数理・データサイエンス教材案（線形計画法２）

2019年8月31日

提案者：松田 修

線形計画法：目的関数 $z=5x+4y$（ただし，$x\geq 0, y\geq 0$）に対し，制約条件 $7x+y\leq 10$，$10x+5y\leq 8$ とするとき，目的関数zの最大値を，図を用いないで求める線形計画法（シンプレックス法）を説明する。

（ステップ１）$z-5x-4y=0$，$7x+y+s=10$，$10x+5y+t=8$（ただし，$s\geq 0, t\geq 0$）とする。s,tを**スラック変数**と呼ぶ。

（ステップ２）これより以下の連立方程式がたつ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \\ s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

そして，係数行列の２列目以降を取り出して，

$$\left(a_{ij}\middle|b_j\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

とする。以下，第１行目の最小値が正となるまで，以下の基本変形をくり返す。これを**シンプレックス法**と呼ぶ。

（ステップ３）第１行目の最小値-5の列において，$\frac{b_i}{a_{i1}}$**が正でかつ最小である** i **行**（**第３行**）を用いて$a_{31}=10$を1に変換し，さらに，a_{31}と同じ列の値がすべて0となるように基本変形を行なう。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)\xrightarrow{R_3/10}\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.1 & 0.8 \end{array}\right)\xrightarrow[R_2-7R_3]{R_1+5R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1.5 & 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & -2.5 & 1 & -0.7 & 4.4 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.1 & 0.8 \end{array}\right)$$

（ステップ４）同様に，第１行目の最小値-1.5の列において，$\frac{b_i}{a_{i2}}$が正でかつ最小である i 行（第３行）を用いて$a_{32}=0.5$を1に変換し，さらに，a_{32}と同じ列の値がすべて0となるように基本変形を行なう。

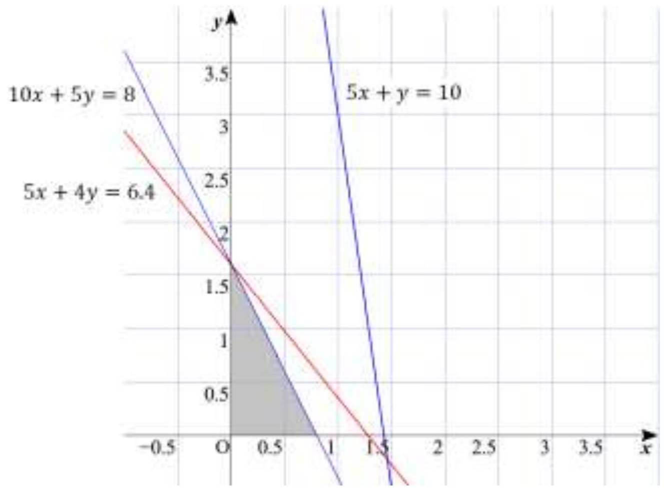
$$\xrightarrow{R_3/0.5}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1.5 & 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & -2.5 & 1 & -0.7 & 4.4 \\ 2 & 1 & 0 & 0.2 & 1.6 \end{array}\right)\xrightarrow[R_2+2.5R_3]{R_1+1.5R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0.8 & 6.4 \\ 0 & -2.5 & 1 & -0.7 & 4.4 \\ 2 & 1 & 0 & 0.2 & 1.6 \end{array}\right)\xrightarrow{R_2+2.5R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0.8 & 6.4 \\ 5 & 0 & 1 & -0.2 & 8.4 \\ 2 & 1 & 0 & 0.2 & 1.6 \end{array}\right)$$

（ステップ５）第１行目の最小値が正であるので基本変形は終了する。これより，

$$z = 6.4 - 3x - 0.8t, \quad y = 1.6 - 2x - 0.2t$$

を得る。$x \geq 0$, $y \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$より，$z$の最大値は，$x = t = 0$ のとき$z = 6.4$であることがわかる。さらに，zの最大値6.4となるx, yは$x = 0, y = 1.6$ であることもわかる。
ポイントは，$z = 6.4 - 3x - 0.8t$ のx, tの係数が負になっており，$z = 6.4$はシンプレックス法の理論により最大値となっている。

このように，スラックス変数を追加した連立方程式を，シンプレックス法と呼ばれる基本変形を有限回行なうことで，zの最大値を求めることができる。



問題．目的関数$z = x + 2y + 3z$，制約条件を，

$$4x + y + z \leq 72,\ 2x + y + 2z \leq 48,\ x + 3y + z \leq 48$$

とするとき，目的関数zの最大値を求めたい。以下の問いに答えよ。

(1)　スラック変数$s > 0, t > 0, u > 0$を用いて，z, x, y, z, s, t, uに関する連立方程式をたてよ。

(2) 目的関数$z = x + 2y + 3z$ の最大値を求めよ。

解答例

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 48 \\ 48 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 72 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 48 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3/2} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 72 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 24 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 48 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-R_3 \\ R_4-R_3}]{R_1+3R\_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 72 \\ 3 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 48 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 24 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4/2.5} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 72 \\ 3 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 48 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.2 & 0.4 & 9.6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-0.5R_4 \\ R_3-0.5R_4}]{R_1+0.5R_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0.2 & 76.8 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -0.4 & -0.2 & 43.2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0.6 & -0.2 & 19.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.2 & 0.4 & 9.6 \end{array}\right)$$

よって，$z = 76.8 - 2x - 1.4t - 0.2u$， $y = 9.6 + 0.5t - 0.4u$ より，

$x = 0$，$y = 9.6$，$z = 19.2$ のとき，最大値 $z = 76.8$ となる。