アインシュタインの時空について

アインシュタインが相対理論で採用した時間と空間の数学的モデルとなったものは，数ベクトル空間$\mathbf{R}^4$ではあるが，特殊な内積が入った空間で，**ミンコフスキー空間**（または**時空**）と呼ばれるものである。

$\mathbf{R}^4$の基底を$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_0$とし，数ベクトル$\boldsymbol{x}$を

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + ct_x\boldsymbol{e}_0$$

と表す。ここでcは光速を表す定数で，また$\boldsymbol{e}_0$方向は時間軸としている。特に，光速cを$\boldsymbol{e}_0$の係数に入れてあるのは，物理的な光速不変の原理の要請があるからである。そして，通常の内積とは異なる**ミンコフスキー内積**を，ここでは$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})_M$と書くことにすると，それは

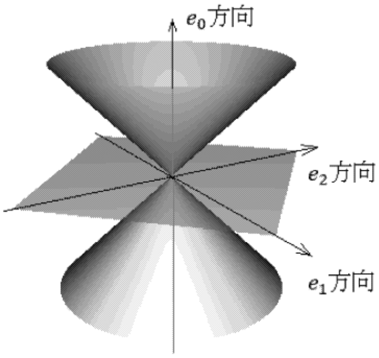
$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})_M = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2t_xt_y$$

で定義される。ここで，ミンコフスキー内積を特殊な内積と述べた理由は，この内積は正の値をとるとは限らないからである。このことから，$\boldsymbol{x}$は以下の３種類に分類される。

(1) $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})_M < 0$ のとき$\boldsymbol{x}$を**時間的**なベクトルという。

(2) $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})_M > 0$ のとき$\boldsymbol{x}$を**空間的**なベクトルという。

(3) $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})_M = 0$のとき$\boldsymbol{x}$を**ヌル的**（**光的**）なベクトルという。



上の図は，ミンコフスキー空間を部分空間$\langle\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_0\rangle_B$へ投影したもので，${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = (ct_x)^2$が円錐面を表し，円錐面上の位置ベクトルがヌル的なベクトルとなる。

さて，原点から円錐面上を等速運動している粒子を考える。このとき，位置(x_1, x_2, x_3)での粒子の速度vは

$$v = \frac{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}}{t}$$

であることから，$v = c$，すなわち速度は光速に等しいことがいえる。このことから，ヌル的なベクトル全体は**光円錐**と呼ばれている。

光円錐より内側の位置ベクトルが時間的なベクトルであり，それら全体を **時間的領域**と呼ぶ。そして時間的領域において，原点から等速運動をしている粒子の速さは光速cより小さい。また，光円錐より外側が空間的なベクトルを表しており，それら全体は**空間的領域**と呼ばれる。この場合は，原点から等速運動をしている粒子の速さは光速cより大きい。空間的領域を光速より速い速度で等速運動している粒子は**タキオン**と名付けられているが，タキオンは未だ発見されていない。

さて，一つの慣性系において，時刻t_0に(x_0, y_0, z_0)から出た光が時刻tに(x, y, z)へ到達するという事象を光円錐面上で考える。この２点間の距離は

$$c(t - t_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

である。同様に，別の慣性系において，時刻${t'}_0$に$({x'}_0, {y'}_0, {z'}_0)$から出た光が時刻t'に(x', y', z')へ到達するという事象を光円錐面上で考える。この２点間の距離は

$$c(t' - {t'}_0) = \sqrt{(x' - {x'}_0)^2 + (y' - {y'}_0)^2 + (z' - {z'}_0)^2}$$

である。

今，$t_0 = t'_0 = 0, x_0 = x'_0 = 0, y_0 = y'_0 = 0, z_0 = z'_0 = 0$として考えると，

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \end{cases}$$

となる。簡単に考えるために，　$y = y' = 0, z = z' = 0$としてみると，

$$\begin{cases} x^2 - c^2t^2 = 0 \\ x'^2 - c^2t'^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

となる。

そこで，慣性系(x', y', z')が慣性系(x, y, z)に対して<u>速度vでx方向に運動しているとする</u>。このとき，慣性系(x, y, z)を基準にしたとき，xとx'，tとt'の関係式はどうなっているのだろうか。

古典的には

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$

とされるが，この式は(1)を満足しない。(1)を満たす変換式として，**特殊ローレンツ変換**と呼ばれるものがある。それは,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

である。実際,

$$x'^2 - ct'^2 = \frac{(x - vt)^2 - c^2\left(t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{(x^2 - c^2t^2) - \frac{v^2}{c^2}(x^2 - c^2t^2)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0$$

となる。$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$を，慣性系$(x, y, z)$に対する慣性系$(x', y', z')$の**ローレンツ収縮**と呼ぶ。(2)は同時に$v \leq c$であることを意味する。

反対に慣性系(x', y', z')を基準にすると，

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

となる.

例題　浦ちゃんが，光速の0.99 倍の速さ（等速）の亀に乗せられて，第１竜宮城に行って帰ってきた。彼の時計では１日かけて第１竜宮城に行き，２日間遊んで，また１日かけて第１竜宮城から帰ったことになっている。第１竜宮城での時間の流れは浦ちゃんの地元と同じとする。地元の人からみて，彼はどのくらいいなかったことになるのか。また，第１竜宮城までの距離を求めよ．ただし，$c = 3 \times 10^8 m/s$とせよ.

（解）浦ちゃんが乗った亀の系を基準に考えると，時間に関するローレンツ変換は,

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

となる。浦ちゃんは亀の上，つまり等速運動している系（亀）に乗っているだけなので，$x' = 0$としてよい。したがって，$v = 0.99c$として地元での経過時間を計算すると，$t + 2 = \frac{2}{\sqrt{1-0.99^2}} + 2 = 16.2$日となる。また亀の移動距離は$x = \frac{1 \times 0.99c}{\sqrt{1-0.99^2}} = \frac{1 \times 0.99 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{1-0.99^2}} = 21.1 \times 10^8 m = 21.1 \times 10^5 km$である.

問題１　浦ちゃんが，超高級竜宮城に行きたくなって，光速のx 倍の速さ（等速）の F1 級の亀に乗って，超高級竜宮城へと出かけた。彼の時計では２日かけて超高級竜宮城に行き，３日間遊んで，そして２日かけて超高級竜宮城から帰ってきた。ところが，帰ってみると地元の知り合いはみんな年を取っており，実際１０年の年月が経っていた。亀の速さは光速の何倍だったといえるか。小数点以下第７位まで求めよ.

問題２　静止しているμ中間子の寿命は$2.2 \times 10^{-6} s$とする．μ中間子の速さが$0.999c$のとき，その寿命中に走行する距離を求めよ.