $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ （ド・モルガン則）

(8) $A \to B = \overline{A \wedge \bar{B}} = \bar{A} \vee B$（ならばの言い換え） (9) $A \to B = \bar{B} \to \bar{A}$（対偶）

２．背理法

$(\bar{A} \to A) = A$

A	$\bar{A}$	$\bar{A} \to A$
1	0	1
0	1	0

３．モーダス・ポーネス（Modus ponens）

① $\{(A \to B) \wedge A\} \to B$, ② $\{(A \to B) \wedge \bar{B}\} \to \bar{A}$

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A$	$\{(A \to B) \wedge A\} \to B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

４．三段論法

$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

（例１）以下の論理はトートロジーであることを証明せよ．（推論は⇒で繋ぐ）
「今日が火曜日なら，私は働きに行く」「今日は働かない」したがって，「今日は，火曜日でない」
（解答）T：火曜日である．W：働きに行く．

$$前提=(T\to W)\wedge\bar{W}\Rightarrow\bar{T}=結論$$

よって，モーダス・ポーネスよりトートロジーである．

（例２）以下の論理はトートロジーであることを証明せよ．（推論は⇒で繋ぐ）
「今日晴れているならば，私はテニスをする」「勉強するなら，私はテニスをしない」「私の気分が良ければその日は晴れている」「私の気分が悪いと，私は勉強しない」よって，「私は，今日，勉強しない」
（解答）S：晴れている．T：テニスをする．G：勉強する．M：気分が良い．

$$前提=(S\to T)\wedge(G\to\bar{T})\wedge(M\to S)\wedge(\bar{M}\to\bar{G})\Rightarrow(S\to T)\wedge(G\to\bar{T})\wedge(M\to S)\wedge(G\to M)$$

$$\Rightarrow(S\to T)\wedge(G\to\bar{T})\wedge(G\to M)\wedge(M\to S)\Rightarrow(G\to S)\wedge(S\to T)\wedge(G\to\bar{T})\Rightarrow(G\to T)\wedge(G\to\bar{T})$$

$\Rightarrow(G\to T)\wedge(T\to\bar{G})\Rightarrow(G\to\bar{G})\Rightarrow\bar{G}=$ 結論　　よって，（背理法より）トートロジーである．

演習
　以下の文章はトートロジーかそうでないか判断せよ．
(1) ルナは犯人か恋人である．したがって，ルナが犯人でないならばルナは恋人である．

(2) ルナは犯人でないか恋人である．ルナは恋人である．したがって，ルナは犯人である．

(3)「円安になり，株価が上昇すれば，景気は回復する」「株価は上昇したが，景気は回復していない」したがって，「円安になっていない」

解答

(1) A：ルナは犯人，B；ルナは恋人　前提$=A\vee B\Rightarrow(\bar{A}\to B)=$結論　　よって，トートロジー．

(2) A：ルナは犯人，B；ルナは恋人　$(\bar{A}\vee B)\wedge B\Rightarrow B\neq$ 結論 $=A$　　よって，トートロジーでない．

(3) A：円安である，B；株価が上昇する．C：景気が回復する．

$$\{(A\wedge B)\to C\}\wedge(B\wedge\bar{C})\Rightarrow[\{(A\wedge B)\to C\}\wedge\bar{C}]\wedge B\Rightarrow\overline{A\wedge B}\wedge B\Rightarrow(\bar{A}\vee\bar{B})\wedge B\Rightarrow(A\to\bar{B})\wedge B\Rightarrow\bar{A}=結論$$

よって，トートロジー．