数理・データサイエンス教材案（血糖値の数理モデル）

2022 年 5 月 13 日

提案者：松田 修

$I(t)$を時刻$t$の血中インスリン濃度$[\mu lU/ml]$，$G(t)$を時刻$t$の血中グルコース濃度$[mg/dL]$，$p$をインスリン投与量，$q$をグルコース投与量とし，以下の血糖値の数理モデルを考える．

$$\frac{dI(t)}{dt} = p - \alpha I(t) + \beta G(t) \tag{1}$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = q - \gamma I(t) - \delta G(t) \tag{2}$$

ここで，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$は正の定数である．

Ｑ１．式(1)を日本語で説明せよ．

Ｑ２．式(2)を日本語で説明せよ．

Ｑ３．$G(t)$に関する 2 階の微分方程式をたてよ．

Ｑ４．$p = 0, q = 280,\ \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3, \delta = 2$，$G(0) = 80, \frac{dI(0)}{dt} = 270$として，Ｑ３でたてた 2 階の微分方程式を解け．

Ｑ５．$G(t)$の極値（おおよそ）を求めよ．

Ｑ６．$\lim_{t\to\infty} G(t)$を求めよ．

Ｑ７．$t \geq 0$のとき$G(t)$のグラフの概形を描け．

Ｑ８．Ｑ４の条件と$I(0) = 40$のもとで，$I(t)$を求めよ．

Ｑ９．$\lim_{t\to\infty} I(t)$を求めよ．

Ｑ１０．$t \geq 0$のとき$I(t)$のグラフの概形を描け．

解答

Q１．時刻$t$の血中インスリン濃度の増加速度は，その時刻のインスリン投与量と血中グルコース濃度の$\beta$倍の和から血中インスリン濃度の$\alpha$倍を引いたものに等しい．

Q２．時刻$t$の血中グルコース濃度の増加速度は，その時刻のグルコース投与量から血中グルコース濃度の$\gamma$倍と血中インスリン濃度の$\delta$倍の和を引いたものに等しい．

Q３．$\gamma \times (1) - \alpha \times (2)$より

$$\gamma \frac{dI(t)}{dt} - \alpha \frac{dG(t)}{dt} = \gamma p - \alpha q + (\alpha\delta + \beta\gamma)G(t) \tag{a1}$$

また，式(2)より

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d^2G(t)}{dt^2} - \frac{\delta}{\gamma}\frac{dG(t)}{dt} \tag{a2}$$

式$(a2)$を$(a1)$に代入して，

$$\gamma\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d^2G(t)}{dt^2} - \frac{\delta}{\gamma}\frac{dG(t)}{dt}\right) - \alpha\frac{dG(t)}{dt} = \gamma p - \alpha q + (\alpha\delta + \beta\gamma)G(t)$$

これより，

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + (\alpha + \delta)\frac{dG(t)}{dt} + (\alpha\delta + \beta\gamma)G(t) = \alpha q - \gamma p$$

を得る．

Q４．$\alpha + \delta = 4, \alpha\delta + \beta\gamma = 7, \alpha q - \gamma p = 560$より，

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + 4\frac{dG(t)}{dt} + 7I(t) = 560$$

を得る．これを解くと，

$$G(t) = e^{-2t}\left(C_1 \sin\sqrt{3}t + C_2 \cos\sqrt{3}t\right) + 80$$

$I(0) = 80$, $\frac{dI(0)}{dt} = 270$より，

$$C_1 = 90\sqrt{3}, \qquad C_2 = 0$$

したがって，

$$G(t) = 90\sqrt{3}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t + 80$$

Q５．

$$\frac{dG(t)}{dt} = -180\sqrt{3}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t + 270e^{-2t}\cos\sqrt{3}t$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = 0 \text{ のとき,} \quad \cos\sqrt{3}t - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t = 0$$

よって,

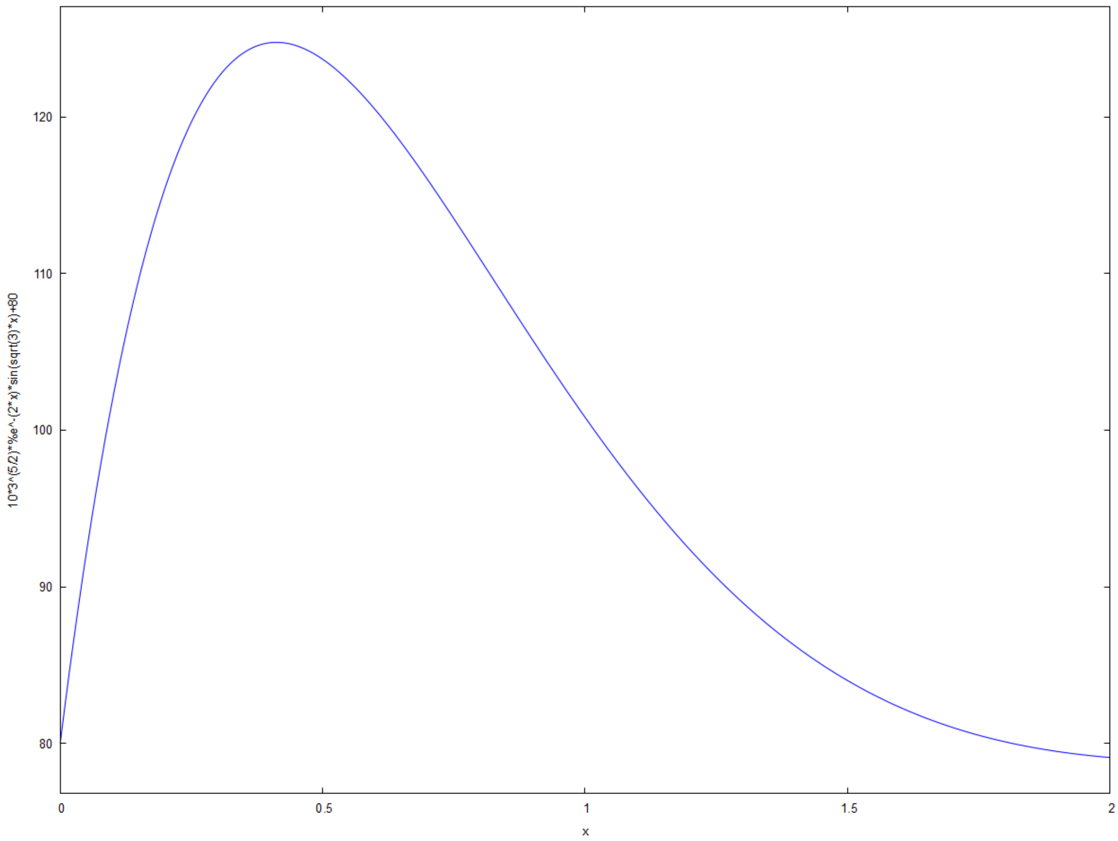
$$\tan\sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって,

$$t \sim 0.41 \text{ のとき極大値} I(0.41) \sim 124.8$$

Q６．$\lim_{t\to\infty} G(t) = 80$

Q７．




Q８．式(1)は,

$$\frac{dI(t)}{dt} = -2I(t) + G(t)$$

で，$G(t) = 90\sqrt{3}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t + 80$ だったので,

$$\frac{dI(t)}{dt} + 2I(t) = 90\sqrt{3}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t + 80$$

これを解いて，

$$I(t) = e^{-2t}\left(-90\cos\sqrt{3}t + C\right) + 40$$

$I(0) = 40$ より　$C = 90$である．よって，

$$I(t) = -90e^{-2t}\left(\cos\sqrt{3}t - 1\right) + 40$$

Q９． $\lim_{t\to\infty} I(t) = 40$

Q１０．