数理・データサイエンス教材案（平面図形のオイラー数）

2022 年 6 月 6 日

提案者：松田 修

ある図形を重なっていない三角形に分割することを**三角形分割**と呼ぶ．特に最少の三角形の数で分割することを，**最少三角形分割**と呼ぶ.

さて，fを三角形の数，eを辺の数，vを点の数とする．このとき，

$$E = f - e + v$$

を，その図形の**オイラー数**と呼ぶ.

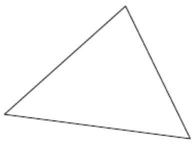

図１

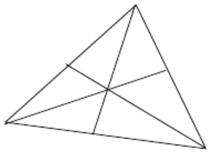

図２

図１において，$f = 1, e = 3, v = 3$よりオイラー数Eは，$E = 1 - 3 + 3 = 1$である．図２は，図１の三角形の重心から各頂点と各辺の中点に線を引いて作った三角形分割である．このように三角形さらに小さな三角形で分割することを**重心細分**と呼ぶ．このとき，$f = 6, e = 12, v = 7$であるため，オイラー数は変化せず$E = 1$である．

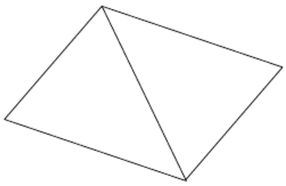

図３

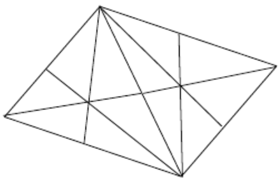

図４

図３は四角形の三角形分割で，図４はその重心細分である．これらのオイラー数を計算すると，図３においては，$E = 2 - 5 + 4 = 1$であり，図４においては，$E = 12 - 22 + 11 = 1$となり，この場合もEは変化しない.

以下，オイラー数に関する演習を行う．

問１．５角形に最少三角形分割を行ったとき，f, e, vとEを求めよ．
問２．問１で作った三角形分割の重心細分を作り，f, e, vとEを求めよ

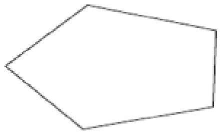

図５

問３．６角形に最少三角形分割を行ったとき，f, e, vとEを求めよ．
問４．問３で作った三角形分割の重心細分を作り，f, e, vとEを求めよ

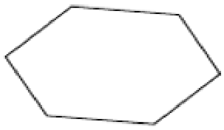

図６

問５．n角形に最少三角形分割を行ったとき，f, e, vとEを求めよ．
問６．問５で作った三角形分割の重心細分を作り，f, e, vとEを求めよ．

問７．n角形のある三角形分割では，$f = x, e = y, v = z, E = x - y + z$とする．この重心細分を作り，$f, e, v$と$E$を$x, y, z$で表せ．

図７

問８．図７のような四角形の中に三角形の穴が開いている図形に最少三角形分割を行ったとき，Eを求めよ．

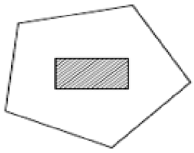

図８

問９．図８のような５角形の中に四角形の穴が開いている図形に最少三角形分割を行ったとき，Eを求めよ．

問１０．図９のような５角形の中に２つの三角形の穴が開いている図形に最少三角形分割を行ったとき，Eを求めよ．

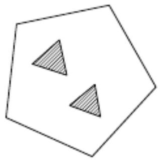

図９

解答
問１．$E = f - e + v = 3 - 7 + 5 = 1$
問２．$E = f - e + v = 18 - 32 + 15 = 1$
問３．$E = f - e + v = 4 - 9 + 6 = 1$
問４．$E = f - e + v = 24 - 42 + 19 = 1$
問５．$E = f - e + v = (n - 2) - (2n - 3) + n = 1$
問６．$E = f - e + v = 6(n - 2) - 2(5n - 9) + (4n - 5) = 1$
問７．$E = f - e + v = 6x - (2y + 6x) + (x + y + z) = x - y + z$
問８．$E = f - e + v = 7 - 14 + 7 = 0$
問９．$E = f - e + v = 9 - 18 + 9 = 0$
問１０．$E = f - e + v = 13 - 25 + 11 = -1$

＊　オイラーの定理１『n角形の中にg個の穴が開いている図形のオイラー数は$1 - g$である．』