

球や n 人乗りの浮き輪のような曲面を**閉曲面**と呼ぶ。



図 1

n 人乗りの浮き輪の穴のことを**種数** (genus) といい、記号 g で表す。特に球の種数は $g = 0$ である。また、種数が $g = 1$ である閉曲面は**トーラス**と呼ばれる。

さて、閉曲面 S 上の各点 p で S と接するベクトル $v(p)$ が定まっていて、それらのベクトルが連続的に変わっているとき、 S 上に（連続な）**ベクトル場** v が与えられるという。

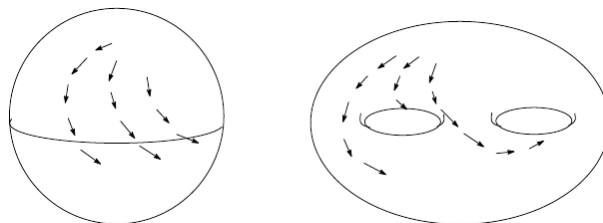


図 2

閉曲面 S 上にベクトル場 v が与えられたとき、 $v(p) = 0$ となる点 p を**特異点**という。特に、特異点 p の近傍には p 以外に特異点がないとき p を**孤立特異点**という。図 3 は点 p が孤立特異点となっている状況を表している。

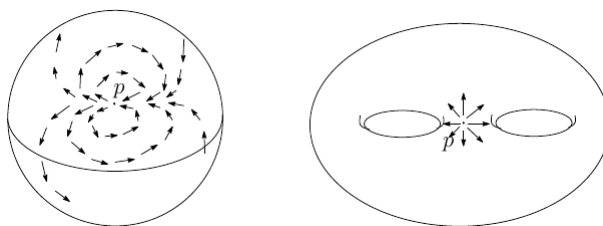


図 3

孤立特異点の特徴を表すために、**特異点 p の指数 $i(p)$** というものを以下のように定義する。

- (1) 孤立特異点 p を中心とする非常に小さな円を考え、その円周上のベクトルを反時計回りに順序をつけて取り出す。図 4 と図 5 では A,B,...,G,H,A の順に取り出している。
- (2) 取り出したベクトルを別の平面に移し、それらの始点を点 O に一致させる。
- (3) ベクトルの終点を A,B,...,G,H,A の順に追い、それが反時計回りに n 回まわるとき、特異点 p の指数 $i(p)$ は n であるとする（図 4）。時計回りに m 回まわるときは、特異点 p の指数 $i(p)$ は $-m$ であるとする（図 5）。

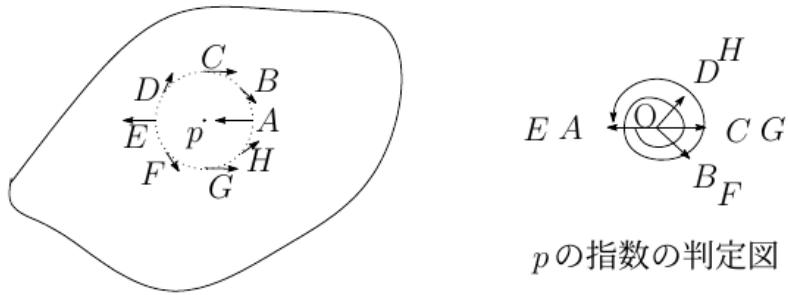


図4 (特異点 p の指数は $i(p) = 2$)

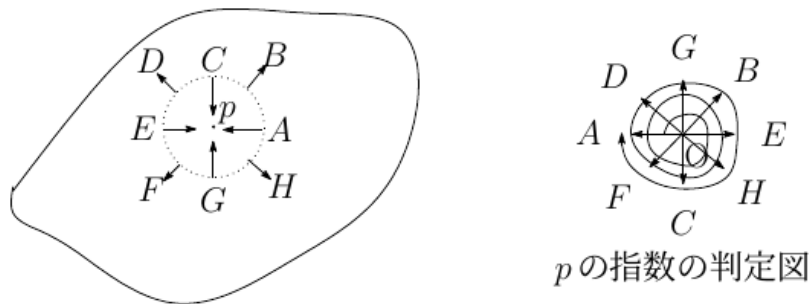


図5 (特異点 p の指数は $i(p) = -3$)

以下，閉曲面上のベクトル場に関する演習を行う．

問題 1．以下は重力下に置かれた球面上の点 p_1 から流体が湧き出して，点 p_2 で吸い込まれるベクトル場の図である．このベクトル場の孤立特異点は明らかに p_1 と p_2 だけである．

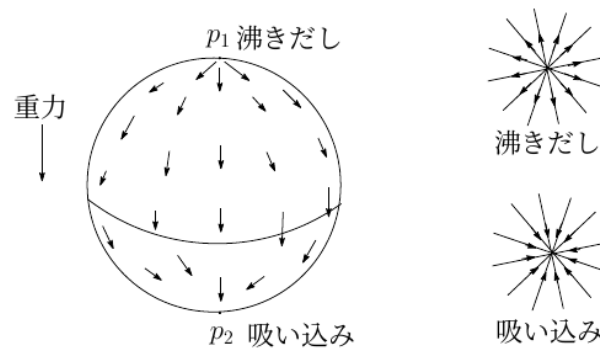


図6．(球面上に2つの孤立特異点をもつベクトル場)

- (1) 孤立特異点 p_1 と p_2 の指数 $i(p_1)$ と $i(p_2)$ に対して， $T = i(p_1) + i(p_2)$ を求めよ．
- (2) 球面のオイラー数をそれぞれ求めよ．

問題 2. 以下は重力下に置かれたトーラス面上の点 p_1 から流体が湧き出して、点 p_4 で吸い込まれるベクトル場の図である. このベクトル場の孤立特異点は明らかに p_1, p_2, p_3, p_4 である.

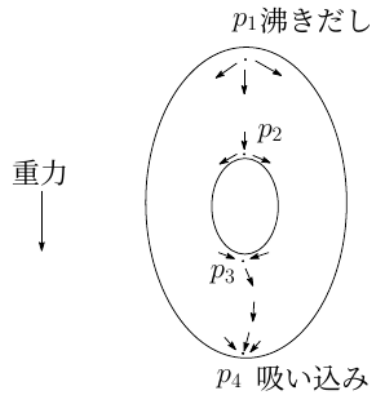


図 6. (トーラス面上に 4 つの孤立特異点をもつベクトル場)

- (1) 孤立特異点 p_j の指数 $i(p_j)$ に対して, $T = i(p_1) + i(p_2) + i(p_3) + i(p_4)$ を求めよ.
- (2) トーラス面のオイラー数をそれぞれ求めよ.

問題 3. 以下は重力下に置かれた種数 $g = 2$ の閉曲面上の点 p_1 から流体が湧き出して、点 p_6 で吸い込まれるベクトル場の図である. このベクトル場の孤立特異点は明らかに p_j ($j = 1, 2, \dots, 6$)である.

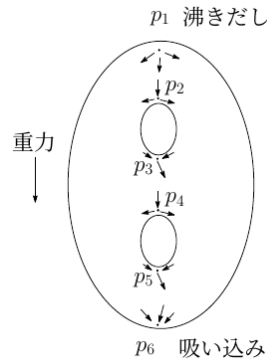


図 6. (種数 $g = 2$ の閉曲面上に 6 つの孤立特異点をもつベクトル場)

- (1) 孤立特異点 p_j の指数 $i(p_j)$ に対して, $T = i(p_1) + i(p_2) + i(p_3) + i(p_4) + i(p_5) + i(p_6)$ を求めよ.
- (2) トーラス面のオイラー数をそれぞれ求めよ.

問題 4. 問題 3 と同様に, 重力下に置かれた種数 g の閉曲面上の点 p_1 から流体が湧き出して, 点 p_{2g+2} で吸い込まれるベクトル場について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 孤立特異点 p_j の指数 $i(p_j)$ に対して, $T = i(p_1) + i(p_2) + \dots + i(p_{2g+2})$ を推測せよ.
- (2) トーラス面のオイラー数 E と T との関係を推測せよ.

(補足) 以下の定理が知られている.

ポアンカレ-ホップの定理

種数 g の閉曲面上に, n 個の特異点 p_j をもつベクトル場があるとき,

$$\sum_{j=1}^n p_j = 2 - 2g = E$$

が成り立つ.

解答

問題 1 (1) $i(p_1) = 1, i(p_2) = 1$ より $T = 2$ (2) $g = 0$ より $E = 2 - 2g = 2$

問題 2 (1) $i(p_1) = 1, i(p_2) = -1, i(p_3) = -1, i(p_4) = 1$ より $T = 0$

(2) $g = 1$ より $E = 2 - 2g = 0$

問題 3 (1) $i(p_1) = 1, i(p_2) = -1, i(p_3) = -1, i(p_4) = -1, i(p_5) = -1, i(p_6) = 1$ より $T = -2$

(2) $g = 2$ より $E = 2 - 2g = -2$

問題 4 (1) $T = 2 - 2g$ (2) $T = E = 2 - 2g$