ロケットの状態空間モデル

１．　状態空間モデルとは

状態空間モデルとは，**状態モデル**と**観測モデル**で構成されたものである．たとえば，ある森の中にいるシカの生息頭数のモデルが，状態モデルであり，その森で毎日観測されるシカの頭数のモデルが，観測モデルである．より具体的には，x_tを時間tにおけるシカの生息頭数とし，

$$x_t = f_t(x_{t-1}) + v_t$$

という漸化式が状態モデルである．ここで，v_tは**状態ノイズ**と呼ばる．　そしてy_tを時刻tにおけるシカの観測した頭数とし，y_tとx_tを関係付ける

$$y_t = g_t(x_t) + w_t$$

という式が観測モデルである．ここで，w_tは**観測ノイズ**と呼ばる．

表１

時刻 t	1	2	3	4	5
状態データ x_t	33	35	30	38	42
観測データ y_t	4	4	3	5	6

例えば，上のようなデータに関して，a, bを定数とした以下のような式が，シカの状態空間モデルの簡単な例である．

$$x_t = ax_{t-1} + v_t, \qquad y_t = bx_t + w_t$$

特にw_tも定数なら，$y_t = bx_t + w_t$は，直線の式となる

観測データy_tから，状態データx_tをどのように予想するかが，状態空間モデルのテーマである．

問題１．y_tに対するx_tの回帰直線$y_t = ax_t + b$と相関係数rを求めよ．

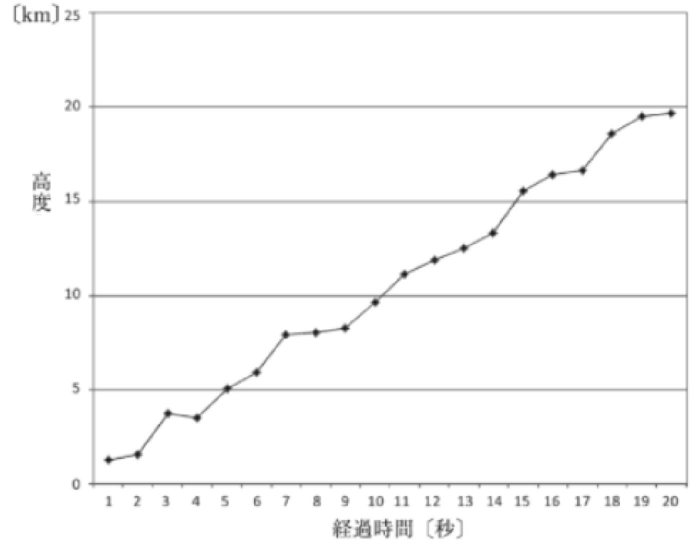
２．ロケットの観測方程式と状態方程式

ロケットの高度に関する簡単な状態空間モデルを説明する．

表２

経過データ[秒]t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
高度データ[km]y_t	1.27	1.58	3.71	3.51	5.07	5.91	7.92	8.02	8.24	9.63

経過データ[秒]t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
高度データ[km]y_t	11.13	11.88	12.54	13.32	15.58	16.40	16.63	18.60	19.50	19.69



高度データ[km]y_tのグラフがギザギザであるのは，高度センサーの精度がロケットの上昇速度に追いつかず，計測結果に大きなばらつきが出てしまっているからである．

高度センサーのデータを，うまく補正する必要がある．もっとも簡単な観測方程式は以下のように定義される．

観測方程式：xをロケットの確率推定高度とし，

$$y = ax + v$$

yは観測値，xはガウス分布$N(\mu, \sigma^2)$に確率的に従うものとし，μを推定高度とする．そして，aはxの増幅率という定数である．さらに，vはノイズ項で$N(0, \tau^2)$に確率的に従うものとする．

特に，$a = 1$のときの観測方程式は$y = x + v$となるが，これは，確率推定高度xと観測値yの誤差vが$N(0, \tau^2)$程度であることを意味する．

xの時間変化に伴う状態方程式を以下のように定義する．

状態方程式：

$$x_t = bx_{t-1} + cw + m$$

x_tは$N(\mu_t, \sigma_t^2)$に確率的に従い，wはノイズ項で$N(0, \rho^2)$に確率的に従うものとする．mは制御項で，b, cは増幅率と呼ばれるものである．

特に，$b = 1, m = 1$の状態方程式は$x_t = x_{t-1} + cw + 1$となるが，これは確率推定高度x_tとx_{t-1}の誤差$cw + 1$で，wが$N(0, \rho^2)$程度であることを意味する．さらの$c = 0$とすると状態方程式は$x_t = x_{t-1} + 1$となり，tが+1増えるたびに，x_tも+1増えることを意味するので，ロケットの状態方程式の場合，mはロケットの推定移動高度を意味する．

さて，まず$t=0$でのロケットの状態x_0を$N(0,1)$に従っているとする．さらにb,c,w,mはいずれも分かっているとする．このとき，状態方程式$x_1=bx_0+cw+m$より

$$\mu_1=b\mu_0+cw+m$$

であり，さらに，σ_1^2についても分散に関する一般公式$V[X+Y]=V[X]+V[Y]$と$V[\alpha X+\beta]=\alpha^2V[X]$より

$$\sigma_1^2=b^2\sigma_0^2+c^2\rho^2$$

であり，σ_1^2がわかる．つまり，$t=1$でのロケットの状態x_1が$N(\mu_1,\sigma_1^2)$に従うことがわかる．

次に，実測値y_1と状態値x_1に関する観測方程式$y_1=ax_1+v$と，x_1が事前分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$に従っていると考える．そうするとベイズ更新

$$p(x_1|y_1)=\frac{p(y_1|x_1)p(x_1)}{p(y_1)}$$

を考えることができて，x_1の事後分布$N({\mu'}_1,{\sigma'}_1^2)$が得られる．これで分布$N({\mu'}_1,{\sigma'}_1^2)$が$x_1$の確率的な状態として確定するので，事後分布$N({\mu'}_1,{\sigma'}_1^2)$を改めて$x_1$の分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$と書き直す.

x_1が$N(\mu_1,\sigma_1^2)$に従うことが確定したとする．そうすると，たとえばx_1の95%信頼区間を推定することができる．95%信頼係数は±1.96であることがわかっているので，

x_1の95%信頼区間は

$$\mu_1-1.96\sigma_1\leq x_1\leq\mu_1+1.96\sigma$$

となる．

問題２．x_1が$N(2,0.5)$に従うとき，x_1の90%信頼区間を推定せよ．

３．観測方程式のベイズ更新

観測方程式

$$y=ax+v$$

において，ノイズvは$N(0,\tau^2)$に従うとする．

以下，xの事前分布$p(x)$は$N(\mu,\sigma^2)$とするとき，xの事後分布$N(\mu',\sigma'^2)$について説明する．

$E(y)$をyの平均，$V(y)$をyの分散とすると，

$$E(y)=E(ax+v)=aE(x)+0=ax$$

$$V(y)=V(ax+v)=a^2V(x)+V(v)=a^2\times 0+\tau^2=\tau^2$$

である．よって，尤度$p(y|x)$は$N(ax,\tau^2)$に従うことがわかる．次の定理よって，xの事後分布$N(\mu',\sigma'^2)$が確定する．

定理　観測方程式$y = ax + v$において，ノイズvは$N(0, \tau^2)$に従い，xの事前分布$p(x)$は$N(\mu, \sigma^2)$とする．このとき，xの事後分布$p(x|y)$は$N(\mu', \sigma'^2)$に従い，

$$\mu' = \frac{a\sigma^2 y + \tau^2 \mu}{a^2\sigma^2 + \tau^2}, \qquad \sigma'^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{a^2\sigma^2 + \tau^2}$$

である．

（証明）ベイズの定理より

$$p(x|y) \propto p(y|x)p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{(y-ax)^2}{2\tau^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\propto e^{-\frac{(y-ax)^2}{2\tau^2} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(-2axy+a^2x^2)}{2\tau^2} - \frac{(x^2-2\mu x)}{2\sigma^2}} \times e^{-\frac{y^2}{2\tau^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

$e^{-\frac{y^2}{2\tau^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$は定数より，

$$p(x|y) \propto e^{-\frac{(-2axy+a^2x^2)}{2\tau^2} - \frac{(x^2-2\mu x)}{2\sigma^2}}$$

指数部分だけ整理すると，

$$-\frac{(-2axy + a^2x^2)}{2\tau^2} - \frac{(x^2 - 2\mu x)}{2\sigma^2} = -\frac{a^2\sigma^2 + \tau^2}{2\tau^2\sigma^2}\left\{\left(x - \frac{a\sigma^2 y + \tau^2\mu}{a^2\sigma^2 + \tau^2}\right)^2 - \left(\frac{a\sigma^2 y + \tau^2\mu}{a^2\sigma^2 + \tau^2}\right)^2\right\}$$

$-\frac{a^2\sigma^2+\tau^2}{2\tau^2\sigma^2} \times \left(\frac{a\sigma^2 y+\tau^2\mu}{a^2\sigma^2+\tau^2}\right)^2$は定数より

$$p(x|y) \propto e^{-\frac{a^2\sigma^2+\tau^2}{2\tau^2\sigma^2}\left(x - \frac{a\sigma^2 y+\tau^2\mu}{a^2\sigma^2+\tau^2}\right)^2}$$

これは，事後分布が$N(, \sigma'^2)$に従い

$$\mu' = \frac{a\sigma^2 y + \tau^2\mu}{a^2\sigma^2 + \tau^2}, \qquad \sigma'^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{a^2\sigma^2 + \tau^2}$$

であることを意味する．Q.E.D.

問題３．観測方程式$y = 2x + v$において，$y = 3$で，ノイズvは$N(0,1)$に従い，xの事前分布$p(x)$は$N(1,0.5)$とする．このとき，xの事後分布$N(\mu', \sigma'^2)$を求めよ．

４．ロケットの状態空間モデルによるシミュレーション

第２節で定義した観測方程式と状態方程式を用いて，ロケットの高度を推定していこう．そのために，ロケットを発射する前の初期パラメータを以下のように設定する．

（1）状態方程式

$$x_t = bx_{t-1} + cw + m$$

x_tが$N(\mu_t, \sigma_t^2)$に従うとき，

$$\mu_t = b\mu_{t-1} + c\mu_t + m, \qquad \sigma_t^2 = b^2\sigma_{t-1}^2 + c^2\rho^2$$

初期パラメータの設定は以下とする．

$b = 1$，$m = 1$，$c = 0.5$，$\mu_w = 0$，$\rho^2 = 1$，x_0は$N(0,1)$，wは$N(\mu_w, \rho^2)$に従う．

（2）観測方程式

$$y = ax + v$$

初期パラメータの設定は以下とする．

$a = 1$，vは$N(0,1)$に従う．つまり$\tau^2 = 1$とする．

このとき，事後分布$N(\mu_t', \sigma_t{}')$は，

$$\mu_t' = \frac{a\sigma_t^2 y + \tau^2\mu_t}{a^2\sigma_t^2 + \tau^2}, \qquad \sigma_t'^2 = \frac{\sigma_t^2\tau^2}{a^2\sigma_t^2 + \tau^2}$$

である．

シミュレーション（$t = 1$秒後）

μ_1とσ_1^2の計算：x_0は$N(0,1)$に従うので，$\mu_0 = 0$，$\sigma_0^2 = 1$，$\mu_w = 0$，$\rho^2 = 1$であり，$x_1 = bx_0 + cw_0 + 1$より，

$$\mu_1 = b\mu_0 + c\mu_w + m = 1, \qquad \sigma_1^2 = b^2\sigma_0^2 + c^2\rho^2 = 1 \times 1 + 0.5^2 \times 1 = 1.25$$

$\mu_1{}'$と$\sigma_1'^2$の計算：$\mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 1.25, y = 1.27, \tau^2 = 1$より

$$\mu_1' = \frac{a\sigma_1^2 y + \tau^2\mu_1}{a^2\sigma_1^2 + \tau^2} = \frac{1 \times 1.25 \times 1.27 + 1 \times 1}{1 \times 1.25 + 1} = 1.15$$

$$\sigma_1'^2 = \frac{\sigma_1^2\tau^2}{a^2\sigma_1^2 + \tau^2} = \frac{1.25 \times 1}{1 \times 1.25 + 1} \sim 0.556$$

シミュレーション（$t = 2$秒後）

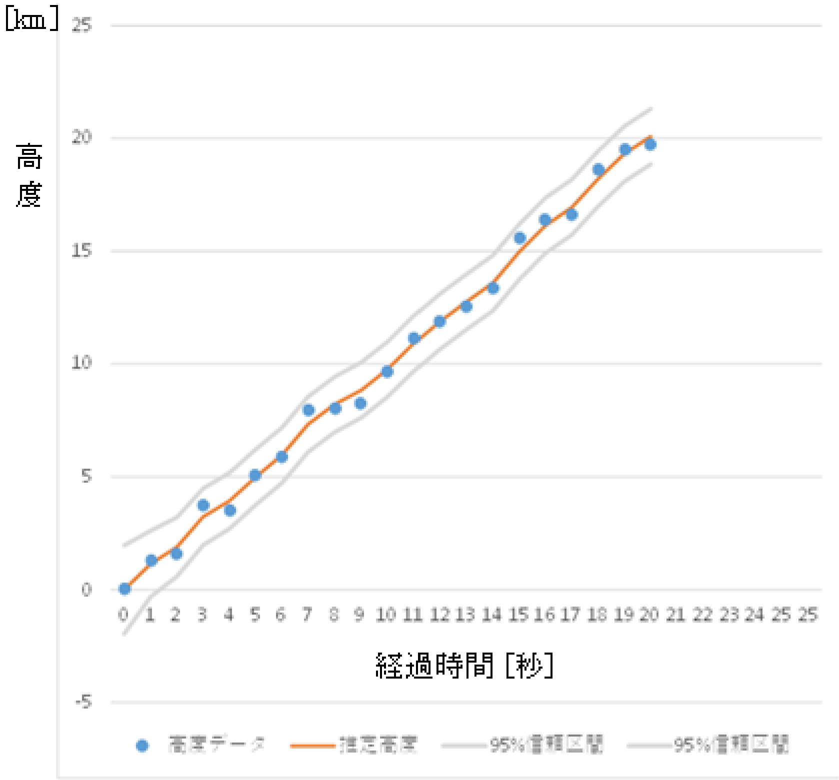
μ_2とσ_2^2の計算：$\mu_1 = 1.15, \mu_w = 0, \sigma_1^2 = 0.556, \rho^2 = 1$であり

$$\mu_2 = b\mu_1 + c\mu_w + m = 2.15, \qquad \sigma_2^2 = b^2\sigma_1^2 + c^2\rho^2 = 0.806$$

$\mu_2{}'$と$\sigma_2'^2$の計算：$\mu_2 = 2.15, \sigma_2^2 = 0.806, y = 1.58, \tau^2 = 1$より

$$\mu_2' = \frac{a\sigma_2^2 y + \tau^2\mu_2}{a^2\sigma_2^2 + \tau^2} = \frac{1 \times 0.806 \times 1.58 + 1 \times 2.15}{1 \times 0.806 + 1} = \sim 1.896$$

$$\sigma_2'^2 = \frac{\sigma_2^2\tau^2}{a^2\sigma_2^2 + \tau^2} = \frac{0.806 \times 1}{1 \times 0.806 + 1} \sim 0.446$$



上のグラフは，ロケットの高度データ，推定高度，95%信頼区間を示したものである．

問題４． $\mu_2 = 1.896$, $\sigma_2^2 = 0.446$を用いてμ_3とσ_3^2の値およびμ_4とσ_4^2の値をそれぞれ求めよ．

解答

問題１． $x_t = 1.58x_t + 27.46$, $r = 0.99$　　問題 2.　$0.614 \leq x_1 3.386$

問題 3.　$N\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}\right)$　問題 3.　$\mu_3 = 3.230$, $\sigma_3^2 = 0.410$,　$\mu_4 = 3.944$, $\sigma_4^2 = 0.398$