数理・データサイエンス教材案（ラグランジュの運動方程式）

2022 年 5 月 17 日
提案者：松田 修

物理学では，微分の記号を以下のようなニュートンの記号で用いることが多い．

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

さて，デカルト座標系（xy座標系）で，**ニュートンの運動方程式**は

$$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$$

となる（1687 年）．ここで，ベクトル$\boldsymbol{F}$は力を，ベクトル$\boldsymbol{x}$は位置ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$をあらわす．　今，$\boldsymbol{F}$は保存力とすると，ポテンシャルエネルギー$U(\boldsymbol{x})$が存在して，

$$U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) - U(\boldsymbol{x}) = -\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}$$

となる．このことから，関係式

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{1}$$

を得る．実は，式(1)は極座標系(r, θ)では，

$$m\left(\ddot{r} - r\ddot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad m\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{2}$$

とい関係式に変形される．

以下，式(2)が得られることを見ていく．

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$$

式(1)の左辺をそれぞれ変形すると，

$$m\ddot{x} = m\left(\ddot{r}\cos\theta - 2\ddot{r}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta\right)$$
$$m\ddot{y} = m\left(\ddot{r}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

となる．一方，

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

より，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

である．したがって，式(1)の右辺はそれぞれ，

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial y} = -\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

したがって，式(1)は，

$$m\left(\ddot{r}\cos\theta - 2\ddot{r}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta\right) = -\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{3}$$

$$m\left(\ddot{r}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta\right) = -\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{4}$$

となる．$(3)\times\cos\theta + (4)\times\sin\theta$と$(3)\times\sin\theta + (4)\times\cos\theta$より式(2)が得られる．

さて，**ラグラジアンL**は，

$$L = K - U$$

と定義される．ここで，Kは運動エネルギー，Uはポテンシャルエネルギーである．そして，ある座標系(u, v)において

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \tag{5}$$

を，座標系(u, v)における**ラグランジュの運動方程式**という(1750 年)．

以下において，ラグランジュの方程式から式(1)と(2)が比較的簡単に導出できることを演習で確かめる．

問１．デカルト座標系では

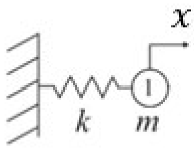
$$K = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

であることを用いて，ラグランジュの運動方程式から式(1)を導け．

問２．ラグラジアンLを極座標系(r, θ)で書き直せ．

問３．極座標系(r, θ)でのラグランジュの運動方程式から式(2)を導け．

問４．下図の①は単振動の図で，mは質点の重さ，kはばね定数，xは①の変位をそれぞれ表す．ラグランジュの運動方程式から，単振動の運動方程式$m\ddot{x} = -kx$を導け．



解答

問１.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-U$$

であり,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x})+\frac{\partial U}{\partial x}=0 \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial \mathrm{y}}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y})+\frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}}=0 \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{y}=-\frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}}$$

問２.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-U$$

であり, $\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta$, $\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$より,

$$L=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\left(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right\}-U=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U$$

問３.

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U$$

より, 極座標系(r,θ)のラグランジュの運動方程式から,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial \mathrm{r}}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{r})-mr\dot{\theta}^2+\frac{\partial U}{\partial \mathrm{r}}=0 \quad \Longrightarrow \quad m\left(\ddot{r}-\dot{r}\dot{\theta}^2\right)=-\frac{\partial U}{\partial \mathrm{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)+\frac{\partial U}{\partial \mathrm{r}}=0 \quad \Longrightarrow \quad m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}\right)=-\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

を得る.

問４. $L=K-U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$である. よって,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x})+kx=0 \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x}=-kx$$