数理・データサイエンス教材案（連成振動の数理モデル）

2022 年 5 月 13 日

提案者：松田 修

下図の①は，質点を表し，左端が壁に固定されてたばねで繋がっている様子である．

ここで，mは質点の重さ，kははばね定数，x_1は①の変位をそれぞれ表す．このばねの動きのことを**単振動**と呼ぶ．

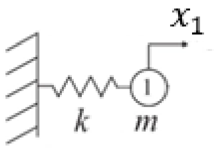


図１．単振動

Fを質点①に働く力（**復元力**）の水平方向成分とすると，

$$F = kx_1$$

が成り立つことが知られている（フックの法則）．また，Fはニュートンの運動の第 2 法則から，質量mと①の変位の加速度の積に等しい，すなわち

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

であることに注意する．したがって，

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1$$

が成り立つ．上の式を単振動の運動方程式と呼ぶ．

また，ばねに蓄えられたポテンシャルエネルギーUは，

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2$$

である．

さて，図２の①と②は，質点を表し，両端が壁に固定されて３つのばねで繋がっている様子である．ここで，x_2は②の変位を表す．このばねの動きを**連成振動**と呼ぶ．

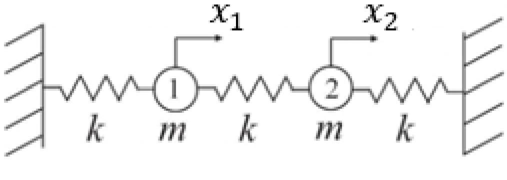


図２．連成振動

図２の連成振動の運動方程式は，以下の図３を元に立てることができる．ベクトルは復元力を表している．

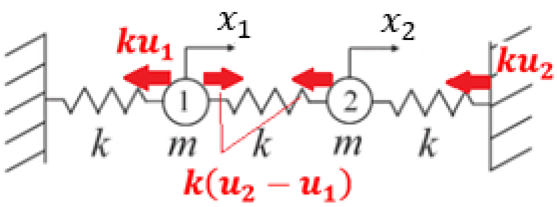


図３　復元力

右向きのベクトル（復元力）を正とすると，質点①と②での運動方程式は，それぞれ以下となる．

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

これより，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$と置くと（$\omega$を**角振動数**と呼ぶ.），微分方程式

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\omega^2x_1 + \omega^2x_2 \tag{1}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega^2x_1 - 2\omega^2x_2 \tag{2}$$

を得る．また，ばねに蓄えられたポテンシャルエネルギーUは，それぞれのばねの伸びが$x_1, x_2 - x_1, x_2$なので

$$U = \frac{k}{2}\{x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2\} = k(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

である．

以下の問いに答えよ．

問１．　式(1), (2)を２次行列行列Aを用いて，微分方程式を

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表したとき，Aを求めよ．

問２．Aの固有値と固有値に対する固有ベクトル（単位ベクトル）を求めよ．

問３．モード行列Pを用いてAを対角化せよ．

問４．$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$と置くとき，微分方程式(3)を$X_1, X_2$を用いて表せ．

問５．問４で得られた微分方程式の解X_1, X_2を求めよ．

問６．$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 2,\ \frac{dx_1}{dt}(0) = \frac{dx_2}{dt}(0)$とき，微分方程式(3)の解$x_1, x_2$を求めよ．

問７．$\omega = 1$のとき，$x_1(t), x_2(t)$のグラフを，グラフ作成ソフトなどを使って概形を描け．

問８．$\omega = 1$のとき，$x_1(t), x_2(t)$は周期関数かどうか判断せよ．

問９．ポテンシャルエネルギー$U(x_1, x_2) = k(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$を一定，すなわち$U(x_1, x_2) = c$とするとき，曲線$U(x_1, x_2) = c$はどのような図形か説明せよ．ただし，$k = 1$として考えよ．

解答

問１．$A = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}$

問２．λを固有値とすると，$\begin{vmatrix} -2\omega^2 - \lambda & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$より，$(\lambda + \omega^2)(\lambda + 3\omega^2) = 0$．よって，$\lambda = -\omega^2, -3\omega^2$

$\lambda = -\omega^2$の固有ベクトルを$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と置くと，

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$-\omega^2 x + \omega^2 y = 0$を得る．よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$がとれる．

$\lambda = -3\omega^2$の固有ベクトルを$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と置くと，

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$\omega^2 x + \omega^2 y = 0$を得る．よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$がとれる．

問３．$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$と置くと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -3\omega^2 \end{pmatrix}$と対角化される．

問４．　$P\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$　より$P\begin{pmatrix} \frac{d^2X_1}{dt^2} \\ \frac{d^2X_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \end{pmatrix}$．よって，

$$P\begin{pmatrix} \frac{d^2X_1}{dt^2} \\ \frac{d^2X_2}{dt^2} \end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \text{より} \quad \begin{pmatrix} \frac{d^2X_1}{dt^2} \\ \frac{d^2X_2}{dt^2} \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$ したがって，

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2X_1}{dt^2} \\ \frac{d^2X_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -3\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

問５．

$\frac{d^2X_1}{dt^2}$＝$-\omega^2 X_1$より，$X_1 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$，（$C_1, C_2$は任意定数）

$\frac{d^2X_2}{dt^2}$＝$-3\omega^2 X_2$より，$X_2 = C_3 \sin \sqrt{3}\omega t + C_3 \cos \sqrt{3}\omega t$，（$C_3, C_4$は任意定数）

問 6. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \\ C_3 \sin \sqrt{3}\omega t + C_4 \cos \sqrt{3}\omega t \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - C_3 \sin \sqrt{3}\omega t - C_4 \cos \sqrt{3}\omega t \\ C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + C_3 \sin \sqrt{3}\omega t + C_4 \cos \sqrt{3}\omega t \end{pmatrix}$$

$x_1(0) = 0, x_2(0) = 2$より$C_2 - C_4 = 0$, $C_2 + C_4 = 2$．よって$C_2 = 1, C_4 = 1$．したがって,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} C_1 \sin \omega t + \cos \omega t - C_3 \sin \sqrt{3}\omega t - \cos \sqrt{3}\omega t \\ C_1 \sin \omega t + \cos \omega t + C_3 \sin \sqrt{3}\omega t + \cos \sqrt{3}\omega t \end{pmatrix}$$

これより,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \omega C_1 \cos \omega t - \omega \sin \omega t - \sqrt{3}\omega C_3 \cos \sqrt{3}\omega t + \sqrt{3}\omega \sin \sqrt{3}\omega t \\ \omega C_1 \cos \omega t - \omega \sin \omega t + \sqrt{3}\omega C_3 \cos \sqrt{3}\omega t - \sqrt{3}\omega \sin \sqrt{3}\omega t \end{pmatrix}$$

$\dfrac{dx_1}{dt}(0) = \dfrac{dx_2}{dt}(0)$より　$\omega C_1 - \sqrt{3}\omega C_3 = 0$,　$\omega C_1 + \sqrt{3}\omega C_3 = 0$.

よって$C_1 = C_3 = 0$．したがって,

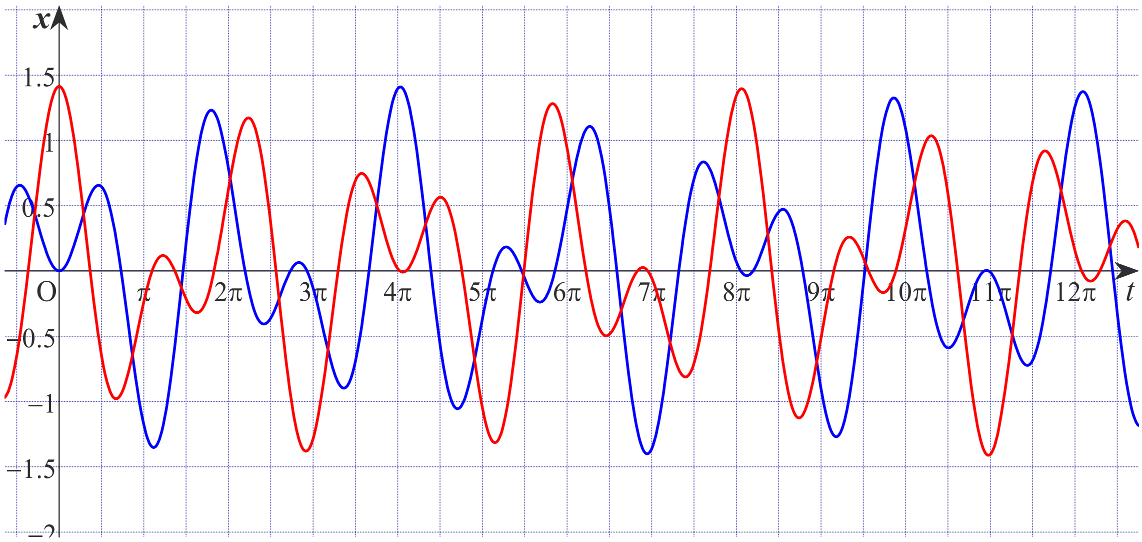
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos \omega t - \cos \sqrt{3}\omega t \\ \cos \omega t + \cos \sqrt{3}\omega t \end{pmatrix}$$

ここで，$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$，$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\dfrac{(1+\sqrt{3})\omega t}{2}\sin\dfrac{(1-\sqrt{3})\omega t}{2} \\ \sqrt{2}\cos\dfrac{(1+\sqrt{3})\omega t}{2}\cos\dfrac{(1-\sqrt{3})\omega t}{2} \end{pmatrix}$$

である．

問 7．$x_1(t)$は青線，$x_2(t)$は赤線



問８.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\dfrac{(1+\sqrt{3})t}{2}\sin\dfrac{(1-\sqrt{3})t}{2} \\ \sqrt{2}\cos\dfrac{(1+\sqrt{3})t}{2}\cos\dfrac{(1-\sqrt{3})t}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos t - \cos\sqrt{3}t \\ \cos t + \cos\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

であるので，x_1とx_2の周期関数かどうかの判断はどちらか一方だけを考えれば十分である．したがって，$\cos t + \cos\sqrt{3}\,t$が周期関数かどうかを考えればよい．

$\cos t + \cos\sqrt{3}\,t$は周期関数であると仮定する．仮定より

$$\cos t + \cos\sqrt{3}\,t = \cos(t+p) + \cos\sqrt{3}(t+p) \tag{a1}$$

となる正数pが存在する．$(a1)$の両辺を微分すると，

$$-\sin t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,t = -\sin(t+p) - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}(t+p)$$

さらに微分して

$$-\cos t - 3\cos\sqrt{3}\,t = -\cos(t+p) - 3\cos\sqrt{3}(t+p) \tag{a2}$$

を得る．$(a1),(a2)$より

$$\cos t = \cos(t+p), \quad \cos\sqrt{3}\,t = \cos\sqrt{3}(t+p)$$

を得る．$\cos t = \cos(t+p)$より，$p = 2\pi$である．したがって，

$$\cos\sqrt{3}\,t = \cos\sqrt{3}(t+2\pi) \tag{a3}$$

ここで$t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$を考えると，左辺は$1$で，右辺は

$$\cos\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + 2\pi\right) = \cos\left(2\pi + 2\sqrt{3}\pi\right) = \cos 2\sqrt{3}\,\pi \neq 1$$

これは式$(a3)$に矛盾する．したがって，x_1とx_2は周期関数ではない．

問９.

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = c$$

を行列表示すると，

$$(x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \tag{a4}$$

である．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

と置くと，B =$2A$で，Aは問１で扱った行列である．したがって，

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Bは,

$$P^{-1}BP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

と対角化される．よって，$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$と置くと$(a4)$は

$$(X_1\ \ X_2)\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=c$$

となる．これは，楕円

$$\frac{X_1^2}{2c}+\frac{X_2^2}{\frac{2c}{3}}=1$$

を意味する．