

球や n 人乗りの浮き輪のような曲面を**閉曲面**と呼ぶ.



図 1

n 人乗りの浮き輪の穴のことを**種数** (genus) といい, 記号 g で表す. 特に球の種数は $g = 0$ である. また, 種数が $g = 1$ である閉曲面は**トーラス**と呼ばれる.

以下, 閉曲面のオイラー数を考えていく.

閉曲面のオイラー数 E も三角形分割を行い, 面の数 f , 辺の数 e , 点の数 v から

$$E = f - e + v$$

として得られる. このとき分割に使う三角形は, 通常三角形でなくて多少辺がゆがんでいるものでもよく, さらに平面図形のオイラー数と同様, 三角形分割によらずオイラー数は定まることが知られている.

球の三角形分割を考える. そのためには, 赤道を境に北半球を取り出しそれを 2 つに分けるものを考える. 南半球も同様にする. このとき図 2 の右図のように半円を三角形として考える.

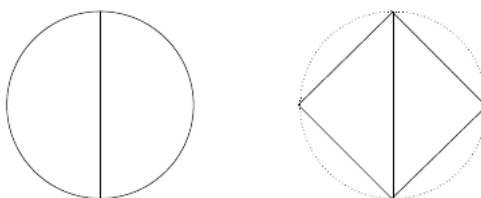


図 2

このことから, $f = 4$, $e = 6$, $v = 4$ が得られ, オイラー数は

$$E = f - e + v = 4 - 6 + 4 = 2$$

が得られる. しかし, 球の北半球を四角形 (または三角形) とみることで, 北半球のオイラー数 E_n は 1, 南半球のオイラー数 E_s も 1 より, 球のオイラー数 E は, $E = E_n + E_s = 2$ と考えることもできる.

実は, オイラー数が 2 である閉曲面は, その曲面を伸ばしたり縮めたり捻ったりする (**連続変形**という) ことで, 球 ($g = 0$ の閉曲面) に変形できることが証明されている.

注意! 連続変形には, 切ったり貼ったりすることは含まれていない.

トーラスのオイラー数を考える．上半面と下半面に分ける．



図 3

上半面（穴付き円盤）は，連続変形して穴付き四角形に変形される．したがって，上半面のオイラー数 E_u は，四角形のオイラー数から四角い穴のオイラー数を引けば得られるので，

$$E_u = 1 - 1 = 0$$

となる．同様にして，下半面のオイラー数 $E_l = 0$ を得る．よって，トーラスのオイラー数は

$$E = E_u + E_l = 0 + 0 = 0$$

となる．

以下，オイラー数に関する演習を行う．

問 1．種数 $g = 2$ の閉曲面のオイラー数 E を求めよ．

問 2．種数 $g = 3$ の閉曲面のオイラー数 E を求めよ．

問 3．種数 g の閉曲面のオイラー数 E を求める公式を予測せよ．

問 4．図 5 と図 6 の閉曲面のオイラー数 E をそれぞれ求めよ．



図 4



図 5

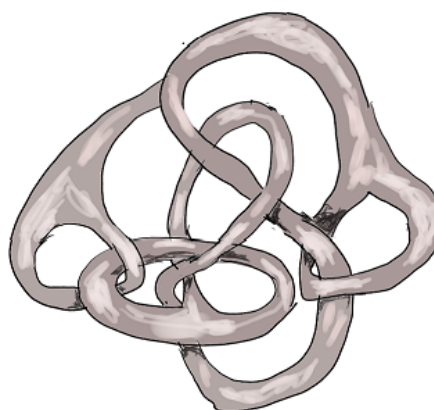


図 6

解答

問 1. $E = -2$

問 2. $E = -4$

問 3. $E = 2 - 2g$

問 4. 図 5 $E = -2$, 図 6 $E = -4$

連続変形して図 5 は図 7 の $g = 2$ の閉曲面に, 図 6 は図 8 の $g = 3$ の閉曲面になる.

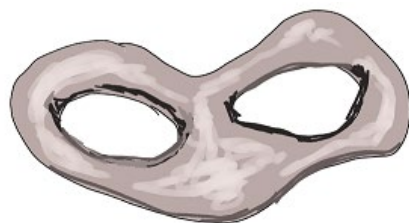


図 7



図 8