

2023年度

卒業研究

総合理工学科

松田 修 研究室

2023年度 松田研究室 メンバー

加藤 夏帆（先進科学系）

北見 虹遥（先進科学系）

高山 晴一郎（先進科学系）

津下 純一（機械システム系）

指導教員：松田 修

卒 業 研 究

方程式のガロア群の研究

先進科学系

加藤 夏帆

指導教員 松田 修

令和 6 年 2 月 20 日

Abstract

Study of Galois groups of equations

In Galois theory, it is proved that “if the Galois group of an equation is a solvable group, then the equation can be solved by power roots and four arithmetic operations”. And the Galois groups of quintic equation are the solvable groups are Frobenius group F_{20} , quintic dihedral group D_5 , quintic cyclic group C_5 , and the non-solvable groups are quintic symmetric group S_5 and quintic alternating group A_5 . It is said that most Galois groups of quintic equation are quintic symmetric group S_5 , followed by quintic alternating group A_5 .

Since the order of quintic symmetric group S_5 is large, it was considered difficult to capture the characteristics of equations whose Galois group is S_5 . In this study, we studied the characteristics of equations whose Galois group is alternating group A_5 . Specifically, we programmed in Python and used a mathematical software application called SageMath for our graduation research. Then, we organized the research data obtained from SageMath on Galois groups of equations, and studied what characteristics quintic equations whose Galois group is A_5 has.

目次

1. 序論.....	1
1.1 ガロア理論とは	1
1.2 本研究の目的と動機	1
2. 5 次方程式 $ax^5 + bx + c = 0$ $a, b, c \in Q$ のガロア群について	1
3. 群 A_5 をもつ 5 次方程式の研究といくつかの予想	2
3.1 5 次方程式 <i>Resolvent</i> $f_{20}(x)$ について	2
3.2 5 次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ のガロア群の判定法	3
4. 群 A_5 をもつ 5 次方程式に関する 6 つの予想と結果	4
5. 研究のまとめ	9
参考文献.....	9
付録 A. 群 A_5 をもつ 5 次方程式を求めるプログラム	10

1. 序論

1.1 ガロア理論とは

有理数体 $\mathbb{Q}$ 係数の n 次方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n+1}x + a_n = 0$$

を考える。有理数体 $\mathbb{Q}$ 係数の n 次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ をすべて含む拡大体 $M =$

$\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ を最小分解体という。最小分解体 M において n 次対称群 S_n の部分群 G の置換から $\mathbb{Q}$ 自己同型写像が得られる。このとき M の $\mathbb{Q}$ 自己同型写像全体 G のことを方程式のガロア群という。

ガロア理論では、 $n \geq 5$ のとき、 n 次対称群 S_n は可解群ではないことが示されている。このことから、5 次以上の一般的な方程式はべき根や四則演算をどのように組み合わせても表現できない解が存在するということが知られている。以上より、方程式のガロア群 G を調べることで、方程式がべき根を用いた解をもつかどうかを判定することができる。

1.2 本研究の目的と動機

ガロア理論では、「方程式のガロア群が可解群ならば、その方程式は、べき根や四則演算で解くことができる」ということが証明されている。そして、5 次方程式のガロア群が可解群であるものはフロベニウス群 F_{20} 、5 次二面体群 D_5 、5 次巡回群 C_5 、可解群でないものは 5 次対称群 S_5 、5 次交代群 A_5 である。5 次方程式のガロア群のほとんどが 5 次対称群 S_5 、その次に 5 次交代群 A_5 が多いと言われている。

5 次対称群 S_5 はあまりにも元の個数が多いため S_5 をガロア群にもつ方程式の特徴を捉えることは困難であると考え、本研究では、5 次交代群 A_5 をガロア群にもつ方程式にはどのような特徴があるかということを中心に研究を行った。具体的には、Python でプログラミングを行い、SageMath という数学ソフトウェアを用いて卒業研究を進めた。そして、方程式のガロア群についての SageMath から得られた研究データを整理し、ガロア群が A_5 である方程式にどのような特徴があるのかを研究した。

2. 5 次方程式 $ax^5 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) のガロア群について

5 次方程式のガロア群は、5 次対称群 S_5 、5 次交代群 A_5 、位数 20 のフロベニウス群 F_{20} 、5 次二面体群 D_5 、5 次巡回群 C_5 のいずれかとなる。5 次方程式の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ として、

$$\mathbb{Q} \subset K_1 = \mathbb{Q}(\alpha_1) \subset K_2 = K_1(\alpha_2) \subset K_3 = K_2(\alpha_3) \subset K_4 = K_3(\alpha_3)$$

という $\mathbb{Q}$ の拡大体を考える。

- (1) 体 K_1 で、与えられた5次式が1次の積に因数分解されるとき、方程式の群は、次数が5になるので5次巡回群 C_5 となる。
- (2) $K_1 = K_2 \neq K_3$ となっていて、体 K_3 で与えられた5次式が1次の積に因数分解されることはないことが知られている。
- (3) $K_1 = K_2 = K_3 \neq K_4$ となっていて、体 K_4 で与えられた5次式が1次の積に因数分解される方程式の群は、次数が $5 \times 2 = 10$ になるので5次二面体群 D_5 となる。
- (4) $K_1 \neq K_2$ となっていて、体 K_2 で与えられた5次式が1次の積に因数分解されるとき、方程式の群は、次数が $5 \times 4 = 20$ になるので位数20のフロベニウス群 F_{20} となる。
- (5) $K_1 \neq K_2 \neq K_3$ となっていて、体 K_3 で与えられた5次式が1次の積に因数分解されるとき、方程式の群は、次数が $5 \times 4 \times 3 = 60$ になるので5次交代群 A_5 となる。
- (6) $K_1 \neq K_2 \neq K_3 \neq K_4$ となっていて、体 K_4 で与えられた5次式が1次の積に因数分解される方程式の群は、次数が $5! = 120$ になるので5次対称群 S_5 となる。

3. 群 A_5 をもつ5次方程式の研究といくつかの予想

3.1 5次方程式 *Resolvent* $f_{20}(x)$ について

以下、既約な $\mathbb{Q}$ 係数の5次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ の *Resolvent* について説明する。

5次方程式の*Resolvent*は、位数20のフロベニウス群 F_{20} で不変な式である。そのため、既約な $\mathbb{Q}$ 係数の5次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ の解を x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とし、置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ と $(2\ 3\ 5\ 4)$ で生成される群を

$$F_{20} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 3\ 5\ 4) \rangle$$

とする。そして、

$$\begin{aligned} \theta_1 = & x_1^2 x_2 x_5 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_4 x_5 + x_3^2 x_1 x_5 + x_3^2 x_2 x_4 + x_4^2 x_1 x_2 + x_4^2 x_3 x_5 \\ & + x_5^2 x_1 x_4 + x_5^2 x_2 x_3 \end{aligned}$$

と置く。このとき、 θ_1 に置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ を作用させると

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\theta_1 = & x_2^2 x_3 x_1 + x_2^2 x_4 x_5 + x_3^2 x_2 x_4 + x_3^2 x_5 x_1 + x_4^2 x_2 x_1 + x_4^2 x_3 x_5 + x_5^2 x_2 x_3 \\ & + x_5^2 x_4 x_1 + x_1^2 x_2 x_5 + x_1^2 x_3 x_4 \\ = & \theta_1 \end{aligned}$$

であり、 θ_1 に置換 $(2\ 3\ 5\ 4)$ を作用させると

$$\begin{aligned} (2\ 3\ 5\ 4)\theta_1 = & x_1^2 x_3 x_4 + x_1^2 x_5 x_2 + x_3^2 x_1 x_5 + x_3^2 x_2 x_4 + x_5^2 x_1 x_4 + x_5^2 x_3 x_2 + x_2^2 x_1 x_3 \\ & + x_2^2 x_5 x_4 + x_4^2 x_1 x_2 + x_4^2 x_3 x_5 \\ = & \theta_1 \end{aligned}$$

である。これは θ_1 が F_{20} の作用で不変であることを意味する。同様に、 $\theta_2 = (1\ 2\ 3)\theta_1$, $\theta_3 =$

$(1\ 3\ 2)\theta_1$, $\theta_4 = (1\ 2)\theta_1$, $\theta_5 = (2\ 3)\theta_1$, $\theta_6 = (1\ 3)\theta_1$ をそれぞれ定義すると, これらはすべ

て F_{20} の作用で不変であることが分かる。

そこで,

$$f_{20}(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x - \theta_3)(x - \theta_4)(x - \theta_5)(x - \theta_6)$$

と定義する。この 6 次式 $f_{20}(x)$ を 5 次方程式の *Resolvent* と呼ぶ。

さて, 本研究で扱う既約な $\mathbb{Q}$ 係数の 5 次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ について, $f_{20}(x)$ を解と係数の関係式から計算すると,

$$\begin{aligned} f_{20}(x) = & x^6 + 8ax^5 + 40a^2x^4 + 160a^3x^3 + 400a^4x^2 + (512a^5 - 3125b^4)x \\ & + (256a^6 - 9375ab^4) \end{aligned}$$

となる。

3.2 5 次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ のガロア群の判定法

定義. $\mathbb{Q}$ 係数の n 次方程式の解を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$,

$$\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n)$$

とし, $D = \Delta^2$ とする。ここで, Δ を n 次方程式の解の差積, D を n 次方程式の判別式という。

既約な $\mathbb{Q}$ 係数の 5 次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ のガロア群 G について, 以下の 3 つの定理が証明されている。

定理 1. $D \in \mathbb{Q}^2$ であることとガロア群 G が A_5 , D_5 , C_5 のいずれかであることは同値である。

定理 2. ガロア群 G が可解群であることと $D > 0$ であることは同値である。

定理 3. *Resolvent* $f_{20}(x) = 0$ のある解 x_1 が $x_1 \in \mathbb{Q}$ であることとガロア群 G は F_{20} ,

D_5 , C_5 のいずれかであることは同値である。

以上より, 5 次方程式の判別式 D の値が平方数ならば A_5 , D_5 , C_5 と判別できる。そして, 5 次方程式の *Resolvent* $f_{20}(x) = 0$ が整数解をもたなければガロア群 G は A_5 であることが証明できる。

4. 群 A_5 をもつ 5 次方程式に関する 6 つの予想と結果

予想 1.

$a = 2, 3, 6, 7, 8, 9$ のとき, $ax^5 + bx + c = 0$ の群は決して A_5 にならない。

SageMath を使い, $1 \leq b, c \leq 1000$ の範囲で, プログラムを作動させたとき A_5 になる方程式は存在しなかったため, このように予想した。

SageMath を使い, $1 \leq b, c \leq 1000$ の範囲で, プログラムを作動させたとき 5 次方程式 $4x^5 + bx + c = 0$ ではどのガロア群が多いのかを調べた。結果を表 1 に示す。

表 1 (5 次方程式 $4x^5 + bx + c = 0$ でのガロア群の割合)

	S_5	A_5	F_{20}	D_5	C_5
個数 (個)	999961	27	8	4	0
割合 (%)	99.9961	0.0027	0.0008	0.0004	0

表 1 より, ガロア群のなかで 5 次巡回群 S_5 が一番多いことがわかる。

結果.

$1 \leq b, c \leq 1000$ の範囲では, $4x^5 + bx + c = 0$ の群として 5 次対称群 S_5 が現れる割合は 99.9961%である。

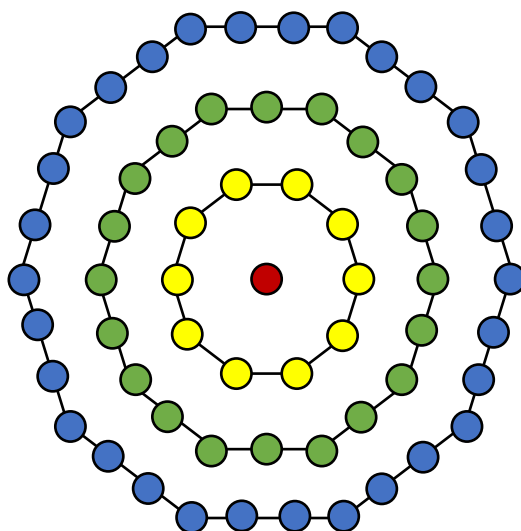
さて、白神先輩の研究[3]では、 $h = 3n(n-1) + 1$ のとき、3 次方程式 $x^3 - 3hx + h = 0$ の群は A_3 となるという研究結果が得られている。ここで、 h とは *Centered hexagonal number* $(1, 7, 19, \dots)$ という数列であり、六角形を表す図形数のことをいう。

白神先輩の研究[3]から、図形数に関する群 A_4 をもつ 4 次方程式や、群 A_5 をもつ 5 次方程式が存在するのではないかという予想をたてた。その結果、5 次方程式に関しては、*Centered decagonal number* という十角形を表す図形数に関するものが見つかった。

予想 2.

$d_n = 5n^2 + 5n + 1$ のとき、 $4x^5 + 5d_nx + 2d_n = 0$ の群は A_5 となる。

ここで、 d_n とは *Centered decagonal number* $(1, 11, 31, \dots)$ という数列で成り立ち、以下の図のように十角形を表す図形数のことである。



プログラミング結果の一部

```
4*x^5 + 5*x + 2;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
4*x^5 + 55*x + 22;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
4*x^5 + 155*x + 62;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
4*x^5 + 305*x + 122;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
4*x^5 + 505*x + 202;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
4*x^5 + 755*x + 302;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
4*x^5 + 1055*x + 422;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
```

$4x^5 + 1405x + 562$; PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 1805x + 722$; PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 2255x + 902$; PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5

(証明の試み)

判別式の値は $D = 8000^2(5n^2 + 5n + 1)^4(2n + 1)^2$ で平方数となるため定理 1 より, A_5 , D_5 , C_5 と判別できる。ここで, この方程式の *Resolvent* を求める。

5 次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ の *Resolvent* は

$$f_{20}(x) = x^6 + 8ax^5 + 40a^2x^4 + 160a^3x^3 + 400a^4x^2 + (512a^5 - 3125b^4)x + (256a^6 - 9375ab^4)$$

となる。 $a = \frac{5}{4}\{5n^2 + 5n + 1\}$, $b = \frac{1}{2}\{5n^2 + 5n + 1\}$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f_{20}(x) = & x^6 + 10(5n^2 + 5n + 1)x^5 + \frac{125}{2}(5n^2 + 5n + 1)^2x^4 + \frac{625}{2}(5n^2 + 5n + 1)^3x^3 \\
 & + \frac{15625}{16}(5n^2 + 5n + 1)^4x^2 + \frac{3125}{16}(5n^2 + 5n + 1)^4(40n^2 + 40n + 7)x \\
 & + \frac{15625}{64}(5n^2 + 5n + 1)^5(20n^2 + 20n + 1)
 \end{aligned}$$

$f_{20}(x) = 0$ が整数解を持たなければ, $d_n = 5n^2 + 5n + 1$ のとき $4x^5 + 5d_nx + 2d_n = 0$ のガロア群は A_5 であることが証明できる。

(注意) 白神先輩の研究[3]と予想 2 から, *Centered octagonal number*(1,9,25,...) に関する群 A_4 をもつ 4 次方程式もあるのではないかと予想している。

予想 3.

L_n をリュカ数とし, $n = 1$ または 5 以上の奇数のとき

$4x^5 + 5L_nx^2 + 3L_n = 0$ の群は A_5 と同型である。

プログラミング結果の一部

$4x^5 + 5x^2 + 3$ PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 55x^2 + 33$ PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 145x^2 + 87$ PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 995x^2 + 597$ PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5

$n = 1000$ まで調査し, 以下の予想を得た。結果を表 2 に示す。

表 2 5 次方程式 $4x^5 + 5L_nx^2 + 3L_n = 0$ のデータ

n	1	2	3	4	5	6	7
L_n	1	3	4	7	11	18	29
群	A_5	S_5	D_5	S_5	A_5	S_5	A_5

n	8	9	10	11	12	13	14
L_n	47	76	123	199	322	521	843
群	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

予想 4. 稲垣先輩[4]の予想と本研究予想との関係

L_n をリュカ数とし, $n = 1$ または 5 以上の奇数とする。

このとき, 5 次方程式 $4x^5 + 5L_nx^2 + 3L_n = 0$ のガロア群と $x^5 \pm 10L_nx^2 \pm 24L_n = 0$ (複号同順) のガロア群は一致する。

稲垣先輩の研究では, 方程式 $x^5 \pm 10L_nx^2 \pm 24L_n = 0$ (複号同順) の群はいずれも A_5 と同型である ($n = 1$ または 5 以上の奇数) という研究結果が得られている。その研究データを表 3 に示す。

表 3 5 次方程式 $x^5 \pm 10L_nx^2 \pm 24 = 0$ のデータ

n	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47
群	A_5	S_5	D_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

n	9	10	11	12	13	14	15	16
L_n	76	123	199	322	521	843	1364	2207
群	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

表 2 と表 3 より, 2 つの方程式のガロア群が一致している。

予想 5.

$a_n = n^2 + 57n + 31$ のとき, $4x^5 + a_nx + 2a_n = 0$ の群は A_5 となる。

プログラミング結果の一部

$4x^5 + 31x + 62$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 89x + 178$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 149x + 298$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 211x + 422$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 275x + 550$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 341x + 682$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 409x + 818$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 479x + 958$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 551x + 1102$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5
 $4x^5 + 625x + 1250$;PARI group [60, 1, 4, "A5"] of degree 5

(証明の試み)

判別式の値は $D = \left(\frac{1}{4}\right)^2 (n^2 + 57n + 31)^4 (2n + 57)^2$ で平方数となるため定理 1 より, A_5 ,

D_5 , C_5 と判別できる。ここで, この方程式の *Resolvent* を求める。

5 次方程式 $x^5 + ax + b = 0$ の *Resolvent* は

$$f_{20}(x) = x^6 + 8ax^5 + 40a^2x^4 + 160a^3x^3 + 400a^4x^2 + (512a^5 - 3125b^4)x \\ + (256a^6 - 9375ab^4)$$

となる。 $a = \frac{a_n}{4}$, $b = \frac{a_n}{2}$ のとき,

$$f_{20}(x) = x^6 + 2a_nx^5 + \frac{5}{2}a_n^2x^4 + 25a_n^3x^3 + \frac{25}{16}a_n^4x^2 + \left(\frac{1}{2}a_n^5 - \frac{3125}{16}a_n^4\right)x \\ + \left(\frac{1}{16}a_n^6 - \frac{9375}{64}a_n^5\right)$$

$$= x^6 + 2(n^2 + 57n + 31)x^5 + \frac{5}{2}(n^2 + 57n + 31)^2x^4 + 25(n^2 + 57n + 31)^3x^3 \\ + \frac{25}{16}(n^2 + 57n + 31)^4x^2 + \frac{1}{16}(8n^2 + 456n - 2877)(n^2 + 57n + 31)^4x \\ + \frac{1}{64}(4n^2 + 228n + 9251)(n^2 + 57n + 31)^5$$

$f_{20}(x) = 0$ が整数解を持たなければ, $a_n = n^2 + 57n + 31$ のとき, $4x^5 + a_nx + 2a_n = 0$ のガロア群は A_5 であることが証明できる。

* いずれの予想も $n = 1000$ まで調査し成り立つことを確認した。

5. 研究のまとめ

本研究では、Python でプログラミングを行い、SageMath を用いて、5 次方程式のガロア群が 5 次交代群 A_5 をもつ方程式にどのような特徴があるのかについて研究を行った。その結果、6 つの予想をたてることができ、過去の研究と比較すると 3, 4, 5 次方程式には図形数に関する共通点があるのではないかと予想がたてられた。

今後の課題として、群 A_4 をもつ 4 次方程式 $ax^4 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) には図形数に関する方程式が存在するのかについて調査し研究したいと考えている。

参考文献

[1] 松田修, 数学の魅力をイメージする ガロア理論のストーリー (19 世紀のフランスの少年が作った理論)

https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/eBooks/galois_story.pdf

[2] 松田修, 数学の魅力をイメージする 方程式のガロア群 (その具体的な計算法)

https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/eBooks/galois_equations.pdf

[3] 白神百花, 方程式のガロア群の研究, 2022 年度卒業研究

[graduationresearch2022.pdf](https://www.tsuyama-ct.ac.jp/graduationresearch2022.pdf) (tsuyama-ct.ac.jp)

[4] 稲垣佑都, 群 A_5 をもつ 5 次方程式の研究, 2020 年度卒業研究

[graduationresearch2020.pdf](https://www.tsuyama-ct.ac.jp/graduationresearch2020.pdf) (tsuyama-ct.ac.jp)

[5] 大迎規宏, 可解な 5 次方程式について, 平成 15 年度学位論文

[6] BLAIR K. SPEARMAN & KENNETH S. WILLIAMS, ON SOLVABLE QUINTICS $X^5 + aX^2 + b$, 1996 年, ROCKY MOUNTAIN JOURNAL OF MATHEMATICS

付録 A. 群 A_5 をもつ 5 次方程式を求めるプログラム

```
with open('file.txt', 'w') as o:
    n=1000
    for a in range(1, n):
        for b in range(1, n):
            R.<x>=PolynomialRing(QQ)
            f=4*x^5+a*x+b
            l=list(factor(f))
            u=[x[1] for x in l]
            s=sum(u)
            if s<2:
                G=f.galois_group(pari_group=True)
                u=G.order()
                if 50<u<120:
                    print(f, G)
                    o.write(str(f)+";"+str(G)+'\n')
o.close
```


卒 業 研 究

廃棄野菜の新たな再利用法

先進科学系

北見 虹遥

指導教員 松田 修

令和6年2月19日

Abstract

The purpose of this study is to find new ways to reuse waste vegetables. We focused on vegetable fibers, and in order to use these fibers to make nature-friendly clothing made of natural materials, we made Japanese paper from vegetables and examined its durability and other properties.

We also considered ways to increase the durability of the Japanese paper.

目次

1. 研究の動機と目的.....	1
2. 廃棄野菜について.....	1
2.1 日本の食品ロス	1
2.2 食品ロスの削減の啓蒙	2
2.3 廃棄野菜の再利用方法	3
3. 和紙の活用法と作り方	4
3.1 和紙とは.....	4
3.2 野菜から和紙の作り方	4
4. 野菜から和紙を作る	6
4.1 生野菜と茹で野菜	6
4.2 色々な種類の野菜	6
4.3 野菜から作った和紙の耐久性	7
5. 研究のまとめ	9
参考文献	9

1. 研究の動機と目的

日本の食品ロスの中でも多くを占めているのが野菜類である。廃棄となった野菜は基本的にはゴミとして処分されるが、中には食材以外に再利用されるものもある。本研究ではそんな廃棄野菜の新たな再利用方法を見出すために野菜の繊維に注目して、この繊維を用いて自然に優しい天然素材の服を作り上げることが目的とする。野菜の繊維をそのまま糸にするのは難しいため、まずは植物などの繊維を絡み合わせ薄く平面上に伸ばして固めることで作る和紙を、野菜を用いて作り、作った紙の耐久性などを調べ、布にする方法を模索する。

2. 廃棄野菜について

2.1 日本の食品ロス

まだ食べられるのに、様々な理由で廃棄されてしまう食品のことを食品ロスという。

農林水産省及び環境省の令和2年度の統計では、食品の廃棄量は年間2,372万トン、そのうち食品ロスは年間522万トンと推定(2017年)されている。これは国連世界食糧計画(WFP)による食料支援量(約440万トン)の1.2倍である。食品ロスの内訳は、事業系が275万トン、家庭系が247万トンとなっており、食品ロスの約半分が家庭からのものになっている。

しかし、日本は、摂取カロリーベースで食料自給率37%(2018年度)と先進国中最低水準であり、大量の食料を輸入し、生産・流通に多量のエネルギーを使用しながら、大量に廃棄しているという現実もある。

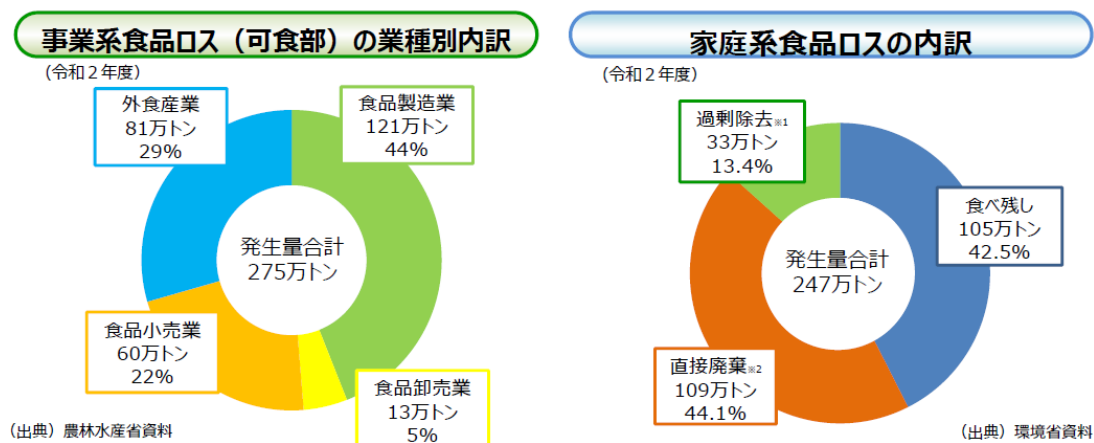


図1 食品ロスの内訳

事業系食品ロスの主な業種別内訳は、食品製造業121万トン(44%)、外食産業81

万トン（29%）、食品小売業 60 万トン（22%）、食品卸売業 13 万トン（5%）である。より具体的には、製造・卸・小売事業者においては、製造・流通・調理の過程で発生する規格外品、返品、売れ残りなどが食品ロスになっており、外食事業者においては、作り過ぎ、食べ残しなどが食品ロスになっている。

家庭系食品ロスの主要な要因は、食べ残し 105 万トン（42.5%）、直接廃棄 109 万トン（44.1%）、過剰除去 33 万トン（13.4%）である。

これに対して、令和 2 年度のごみ処理事業経費は約 2.1 兆円であり、国民一人当たり換算すると、16,800 円となっている。また、食品は多くの水分を含むため、焼却の際は、たくさんのエネルギーを使い、かつ二酸化炭素（CO₂）が発生するという問題もある。100 万トンの食品ロスを削減すれば、46 万トンの CO₂ を削減できるという試算もある。

2.2 食品ロスの削減の啓蒙

このような現状の中、2020 年 3 月 31 日、「食品ロスの削減の推進に関する基本的な方針」が閣議決定された。この方針において、具体的な食品ロス削減の目標が設定されており、それは 2030 年度までに家庭系食品ロスにおいては 216 万トンに、事業系食品ロスにおいては 273 万トンにという数値目標である。これは、2000 年における家庭系食品ロス 433 万トン、事業系食品ロス 547 万トンの半分の数値である。

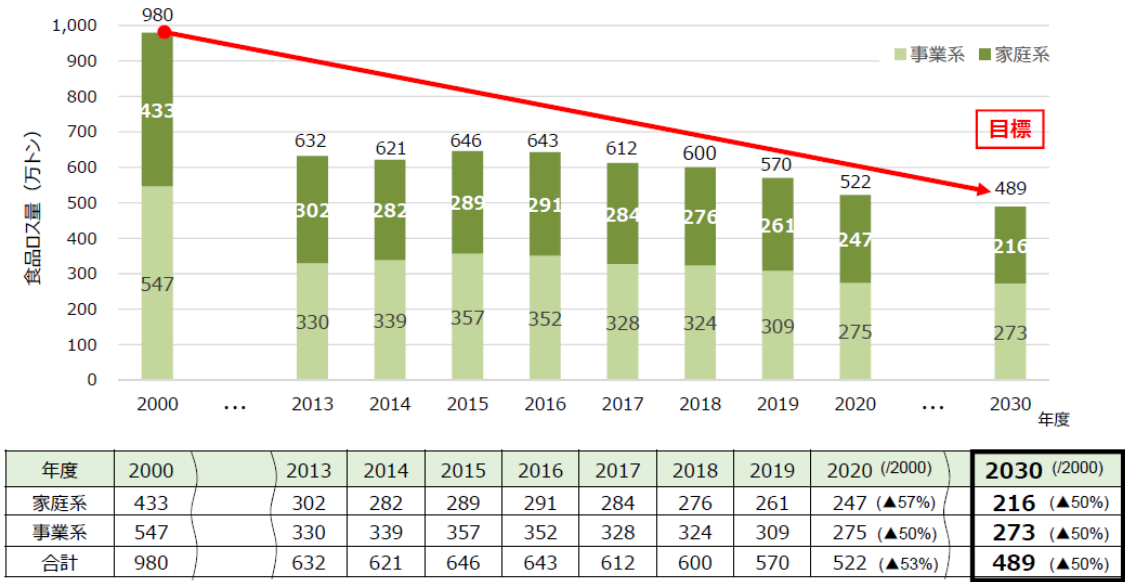


図 2 食品ロスの削減の目標値

政府の政策を受けて、日本人の食品ロス問題の認知度は非常に高くなってきた。消費者庁が行った令和 4 年度第 2 回消費生活意識調査の結果から、食品ロスの認知度は

81.1%であり、年齢に偏りなく認知されている。

● **食品ロス問題の認知度（81.1%）。**

（令和4年度調査は、全国の満15歳以上の男女5,000人を対象に、令和4年9月に実施。）

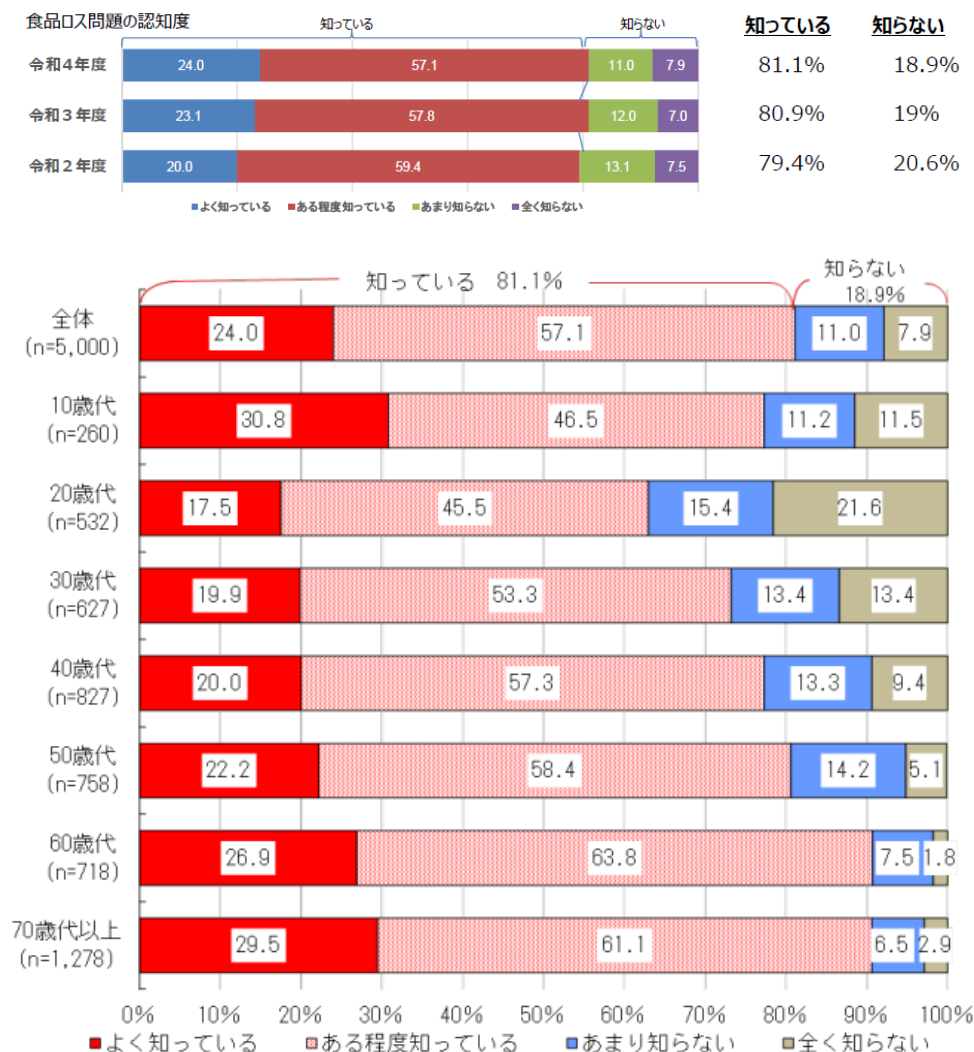


図3 食品ロス問題の認知度

2.3 廃棄野菜の再利用方法

本研究では、食品ロス削減の方法の一つとして、廃棄野菜の再利用法に着目した。

廃棄野菜の最も主流な再利用方法として挙げられるのが堆肥である。野菜などの生ごみを製品堆肥、木チップ、もみ殻などと混ぜ合わせて発酵させて作るのが堆肥であり、野菜以外にもご飯や惣菜、コーヒークス、卵の殻なども堆肥にすることができるため、分別などの必要もなく家庭から出る生ごみをそのまま使うことができる。珍しい再利用方法としては野菜から作る和紙やクレヨン、野菜の色素を用いた野菜染めなどがあり、どれも廃棄野菜を減らすために発足されたプロジェクトによって生み出さ

れた商品である。

本研究では、その中の「野菜から作る和紙」に着目し、研究を進めていく。

今現在、洋紙の普及や機械漉き和紙の台頭によって、手漉き和紙の需要は年々減少の一途を辿っている。そんな手漉き和紙に注目を集めたいという思いから、野菜から作る和紙を選択した。

3. 和紙の活用法と作り方

3.1 和紙とは

和紙の定義ははっきりと決まっておらずあいまいだが、一般的にはヨーロッパなどから伝わった洋紙に対して紙漉き製法で作られた日本製の紙のことを和紙と言う。和紙の活用方法は様々あるが、その中でも和紙で服を作るという活用方法がある。

日本に奈良時代から、紙衣(かみこ)という和紙を原料とした服があった。厚い和紙を糊でつぎ、柿渋を塗って揉み柔らかく作られるものであり、軽くて保温性に優れている。平安時代の僧衣、戦国時代の胴服や陣羽織、下着、防寒着、夜着などに用いられた。

また、現代でも、紙で作られた服は存在している。紙衣のように紙をそのまま服にするのではなく紙を細長く裁断し、こよりのように何度もねじって強度を上げていき、これを編み上げることで、紙でできた糸を作り上げてその糸から布を作る。こうしてできた服はとても軽く、夏は汗をかいてもさらっとべたつかず、冬は肌の乾燥を和らげる。また、紙でできた服は生分解性を有しており、最後は土にかえるため環境にも優しい。

紙の糸を作る際に用いられている原料は企業によって様々だが、基本的には日本で古くから和紙の材料に使われているコウゾやミツマタ、ガンピなどである。または日本の紙幣の材料に使われているマニラ麻が多い。

3.2 野菜から和紙の作り方

まずは茹でた野菜をミキサーでペースト状にする。野菜などの植物の繊維には自己接着性があり、繊維と繊維が重なった接点は互にくっつきあい、絡み合う。そのため、繊維が重なり合う接点をより多くするために、野菜をペースト状にすることで繊維を細かくする。そして、繊維の自己接着という特性は水が必要となる。

植物繊維の主成分はセルロースであり、このセルロースは親水性が高い。そのため植物繊維は水となじみやすく、繊維を水に浸けると水を吸って膨張する。繊維に水を吸わせてそれをシート状にして乾燥させると、今まで水と結合していた繊維と繊維の接触部分が、繊維同士の結合となる(図4)。

そのため、ミキサーでペースト状にした野菜を、水を張ったたらいに投入し、す

だれを挟んだ紙漉き枠でその中をさらうことで紙漉きを再現する。すだれの上に野菜が均等に溜まったら紙漉きをやめ、それが固まったら型から外し、ガーゼをかぶせてから自然乾燥で水気を飛ばすことで、和紙ができる。

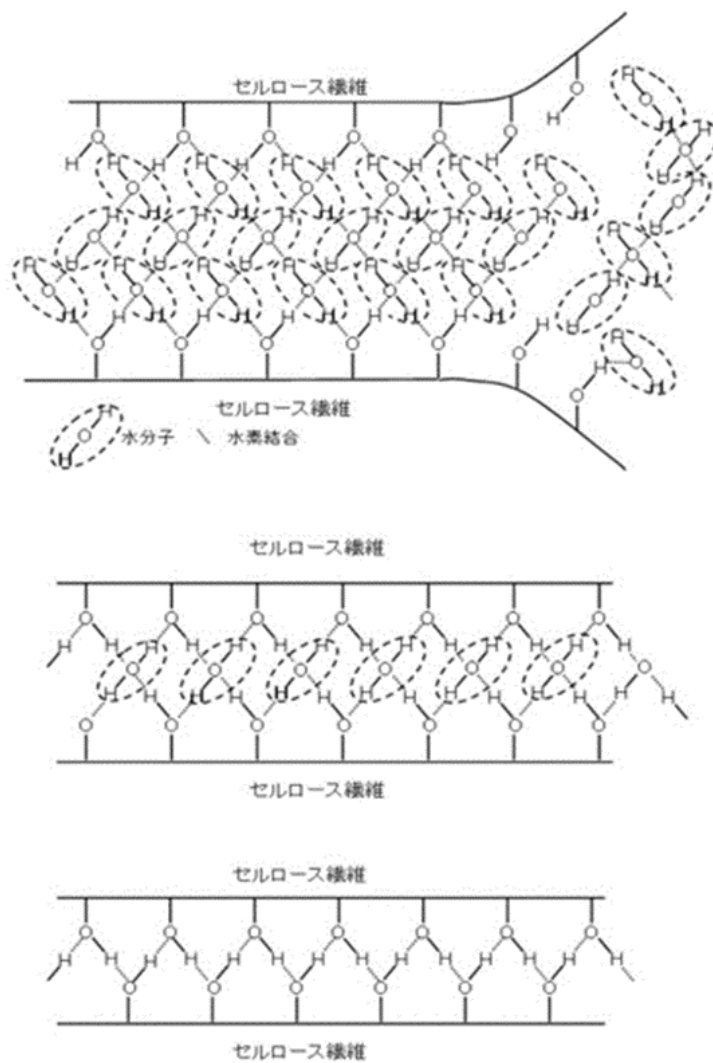


図4 セルロースの結合

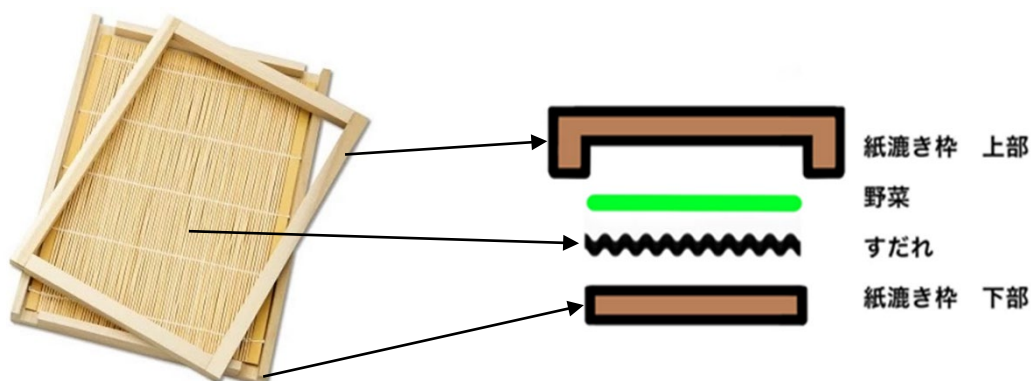


図5 用いた紙漉き道具とその図解

4. 野菜から和紙を作る

4.1 生野菜と茹で野菜

まずは、和紙を作る際、生の野菜をそのままペースト状にした場合と野菜をペースト状にする前に野菜を茹でた場合で和紙の出来や丈夫さが変化するのか実験した。

葉野菜であるキャベツを用いて実験したところ、生の野菜を用いた場合よりも茹でた野菜を用いた場合の方が繊維同士の結びつきが強くなり、より丈夫な和紙ができた。以降の実験では野菜は全て茹でたものを使用することとする。

用いた野菜	生のキャベツ	茹でたキャベツ
完成した和紙の特徴	繊維の結びつきが弱い	繊維の結びつきが強い
写真		

図6 キャベツで作った和紙

4.2 色々な種類の野菜

実験 4-1 より、葉野菜以外の他種類の野菜でも和紙は作れるのかどうか実験した。今回の実験では果菜類と根菜類の野菜をそれぞれ2つ用いた。

結果は、果菜類で作った和紙はどちらもボロボロとしており、紙全体に亀裂が入っていてすぐに崩れてしまった。根菜の中でもニンジンで作った和紙はなめらかで繊維の結びつきも強い丈夫な和紙が出来たが、ジャガイモでは和紙を作ることができなかった。ジャガイモはペースト状にした際に細くなりすぎてすだれをすり抜けてしまうためであると考えする。

用いた野菜	ピーマン(果菜類)	ナス(果菜類)
完成した和紙の特徴	ボロボロとしていて亀裂が入っている	ボロボロとしていて亀裂が入っている
写真		

図7 ピーマンとナスで作った和紙

用いた野菜	ニンジン(根菜)	ジャガイモ(根菜)
完成した和紙の特徴	なめらかで繊維の結びつきも強い	
写真		

図8 ニンジンで作った和紙

4.3 野菜から作った和紙の耐久性

実験 4-1、4-2 を踏まえ、複数の種類の野菜を混合しても和紙を作れるかどうか実験した。また、同時進行として和紙の耐久性を高めるための実験も行った。

今回の実験で用いたのは、乾燥野菜ミックス(ニンジン、ネギ、キャベツを無作為に混合したもの)、コウゾである。

和紙を糸として布を作るには、和紙の強度が必要となる。野菜から作られた和紙は強度の面で本来の和紙と劣る。そのため、上記の和紙の主な原材料であるコウゾを野菜と混ぜ、紙漉きをすることで強度を向上させることができるのではないかと考えた。コウゾと野菜の割合を変えた和紙を5枚用意し、それぞれの強度を計測する。

以下、和紙の5枚をA～Eで表す。

A:コウゾ 10 g

B:コウゾ 7.5 g・野菜 2.5 g

C:コウゾ 5.0 g・野菜 5.0 g

D:コウゾ 2.5 g・野菜 7.0 g

E:野菜 10 g

出来た和紙をそれぞれ5×20 cmの短冊状に切り、その一枚をこよりにする。そして、フォースゲージで引っ張り、こよりが完全にちぎれる直前の引っ張り強度を3回計測して平均を出し、和紙それぞれの耐久性を調べた。表1にフォースゲージで求めた引っ張り強度を示す。表1を見ると、A～Cまでの値は大差ないが、C～Dにかけて値が大きく減少していることがわかる。このことから、コウゾを混ぜることで和紙の耐久性が向上することがわかる。

また、コウゾの量が全体の50%を下回ると耐久性が大幅に下回るのでないかと考えた。そのため、コウゾと野菜の割合が1:1であるCが、耐久性と野菜の割合の面で一番好ましいと言える。

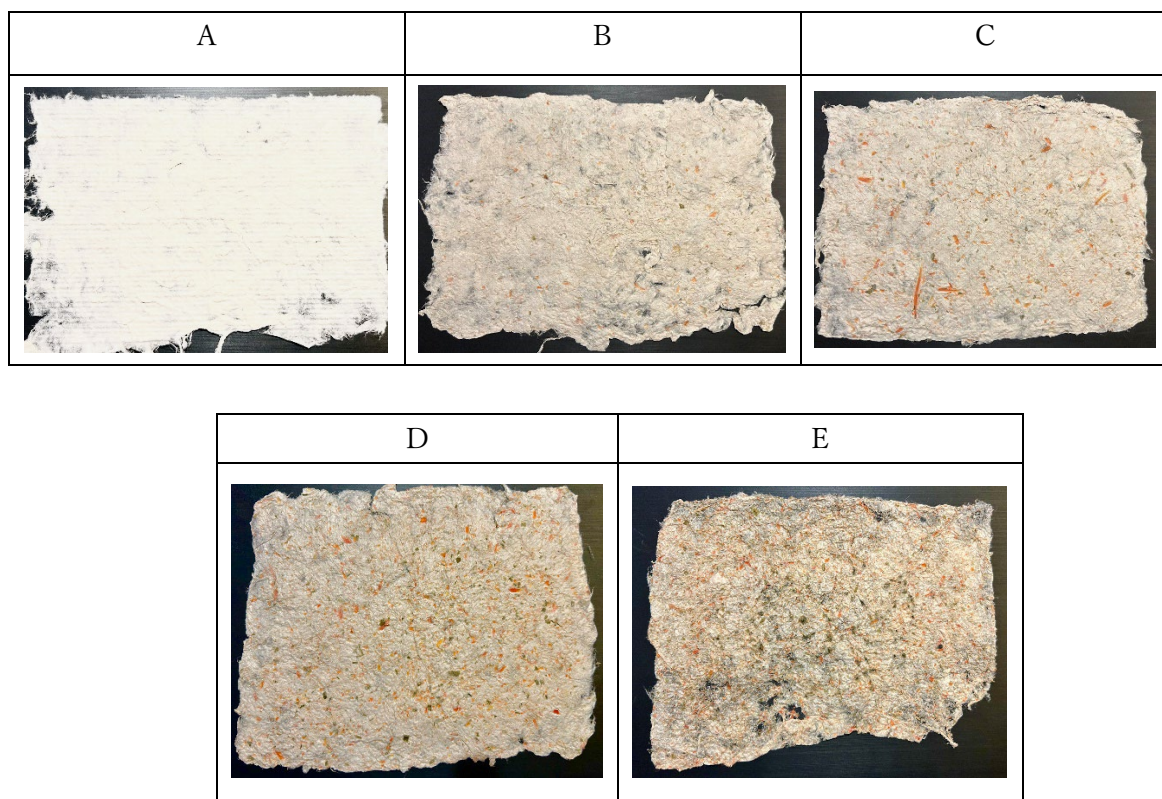


図9 コウゾと野菜で作った和紙

表1 コウゾと野菜で作った和紙の耐久性(単位:N)

	A	B	C	D	E
1回目	26.6	22.1	18.7	16.0	9.7
2回目	21.7	19.6	23.0	14.0	13.2
3回目	24.2	25.7	22.7	11.5	8.9
平均	24.1	22.5	21.5	13.8	10.6

5. 研究のまとめ

和紙から服を作っている会社では、和紙を細かくスリットにし、撚り加工をし、糸状化することで紙の糸を作り(抄織糸)、その糸から布を作っている。

そのため、野菜から作った和紙を上記のように加工することで簡易的な抄織糸を作り、それによって布を作れるのではないかと考えた。だが、コウゾ以外での和紙の耐久性の向上や、洗濯ができるようにするために必要な耐水性の向上、実際に布を作れるかどうかなど、課題はまだたくさん存在している。そのため、今後もし同じ研究を行う者がいるなら、託したいと考える。

参考文献

1. 農林水産省食品ロス統計調査
https://www.maff.go.jp/j/tokei/kouhyou/syokuhin_loss/
2. 農林水産省 日本の食料自給率
https://www.maff.go.jp/j/zyukyu/zikyu_ritu/012.html
3. 渡辺達朗, 循環経済化と食品ロス削減 : フードシェアリングの取り組みを中心に, 消費者志向経営に関する連絡会, 2021年10月21日
https://www.caa.go.jp/policies/policy/consumer_partnerships/meeting_materials/assets/consumer_partnerships_cms203_211021_01.pdf
4. 令和4年度第2回消費生活意識調査結果について, 消費者庁, 令和4年10月6日
https://www.caa.go.jp/notice/assets/survey_003_221006_0001.pdf
5. 島根大学生物資源科学部農林生産学科作物研究室 紙の構造
<https://www.ipc.shimane-u.ac.jp/food/kobayasi/paperstructure.html>

卒 業 研 究

隣接行列とチェビシェフ多項式と辺の比

先進科学系

高山 晴一郎

指導教員 松田修

令和 6 年 2 月 19 日

Abstract

Characteristic polynomials are polynomials for finding the eigenvalues of a square matrix. The characteristic equations are then obtained from the characteristic polynomials.

So there, when a regular polygon is used as a graph, there was a tendency for the solution to the characteristic equations of its adjacency matrix to be the ratio of the length of one side and the diagonal of that regular polygon.

The purpose of this research is to investigate why the eigenvalues of the adjacency matrix of a regular polygon are the ratios of the lengths of one side and the diagonal of the regular polygon, in conjunction with the Chebyshev polynomial.

概要

固有多項式はある正方行列の固有値を求めるための多項式である。そして、その固有多項式から固有方程式が得られる。そこで、正多角形をグラフとした場合、その隣接行列の固有方程式の解が正多角形の一辺と対角線の長さの比であるという傾向が見られた。本研究の目的は、なぜ、正多角形の隣接行列の固有値が正多角形の一辺と対角線の長さの比であるのかをチェビシェフ多項式と関連づけ、調べることである。

目次

1. はじめに	4
2. 正 n 角形の一辺と対角線の比	4
2-1. 正五角形と 2 次方程式	4
2-2. 正七角形の隣接行列と 3 次方程式.....	5
2-3. 正九角形と 3 次方程式	6
3. 正 n 角形の隣接行列	8
3-1. 正五角形の隣接行列と 2 次方程式.....	8
3-2. 正七角形の隣接行列と 3 次方程式.....	9
3-3. 正九角形の隣接行列と 3 次方程式.....	10
4. チェビシエフ多項式.....	11
4-1. 5 次のチェビシエフ多項式と 2 次方程式.....	11
4-2. 7 次のチェビシエフ多項式と 3 次方程式.....	12
4-3. 9 次のチェビシエフ多項式と 3 次方程式.....	13
5. 隣接行列の固有多項式.....	14
5-1. 隣接行列の固有多項式の漸化式	14
5-2. 漸化式の一般化	15
5-3. 漸化式の証明	15
6. 参考文献	17

1. はじめに

私は錯視というものに興味があり、それについて数学的に解釈しようと研究を始めた。最初は、錯視の中でもペンローズの三角形という不可能図形に着目した。不可能図形とは2次元で描いても矛盾はないが、3次元の現実では矛盾が生じて実現不可能な図形である。3年次では、立体図形や不可能図形を隣接行列で表し、その固有多項式を調べた。4年次からは、平面図形を隣接行列で表し、固有多項式を求めた。主に平面図形は、正多角形で行った。そして、隣接行列の固有多項式とチェビシェフ多項式における正多角形の辺と対角線の比の関係について調べた。

2. 正 n 角形の一辺と対角線の比

正 n 角形の一辺と対角線における比の関係からそれを解とする方程式を、トレミーの定理を用いると導出することができる。ここで、トレミーの定理を以下に示す。

トレミーの定理. 円に内接する四角形 $ABCD$ において、辺 AB 、 BC 、 CD 、 AD 、 AC 、 BD には、辺の長さに関する

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

という関係が成り立つ。

一般的に、正五角形と対角線の比が、黄金比の関係であるということはよく知られている。

辺と対角線の比を解とする方程式について、正五角形、正七角形、正九角形の場合において証明する。

2-1. 正五角形と2次方程式

命題 2-1. 正五角形の一辺の長さを a 、対角線の長さを b とし、 $x = \frac{b}{a}$ と置くと、 x は、2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解である。

(証明)

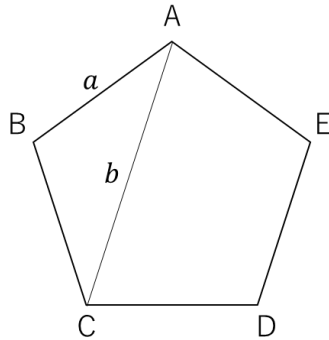


図 1. 正五角形と対角線

図 1 のように、正五角形の辺の長さを a 、対角線の長さを b とする。この正五角形は円に内接し、四角形 ABCD も円に内接するのでトレミーの定理より、

$$a^2 + ab = b^2 \quad (2.1.1)$$

となる。さらに、正五角形の一辺 a と対角線 b の比を

$$x = \frac{b}{a}$$

と置くと、(2.1.1)式は、

$$\begin{aligned} 1 + x &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

となる。したがって、正五角形の一辺と対角線の比 $\frac{b}{a}$ は(2.1.2)式の解である。

(証明終)

2-2. 正七角形の隣接行列と 3 次方程式

命題 2-2. 正七角形の一辺の長さを a 、一番短い対角線の長さを b とし、 $x = \frac{b}{a}$ と置くと、 x は、3 次方程式 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。

(証明)

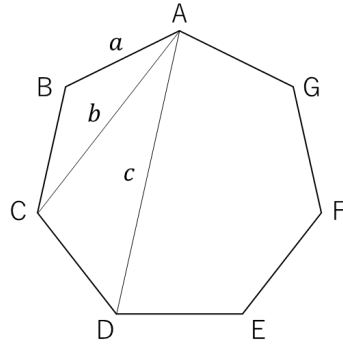


図 2. 正七角形と 2 種類の対角線

図 2 のように、正七角形の一辺の長さを a 、2 種類の対角線の長さをそれぞれ b 、 c とする。この正七角形は円に内接し、四角形 ABCD と四角形 ABCE も円に内接するのでトレミーの定理より、

$$a^2 + ac = b^2 \quad (2.2.1)$$

$$ab + ac = bc \quad (2.2.2)$$

となる。さらに、正七角形の一辺とそれぞれの対角線の長さの比を

$$x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$$

と置くと、(2.2.1)、(2.2.2)式は、

$$1 + y = x^2 \quad (2.2.3)$$

$$x + y = xy \quad (2.2.4)$$

となる。そして、(2.2.3)、(2.2.4)式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x + (x^2 - 1) &= x(x^2 - 1) \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

となる。したがって、正七角形の一辺と対角線の比 $\frac{b}{a}$ は(2.2.5)式の解である。

(証明終)

1-3. 正九角形と 3 次方程式

命題 2-3. 正九角形の一辺の長さを a 、一番短い対角線の長さを b とし、 $x = \frac{b}{a}$ と置くと、 x は、3 次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解である。

(証明)

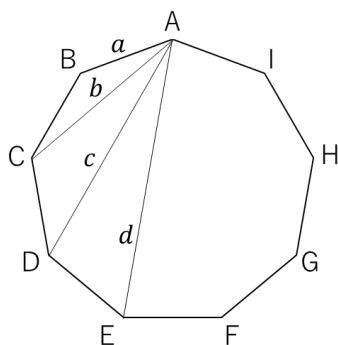


図 3. 正九角形と対角線

図 3 のように、正九角形の一辺の長さを a 、3 種類の対角線の長さをそれぞれ b, c, d とする。この正九角形は円に内接し、四角形 ABCD、ABDF、ABDG も円に内接するのでトレミーの定理より、

$$a^2 + ac = b^2 \quad (2.3.1)$$

$$ab + bd = cd \quad (2.3.2)$$

$$ac + bc = cd \quad (2.3.3)$$

となる。さらに、正九角形の一辺とそれぞれの対角線の長さの比を

$$x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}, z = \frac{d}{a}$$

と置くと、(2.3.1)、(2.3.2)、(2.3.3)式は、

$$1 + y = x^2 \quad (2.3.4)$$

$$x + xz = yz \quad (2.3.5)$$

$$y + xy = yz \quad (2.3.6)$$

となる。そして、(2.3.6)式より、

$$y + xy = yz$$

$$z = 1 + x \quad (2.3.7)$$

となる。そこで、(2.3.7)式を(2.3.5)式に代入すると、

$$x + xz = yz$$

$$x + x(1 + x) = y(1 + x)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2x}{1 + x} \quad (2.3.8)$$

となる。そして、(2.3.8)式を(2.3.4)式に代入すると、

$$1 + y = x^2$$

$$1 + \frac{x^2 + 2x}{1 + x} = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 = 0 \quad (2.3.9)$$

となる。したがって、正七角形の一辺と対角線の比 $\frac{b}{a}$ は(2.3.9)式の解である。

(証明終)

3. 正 n 角形の隣接行列

正多角形の各頂点に順番に番号を振り、正多角形を隣接行列で表す。その隣接行列の固有値がその正多角形の辺と対角線の比と関係すること示す。

3-1. 正五角形の隣接行列と 2 次方程式

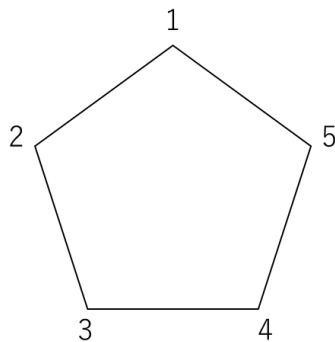


図 4. 各頂点に番号を振った正五角形

正五角形の場合について、図のように、図形の頂点に順に番号を振り、正五角形を隣接行列 A_5 で表す。

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 3-1. 命題 2-1 の正五角形の一辺の長さ と対角線の長さの比 x について、 $\lambda = -x$ と置くと、 λ は隣接行列 A_5 の固有値となる。

(証明)

隣接行列 A_5 の固有多項式を計算すると、

$$P_{A_5}(\lambda) = \det(A_5 - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda - 1)^2$$

となる。よって、固有値 λ の 1 つは、

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \tag{3.1.1}$$

を満たす。したがって、 $\lambda = -x$ と置くと、

$$x^2 - x - 1 = 0$$

が得られる。

(証明終)

3-2. 正七角形の隣接行列と 3 次方程式

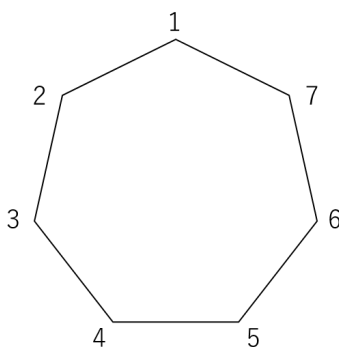


図 5. 各頂点に番号が振られた正七角形

正七角形の場合について、図のように、図形の頂点に順に番号を振り、正七角形を隣接行列 A_7 で表す。

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 3-2. 命題 2-2 の正七角形の一辺の長さとお対角線の長さの比 x について、 $\lambda = -x$ と置くと、 λ は隣接行列 A_7 の固有値となる。

(証明)

隣接行列 A_7 の固有多項式を計算すると、

$$P_{A_7}(\lambda) = \det(A_7 - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1)^2$$

となる。よって、隣接行列 A_7 の固有値 λ の 1 つは、

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

を満たす。したがって、 $\lambda = -x$ と置くと、

$$-(x^3 - x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (3.2.1)$$

が得られる。

(証明終)

3-3. 正九角形の隣接行列と 3 次方程式

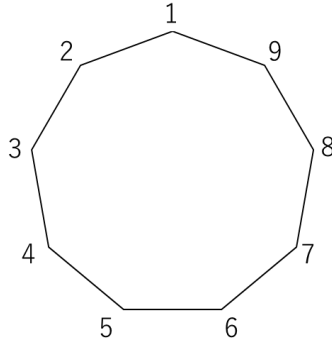


図 6. 各頂点に番号が振られた正九角形

正九角形の場合について、図のように、図形の頂点に順に番号を振り、正七角形を隣接行列 A_9 で表す。

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 3-3. 命題 2-3 の正九角形の一辺の長さとお対角線の長さの比 x について、 $\lambda = -x$ と置くと、 λ は隣接行列 A_9 の固有値となる。

(証明)

隣接行列 A_9 の固有多項式を計算すると、

$$P_{A_9}(\lambda) = \det(A_9 - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2(\lambda^3 - 3\lambda + 1)^2$$

となる。よって、隣接行列 A_9 の固有値 λ の 1 つは、

$$\lambda^3 - 3\lambda + 1 = 0$$

を満たす。したがって、 $\lambda = -x$ と置くと、

$$-(x^3 - 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 = 0 \quad (3.2.1)$$

が得られる。

4. チェビシエフ多項式

チェビシエフ多項式からチェビシエフの定理を用いて、方程式を導出する。

まず、チェビシエフ多項式 $T_n(x)$ とは、

$$T_1(x) = x, T_2 = 2x^2 - 1$$

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

を満たすものである。そして、以下の定理が知られている。

チェビシエフの定理. 全ての自然数 n に対して、

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$$

が成り立つ。この方程式をチェビシエフ方程式という。

4-1.5 次のチェビシエフ多項式と 2 次方程式

命題 4-1. $t = \cos \frac{\pi}{5}$ と置くと、5 次のチェビシエフ方程式は

$$(t+1)(4t^2-2t-1)^2=0$$

であり、さらに、 $t = \frac{1}{2}x$ と置くと、 x は命題 2-1 の正五角形の一辺の長さ と対角線の長さの比から得られる方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解となる。

(証明)

チェビシエフ多項式の漸化式から、 $T_5(x)$ まで求めると、

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

となる。

チェビシエフの定理より、 $\cos 5\theta$ のチェビシエフ方程式は、

$$\cos 5\theta = T_5(\cos \theta)$$

となる。そして、 $T_5(x)$ より、

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

となる。ここで、 $\theta = \frac{\pi}{5}$ と置くと、

$$\cos \pi = 16\cos^5 \frac{\pi}{5} - 20\cos^3 \frac{\pi}{5} + 5\cos \frac{\pi}{5}$$

となる。さらに、 $t = \cos \frac{\pi}{5}$ と置くと、

$$-1 = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

$$\Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(4t^2 - 2t - 1)^2 = 0$$

を得る。ここで、 $t = \frac{1}{2}x$ と置くと、

$$\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \left\{4\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right\}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + 1\right)(x^2 - x - 1)^2 = 0$$

となる。したがって、 $x = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ を解とする

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (4.1.1)$$

が得られる。

(証明終)

4-2. 7 次のチェビシェフ多項式と 3 次方程式

命題 4-2. $t = \cos \frac{\pi}{7}$ と置くと、7 次のチェビシェフ方程式は

$$(t+1)(8t^3 - 4t^2 - 4t + 1)^2 = 0$$

であり、さらに、 $t = \frac{1}{2}x$ と置くと、 x は命題 2-2 の正七角形の一辺の長さとお対角線の長さの比から得られる方程式 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ の解となる。

(証明)

チェビシェフ多項式の漸化式から、 $T_7(x)$ まで求めると、

$$\begin{aligned} T_6(x) &= 2xT_5(x) - T_4(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_7(x) &= 2xT_6(x) - T_5(x) = 2x(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) - (16x^5 - 20x^3 + 5x) \\ &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \end{aligned}$$

となる。

チェビシェフの定理より、 $\cos 7\theta$ のチェビシェフ方程式は、

$$\cos 7\theta = T_7(\cos \theta)$$

となる。そして、 $T_7(x)$ より、

$$\cos 7\theta = 64\cos^7 \theta - 112\cos^5 \theta + 56\cos^3 \theta - 7\cos \theta$$

となる。ここで、 $\theta = \frac{\pi}{7}$ と置くと、

$$\cos \pi = 64\cos^7 \frac{\pi}{7} - 112\cos^5 \frac{\pi}{7} + 56\cos^3 \frac{\pi}{7} - 7\cos \frac{\pi}{7}$$

となる。さらに、 $t = \cos \frac{\pi}{7}$ と置くと、

$$-1 = 64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t$$

$$\Leftrightarrow 64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(8t^3-4t^2-4t+1)^2=0$$

を得る。ここで、 $t=\frac{1}{2}x$ と置くと、

$$\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left\{8\left(\frac{1}{2}x\right)^3-4\left(\frac{1}{2}x\right)^2-4\left(\frac{1}{2}x\right)+1\right\}^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x+1\right)(x^3-x^2-2x+1)^2=0$$

となる。したがって、 $x=2\cos\frac{\pi}{7}$ を解とする

$$x^3-x^2-2x+1=0 \quad (4.2.1)$$

が得られる。

(証明終)

4-3. 9 次のチェビシェフ多項式と 3 次方程式

命題 4-3. $t=\cos\frac{\pi}{9}$ と置くと、9 次のチェビシェフ方程式は

$$(t+1)(2t-1)^2(8t^3-6t-1)^2=0$$

であり、さらに、 $t=\frac{1}{2}x$ と置くと、 x は命題 2-3 の正九角形の一辺の長さとお対角線の長さの比から得られる方程式 $x^3-3x-1=0$ の解となる。

(証明)

チェビシェフ多項式の漸化式から、 $T_9(x)$ まで求めると、

$$\begin{aligned} T_8(x) &= 2xT_7(x) - T_6(x) = 2x(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x) - (32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) \\ &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_9(x) &= 2xT_8(x) - T_7(x) \\ &= 2x(128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1) - (64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x) \\ &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \end{aligned}$$

となる。

チェビシェフの定理より、 $\cos 9\theta$ のチェビシェフ多項式は、

$$\cos 9\theta = T_9(\cos \theta)$$

となる。そして、 $T_9(x)$ より、

$$\cos 9\theta = 256\cos^9\theta - 576\cos^7\theta + 432\cos^5\theta - 120\cos^3\theta + 9\cos\theta$$

となる。ここで、 $\theta=\frac{\pi}{9}$ と置くと、

$$\cos \pi = 256\cos^9\frac{\pi}{9} - 576\cos^7\frac{\pi}{9} + 432\cos^5\frac{\pi}{9} - 120\cos^3\frac{\pi}{9} + 9\cos\frac{\pi}{9}$$

となる。さらに、 $t=\cos\frac{\pi}{9}$ と置くと、

$$\begin{aligned} -1 &= 256t^9 - 576t^7 + 432t^5 - 120t^3 + 9t \\ \Leftrightarrow 256t^9 - 576t^7 + 432t^5 - 120t^3 + 9t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(2t-1)^2(8t^3-6t-1)^2=0$$

を得る。ここで、 $t=\frac{1}{2}x$ と置くと、

$$\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left\{2\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right\}^2\left\{8\left(\frac{1}{2}x\right)^3-6\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right\}^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x+1\right)(x-1)^2(x^3-3x-1)^2=0$$

となる。したがって、 $x=2\cos\frac{\pi}{9}$ を解とする

$$x^3-3x-1=0 \quad (4.3.1)$$

が得られる。

(証明終)

5. 隣接行列の固有多項式

チェビシェフ多項式はチェビシェフの漸化式より導出することができる。そして、チェビシェフ多項式と隣接行列の固有多項式の共通点から、隣接行列の固有多項式もなんらかの漸化式から導出できるのではないかと考えた。

5-1. 隣接行列の固有多項式の漸化式

まず、漸化式

$$R_{n+2}(\lambda) = \lambda \cdot R_{n+1}(\lambda) - R_n(\lambda)$$

$$R_1(\lambda) = \lambda, \quad R_2(\lambda) = \lambda^2 - 2$$

を考える。

$n=3$ の場合、

$$R_3(\lambda) = \lambda \cdot R_2(\lambda) - R_1(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda^2 - 2) - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda$$

$n=4$ の場合、

$$R_4(\lambda) = \lambda \cdot R_3(\lambda) - R_2(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda^3 - 3\lambda) - (\lambda^2 - 2) = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 2$$

$n=5$ の場合、

$$R_5(\lambda) = \lambda \cdot R_4(\lambda) - R_3(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2) - (\lambda^3 - 3\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda$$

となる。ここで、例として多項式 $R_5(\lambda) - 2$ を計算すると、

$$\begin{aligned} R_5(\lambda) - 2 &= \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

となり、正五角形の隣接行列の固有多項式が得られる。

よって、上の漸化式から得られる n 次の多項式を -2 することで、正 n 角形の隣接行列の固有多項式が得られると考えられる。

5-2. 漸化式の一般化

ここで、上の漸化式を解いて一般化する。

上の漸化式から特性方程式

$$x^2 - \lambda \cdot x + 1 = 0$$

が得られ、その解は、 $x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ となる。この2つの解をそれぞれ A 、 B とすると、

$$R_{n+2} - B \cdot R_{n+1} = A(R_{n+1} - B \cdot R_n) \quad (5.2.1)$$

$$R_{n+2} - A \cdot R_{n+1} = B(R_{n+1} - A \cdot R_n) \quad (5.2.2)$$

となる。(5.2.1)式より、 $R_{n+1} - B \cdot R_n$ は公比 A の等比級数となるから、

$$R_{n+1} - B \cdot R_n = A^{n-1}(R_2 - B \cdot R_1) \quad (5.2.3)$$

となる。また、(5.2.2)式より、 $R_{n+1} - A \cdot R_n$ は公比 B の等比級数となるから、

$$R_{n+1} - A \cdot R_n = B^{n-1}(R_2 - A \cdot R_1) \quad (5.2.4)$$

となり、以上の2式、(5.2.3)、(5.2.4)式を連立して計算すると、

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{A^{n-1}(R_2 - B \cdot R_1) - B^{n-1}(R_2 - A \cdot R_1)}{A - B} \\ &= \frac{A^{n-1}\{(\lambda^2 - 2) - B \cdot \lambda\} - B^{n-1}\{(\lambda^2 - 2) - A \cdot \lambda\}}{A - B} \\ &= \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^n \\ &= A^n + B^n \end{aligned}$$

となる。

5-3. 漸化式の証明

漸化式が正しいことを確認するために、 $n = 20$ までの正多角形の隣接行列から得られる固有多項式と漸化式から得られる固有多項式を比較するために表1と表2にまとめた。

表 1. 隣接行列から得られる多項式

n	隣接行列から得られる多項式
3	$(x - 2)(x + 1)^2$
4	$(x - 2)x^2(x + 2)$
5	$(x - 2)(x^2 + x - 1)^2$
6	$(x - 2)(x - 1)^2(x + 1)^2(x + 2)$
7	$(x - 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1)^2$
8	$(x - 2)x^2(x + 2)(x^2 - 2)^2$
9	$(x - 2)(x + 1)^2(x^3 - 3x + 1)^2$
10	$(x - 2)(x + 2)(x^2 - x - 1)^2(x^2 + x - 1)^2$

11	$(x-2)(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)^2$
12	$(x-2)(x-1)^2x^2(x+1)^2(x+2)(x^2-3)^2$
13	$(x-2)(x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1)^2$
14	$(x-2)(x+2)(x^3-x^2-2x+1)^2(x^3+x^2-2x-1)^2$
15	$(x-2)(x+1)^2(x^2+x-1)^2(x^4-x^3-4x^2+4x+1)^2$
16	$(x-2)x^2(x+2)(x^2-2)^2(x^4-4x^2+2)^2$
17	$(x-2)(x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1)^2$
18	$(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x+2)(x^3-3x-1)^2(x^3-3x+1)^2$
19	$(x-2)(x^9+x^8-8x^7-7x^6+21x^5+15x^4-20x^3-10x^2+5x+1)^2$
20	$(x-2)x^2(x+2)(x^2-x-1)^2(x^2+x-1)^2(x^4-5x^2+5)^2$

表 2. 漸化式から得られる多項式

n	漸化式から得られる多項式
3	$(x-2)(x+1)^2$
4	$(x-2)x^2(x+2)$
5	$(x-2)(x^2+x-1)^2$
6	$(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x+2)$
7	$(x-2)(x^3+x^2-2x-1)^2$
8	$(x-2)x^2(x+2)(x^2-2)^2$
9	$(x-2)(x+1)^2(x^3-3x+1)^2$
10	$(x-2)(x+2)(x^2-x-1)^2(x^2+x-1)^2$
11	$(x-2)(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)^2$
12	$(x-2)(x-1)^2x^2(x+1)^2(x+2)(x^2-3)^2$
13	$(x-2)(x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1)^2$
14	$(x-2)(x+2)(x^3-x^2-2x+1)^2(x^3+x^2-2x-1)^2$
15	$(x-2)(x+1)^2(x^2+x-1)^2(x^4-x^3-4x^2+4x+1)^2$
16	$(x-2)x^2(x+2)(x^2-2)^2(x^4-4x^2+2)^2$
17	$(x-2)(x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1)^2$
18	$(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x+2)(x^3-3x-1)^2(x^3-3x+1)^2$
19	$(x-2)(x^9+x^8-8x^7-7x^6+21x^5+15x^4-20x^3-10x^2+5x+1)^2$
20	$(x-2)x^2(x+2)(x^2-x-1)^2(x^2+x-1)^2(x^4-5x^2+5)^2$

表 1 と表 2 から比較すると $n = 20$ までは一致していることが確認できた。

そこで、漸化式から得られる多項式が一般的に正しいことを示すには、隣接行列から得られる固有多項式の一般化を示す必要がある。

ここでは、正多角形の隣接行列が巡回行列になっていることから、巡回行列の公式から

一般化できるのではないかと考えた。

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} (x_0 + \zeta_k \cdot x_1 + \zeta_k^2 \cdot x_2 + \cdots + \zeta_k^{n-1} \cdot x_{n-1})$$

$$(\zeta_k = \sqrt[n]{1})$$

6. 参考文献

1. 『正七角形と 3 次方程式』 小野里 武久

https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/92/92-8.pdf

令和5年度

総合理工学科 卒業論文

テオ・ヤンセン機構を利用した、
車いすのミニチュア制作

令和6年2月19日 提出

総合理工学科 機械システム系

津下 純一

指導教員

松田 修

Abstract

The station in my hometown is over-track train station that has stairs only. Furthermore an ticket gate located at the top of the stairs. Therefore, it is not suitable for people using wheelchairs. I found a photo on the Internet of a person in a wheelchair trying to climb stairs using just his arms. I thought that if there was a wheelchair that could climb stairs using just the strength of the arms, it would expand the scope of the lives of the people who use it. In this research, we will take on the challenge of developing such a wheelchair. For this purpose, we adopted Theo Janssen's Strandbeest mechanism. Specifically, we will design a miniature wheelchair using this mechanism and produce it using a 3D printer. When I placed this miniature on a flat table, it did not work. Therefore, I designed a support for it and it worked. It was also unable to climb stairs because its legs did not go up.

Keywords : Theo Jansen, Strandbeest, Climb, Stairs, Miniature

目次

1	はじめに.....	4
2	テオ・ヤンセン機構を使った車いすに関する先行研究.....	4
2.1	テオ・ヤンセン機構を4セット用いた車いす.....	4
2.2	膝関節と足関節の連動による階段昇降可能な無動力大腿義足の提案.....	5
3	テオ・ヤンセン機構を取り入れた車いすのイメージ.....	6
4	テオ・ヤンセン機構を厚紙で試作.....	6
5	テオ・ヤンセン機構の3Dモデル案.....	9
6	各部品的设计と製作.....	9
6.1	車輪部.....	10
6.2	脚部のリンク.....	11
6.3	足先のリンク(三角プレート).....	12
6.4	ジョイントピンとスペーサー.....	14
6.5	胴体部(ギア収納ボックス).....	17
6.6	かかと部.....	19
7	動作確認と分析.....	21
7.1	動作確認.....	21
7.2	分析.....	22
8	考察.....	23
9	結論.....	23
10	謝辞.....	23
	文献.....	24
	References.....	24

1 はじめに

著者の実家にある駅は、階段のみがある橋上駅（改札が跨線橋にある駅）で、跨線橋に接続するエレベータがない。したがって、車いすを利用している人は、この駅を利用できない状況にある。本研究では、日常的に車いすを使って移動する人が、階段を上るにはどうしたらよいかというテーマについてアプローチする。

当然であるが、これまでこの問題について、様々な工学的なアプローチがなされている。例えば、階段に昇降用リフトを取り付けて、車いすをリフトに乗せて昇降するものや、車いす自体に昇降用のクローラーを取り付け、電気アシストを使って、介護者が階段を上る車いすを引っ張り上げるものがある。特に、興味を引いたものに、介助者なしで階段昇降が可能なものがあった。それは、車いすを障がい者自身が昇降機に車いすをセットして、昇降機についているハンドルを操作して、階段を上るというものである。

ところが、特に、障がい者スポーツをやっている人の中には、バランスをとりながら上手に階段を降りる人たちがいる。しかし階段を上るときはかなりの腕力を使って上っている。インターネットでこのようなシーンを見て、実は、介護者なしで、自力で階段を昇降したい人たちがいるのだということを感じた。本研究の目的は、普段使っている車いすに、なるべく少ない機能を追加して、自力で階段を昇降できる車いすの開発を目指す。

2 テオ・ヤンセン機構を使った車いすに関する先行研究

2.1 テオ・ヤンセン機構を4セット用いた車いす

本研究でヒントとなるテオ・ヤンセン機構を使った車いすに関する U.Kakati 等が行った研究「Design and Fabrication of a Walking Chair using Linkage Mechanism」(U. Kakati et al., 2006) をまとめておく。

インドの路上には障がいをもつ貧しい人々がおり、さまざまな資金源で生計を立てている。地形や道路状況のせいで、これらの人々は公共施設に適応することが難しく、健常者からの援助を受けなくてはならない。しかし、このことは障がいのある人だけでなく、それを支援する人たちにもストレスを与えている。さらに、移動障がいのある人口は農村部に居住しており、彼らの悩みを解決し、発展させることが非常に重要となっている。この研究は、インドの地形に適応できるような車いすを開発することにより、それを安価で社会のあらゆる層が利用できるようにすることを考えている。その結果、移動障がいのある人たちの移動が自由にできるようになるものと考え、この研究プロジェクトが作られたようである。そして、プロジェクトの目的である安価で自立し、かつ様々な地形で小さな障害物を乗り越えられる車いすを開発するという目的のために、テオ・ヤンセン機構に着目している。

U. Kakati 等も、第 2 節で述べたテオ・ヤンセン機構を 4 セット用いた車いすを提案している。その際、片側を 2 セットのテオ・ヤンセン機構とし、ハンド駆動で、車いすを動かす仕組みになっている。最初は、電動モーター駆動やレッグペダル駆動も考えていたようであるが、電動モーター駆動の生産コスト、レッグペダル駆動は車いすを使用する人たちにとっては適切でないということなどから、両手でハンドペダルを回転させて車いすを動かす方法を採用している。より具体的には、車いすに腰掛けると目の前の胸の位置に 2 つのハンドルがある。それを交互に回転させると、テオ・ヤンセン機構が動き出し、車いすが前進するという仕組みである。

U. Kakati 等が実際に制作した車いすの動作テストの結果の記述を以下に列挙する。リンク機構の動作自体は成功しているが、車いすの重量が重いという点、そのため手で回すのにかなりの力が必要であるというようにまとめられている。

- The weight of the entire set up is quite heavy.
- The system works fine when in no load condition.
- The inaccuracy during the fabrication major cause for not working on ground.
- The effort required to move the system is quite high.
- The phase or the synchronous movement is perfect hence the linkage system is made well.
- The linkage system works to propel the set up forward.
- The Linkage system with accurate machining can be further developed into mainstream chairs.

2.2 膝関節と足関節の連動による階段昇降可能な無動力大腿義足の提案

また、本研究でヒントとなる、足先に関する藤野良太等が行った研究、「膝関節と足関節の連動による階段昇降可能な無動力大腿義足の提案」(藤野他, 2018)

近年、国内・欧米で下肢切断者が年々増加している。それに伴って義足の需要も増加している。下肢切断者は、義足の使用で歩行能力を再獲得することが可能になる。

これまでこの論文の著者は、広い稼働域を持った油圧を使用した義足を制作しているしながら、階段昇降開始時に手動で絞り弁の操作が必要で、また歩容の再現が不十分である。そこで、機構各部の改良、平地・階段昇降での脚・膝関節角度測定を行ったようである。その結果、健常者のような歩行を行っていた。また、安定して階段を昇れていた。しかしながら、階段を降りる際に不安定な歩行になるというようにまとめられている。

3 テオ・ヤンセン機構を取り入れた車いすのイメージ

以下の図1が、本研究で考えているテオ・ヤンセン機構を取り入れた車いすのイメージ図である。通常の車いすでは、両サイドにある車輪を手で回して前進する。本研究で考えている車いすにおいても、両サイドにリムを取りつけ、それを回転させることで、回転運動をテオ・ヤンセン機構の動力に変え、車いすを歩行させ前進させるものとする。

現段階においては、想像ではあるが、平坦な道になれば、砂利道であっても、また少しぐらいの段差があったとしても、この車いすはある程度の役割を果たすことができると考えている。

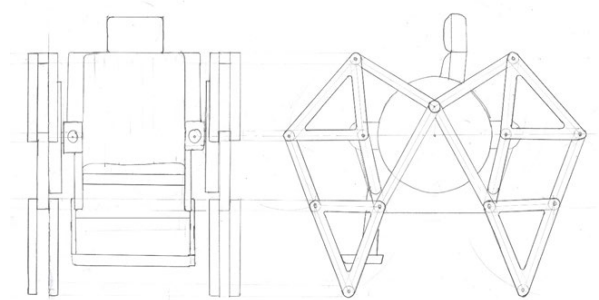


図1. テオ・ヤンセン機構を取り入れた車いすのイメージ

4 テオ・ヤンセン機構を厚紙で試作

普段使っている車いすに、なるべく少ない機能を追加して、自力で階段を昇降できる車いすの開発を目指すために、テオ・ヤンセンの機構を利用して、移動できるようにすればよいのではないかと考えた。

テオ・ヤンセン機構とは、オランダの彫刻家 Theo Jansen 氏により制作された、下の図2のリンクの長さ（ホーリーナンバー）で構成されたリンク機構である。

リンク	長さ
a	38.0
b	41.5
c	39.3
d	40.1
e	55.8
f	39.4
g	36.7
h	65.7
i	49.0
j	50.0
k	61.9
l	7.8
m	15.0

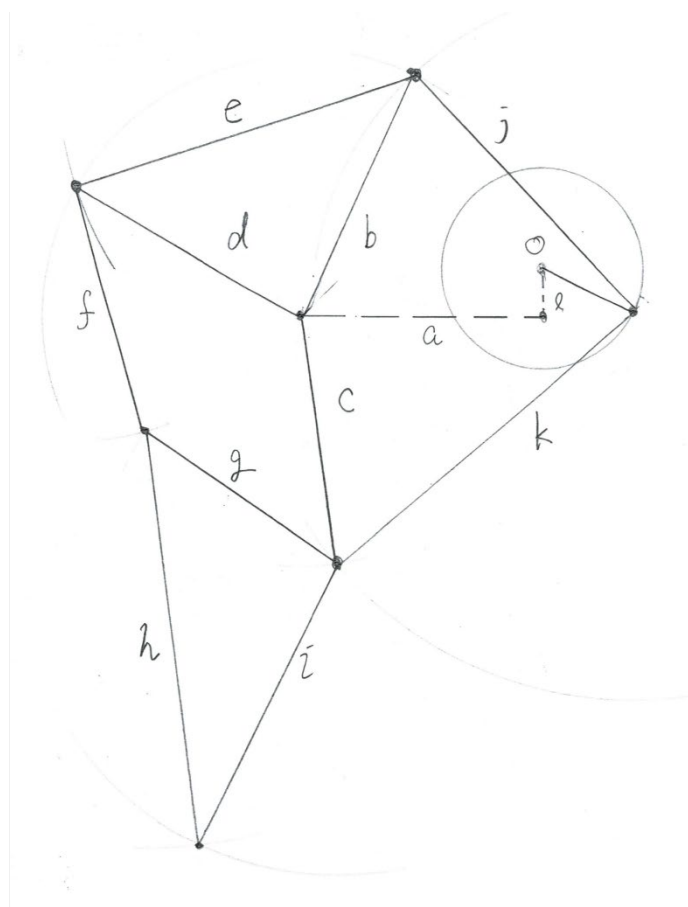


図 2. ホーリーナンバー

まずは、テオ・ヤンセン機構を厚さ約 1 mm の厚紙を使って、テオ・ヤンセン機構を製作した (図 3)。

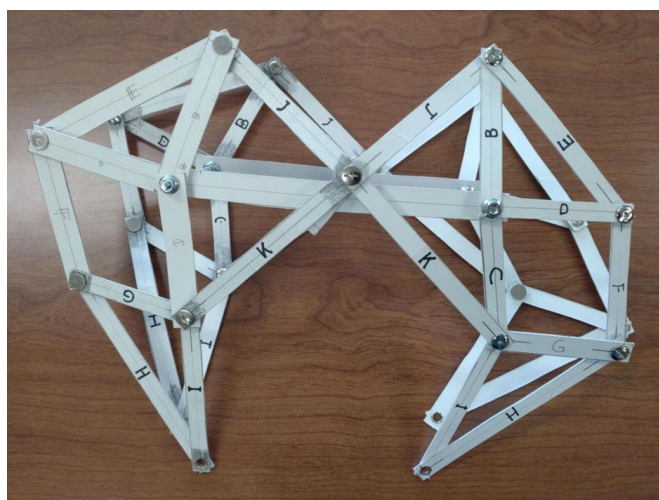


図 3. 厚紙で製作したテオ・ヤンセン機構

今回製作したテオ・ヤンセン機構は、13個の幅1cmのリンクを準備し、それらをジョイントで接合して作った機構を1セットとしたものである。それを4セット作り、2セットを前足と後ろ足と想定してジョイントで接合し、4足の機構を製作した。(表1, 図4)

表 1. テオ・ヤンセン機構の各リンクの長さ

リンクの記号	リンクの長さ (cm)
a	7.6
b	8.3
c	7.9
d	8.0
e	11.2
f	7.9
g	7.3
h	13.1
i	9.8
j	10.0
k	12.4
l	1.6
m	3.0

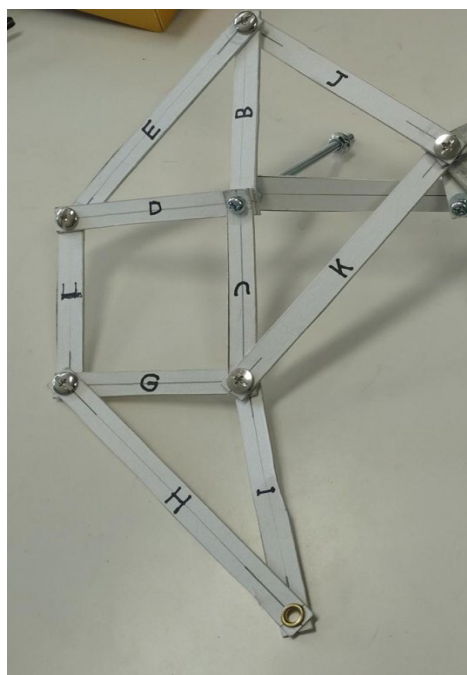


図 4. テオ・ヤンセン機構 (1 セット)

以下の図 5 は、今回想定しているテオ・ヤンセン機構の側面の機構図である．②の円盤を回転させると，⑦と⑧のリンクが動き，リンク⑧と⑤が近づくことにより③と⑤のリンクも近づく．

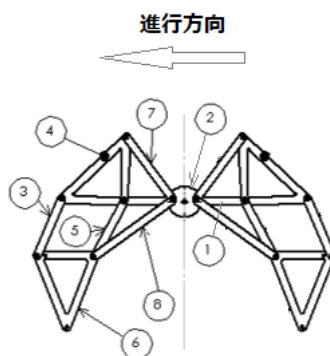


図 5. 側面の機構図

以上の動きから、前脚⑥の先が地面に着地すると同時に、⑥に対応する後ろ脚の先が宙に上がる。その結果、この機構は前進する。

左右の機構をどのようにして動かせば、スムーズな動き、さらには段差を上る動きに繋がるのを、現在、検討中である。

5 テオ・ヤンセン機構の3Dモデル案

厚紙で作ったテオ・ヤンセン機構を3Dプリンタで製作するために、SOLIDWORKSを用いて設計した。(図6、図7)

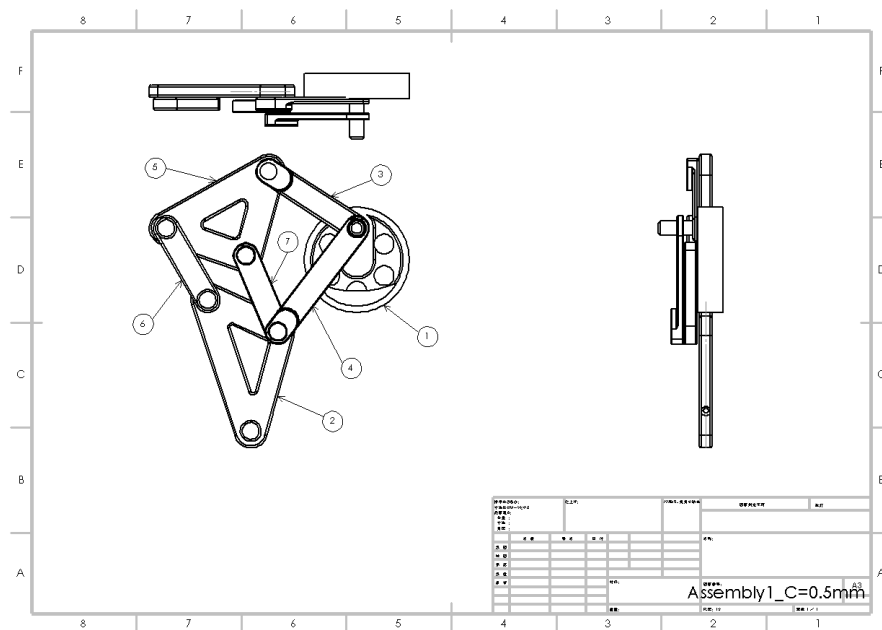


図6. SOLIDWORKSを用いた設計図

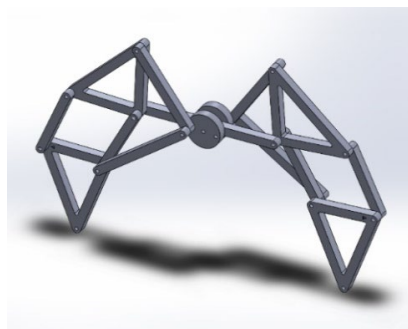


図7. テオ・ヤンセンの機構の3Dモデル

6 各部品の設計と製作

図8は今回製作したテオ・ヤンセン機構の車椅子の完成写真である。この機構を主にハンドル部、脚部、胴体部に分けて説明する。

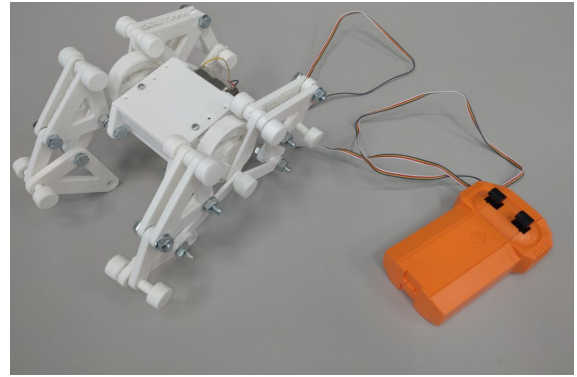
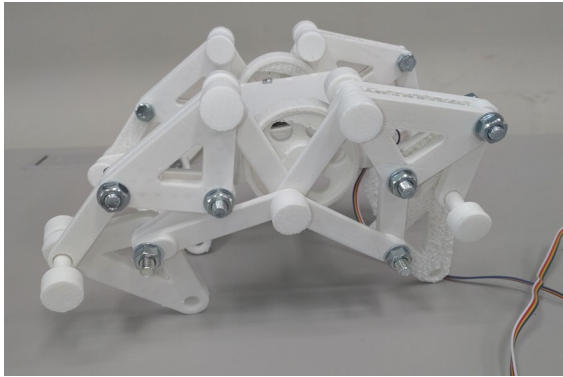


図 8. 機構の写真

以下、テオ・ヤンセン機構の各部品（プレート）の設計図と 3D で作った製作物を列挙する．

6.1 車輪部

図 9 に設計した車輪部を示す．車輪部は、直径 50.00mm とした．図 10 に印刷したものを示す．この車輪は図 2 に示した、ホーリーナンバーのリンク m に相当する部品である．これを回転させることで、テオ・ヤンセン機構の車椅子が前後に動く．

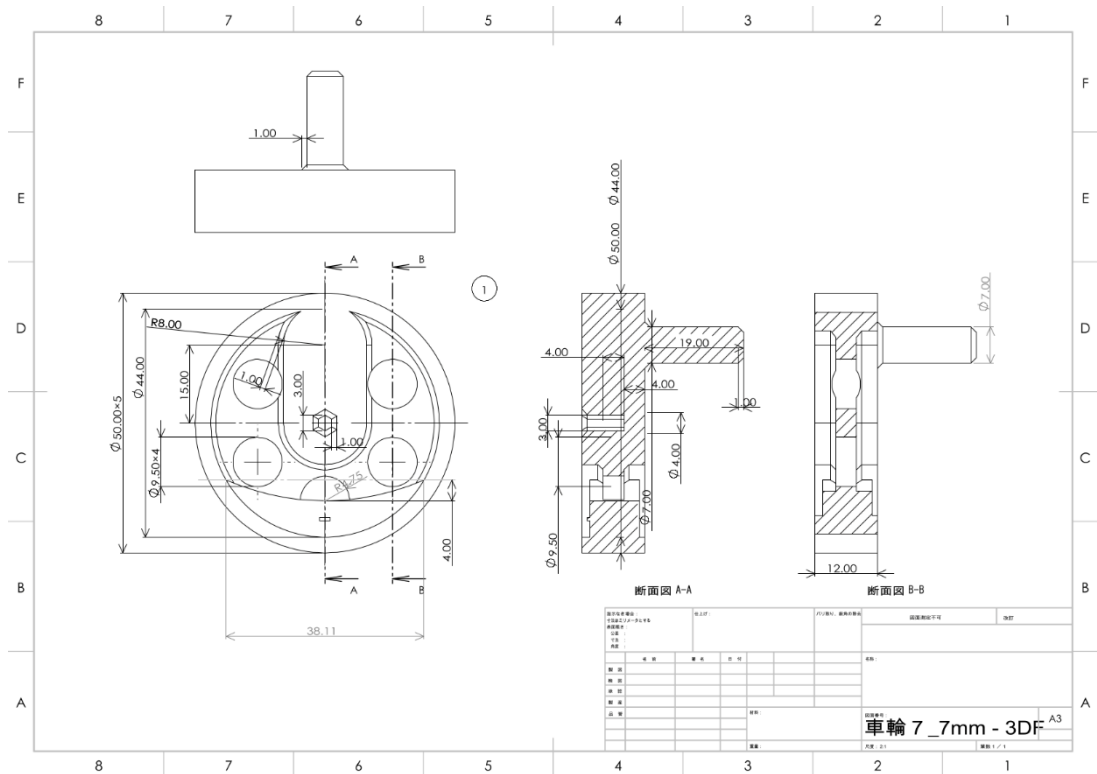


図 9. 車輪部（円盤プレート）の図面



図 10. 3D プリンターで製作したハンドル（円盤プレート）

6.2 脚部のリンク

脚部のリンクは長さが、50.00mm, 61.90mm, 39.4mm, 39.4mm のものを設計し、製作した。（図 11, 図 12）また、55.8, 41.5, 40.10 mm の辺の三角形部品を制作した（）

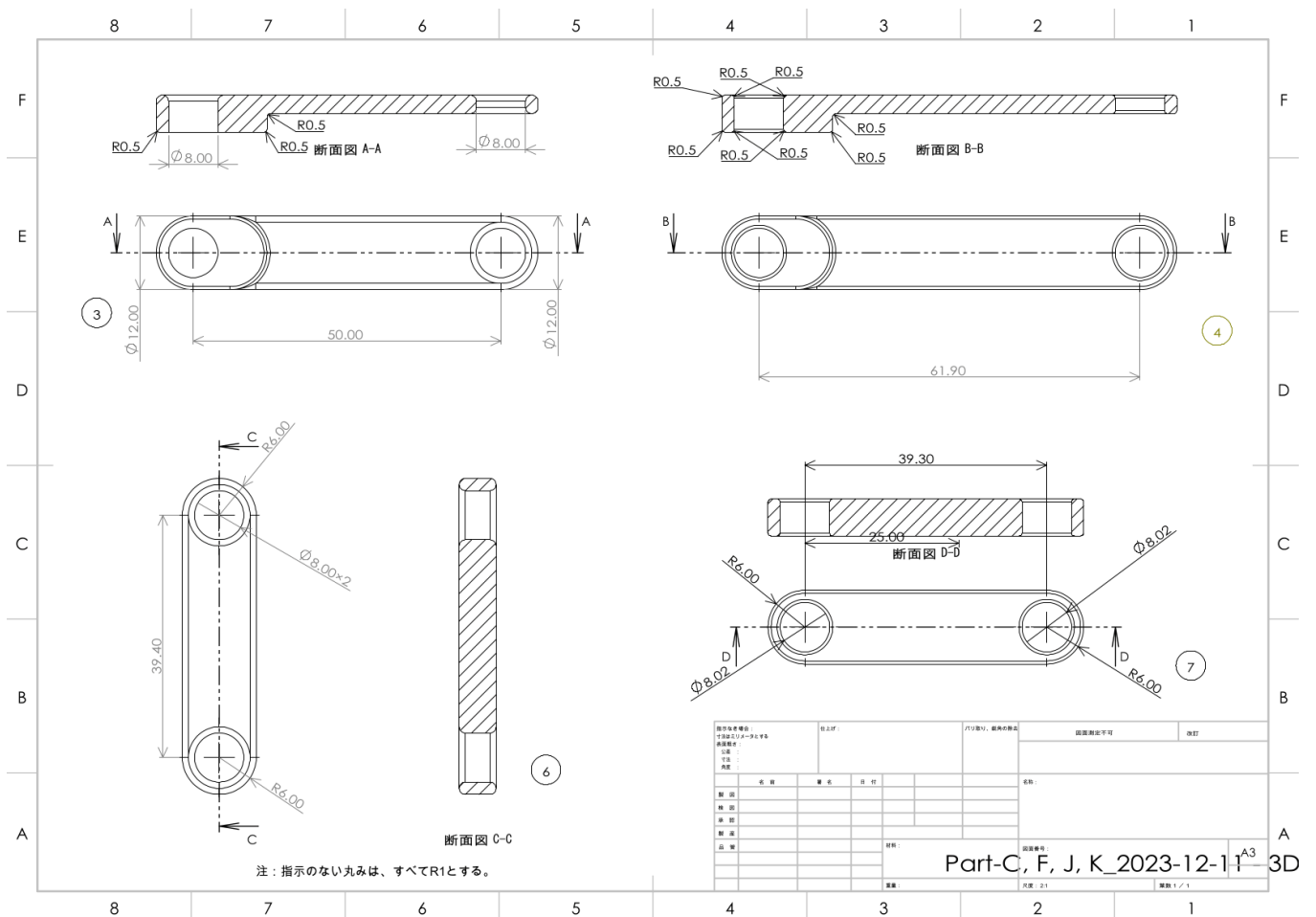




図 12. 3D プリンターで製作した脚部のリンク（図 11 左上）

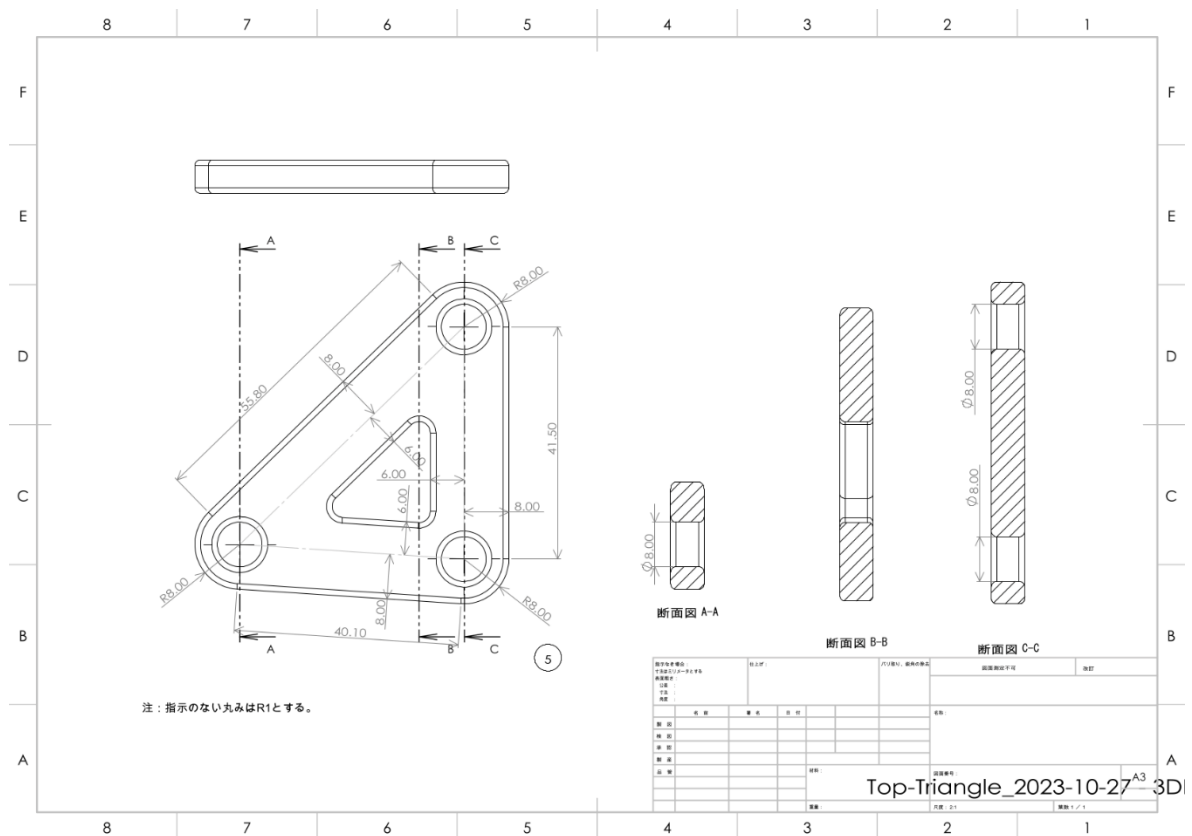


図 13. 脚部の三角形部品の設計図

6.3 足先のリンク（三角プレート）

足先部のリンクである三角形プレートは、36.70mm, 49.00mm, 65.80mm の辺長として設計した。角部は丸みを付けた。（図 14, 図 15）

6.4 ジョイントピンとスペーサー

ジョイントピンは、頭部の長さ 10.00mm、直径 10.00mm、首下部の長さ 30.00mm、直径 7.00mm とした。(図 16, 図 17)

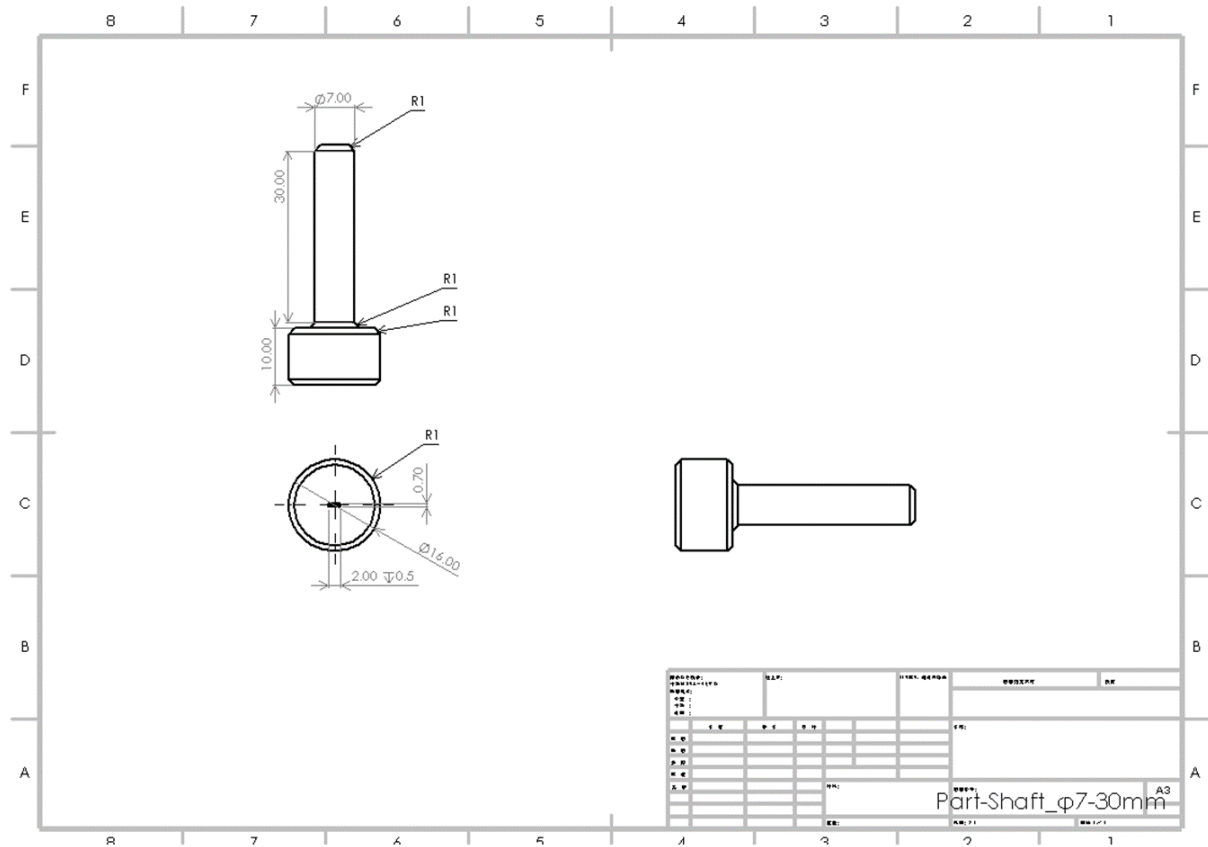


図 16. ジョイントピンの図面



図 17. 3D プリンターで製作したジョイントピン

ジョイントキャップは、直径 16.00mm、厚さ 6.00mm のジョイントキャップも製作した。
(図 18、図 19)

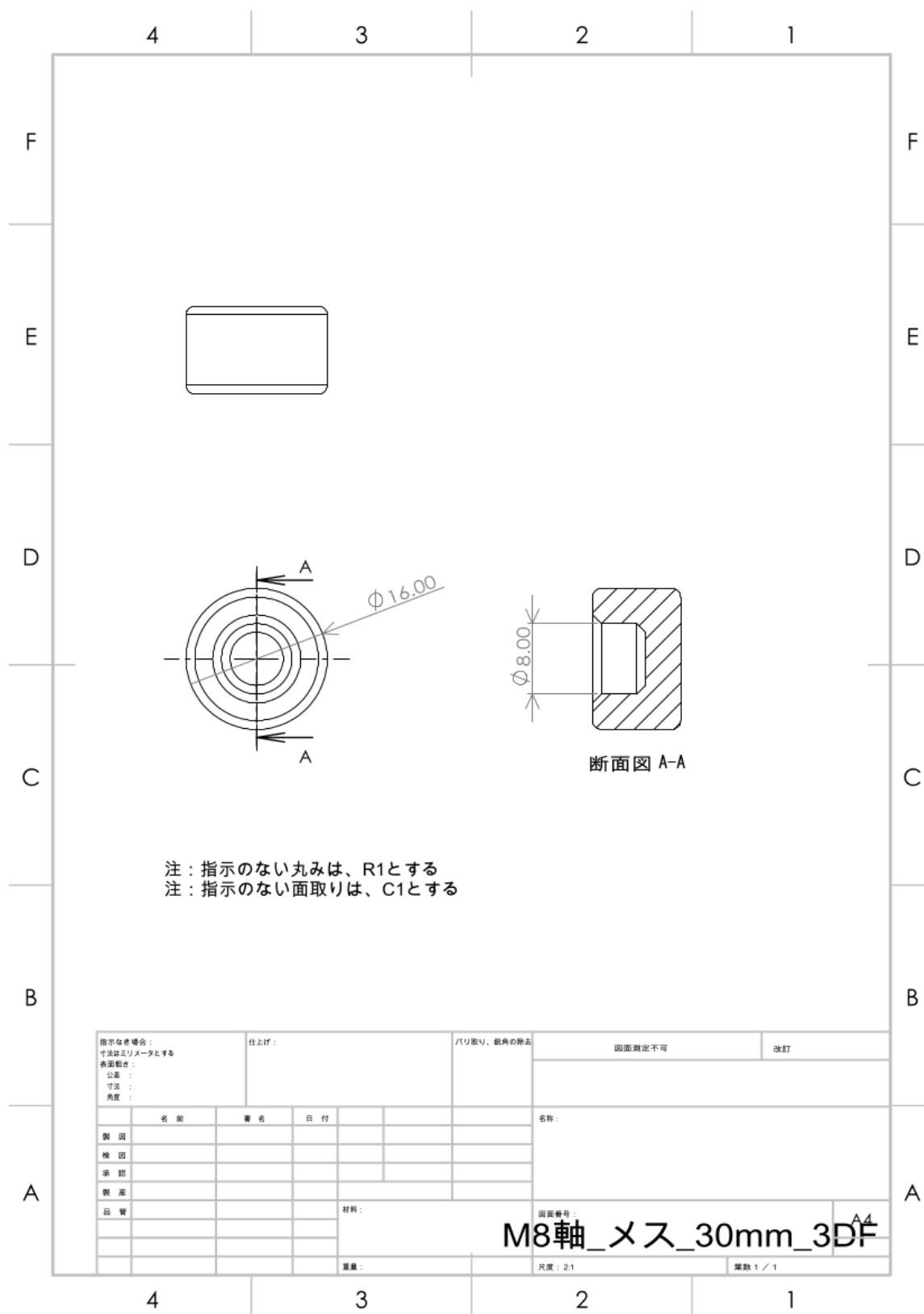
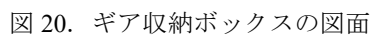


図 18. ジョイントキャップの図面



図 19. 3D プリンターで製作したジョイントキャップ

ギアを入れるための収納ボックスを製作した。(図 20, 図 21) 本来は、ギア収納ボックスの代わりに椅子を設置することになるが、今回はミニチュア模型であるため、ラジコン等で使用するモーター(タミヤ, ダブルギヤボックス(左右独立4速タイプ))をこの内部に入れ、コントローラー(ダブルギヤボックス(左右独立4速タイプ))で、このテオ・ヤンセン機構の車椅子を動かすことにした。



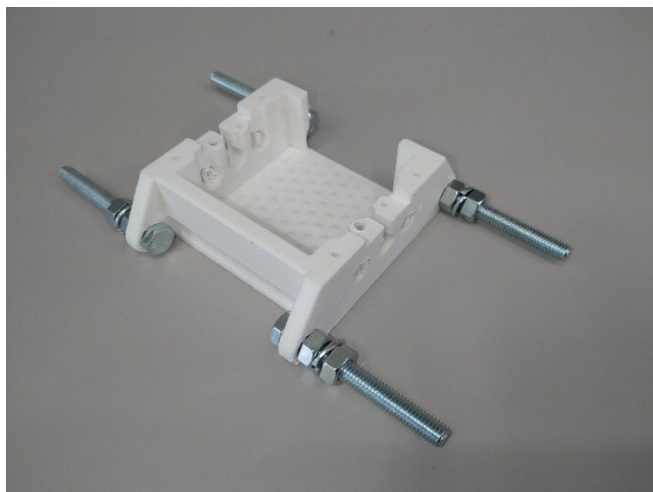


図 21. 3D プリンターで製作したギア収納ボックス

ギア収納ボックスの蓋は、長さ 89.40mm、幅 72.00mm、高さ 26.00mm とした。(図 22、図 23) ジョイントピンとは、ミニチュアである為、両面テープで固定した。

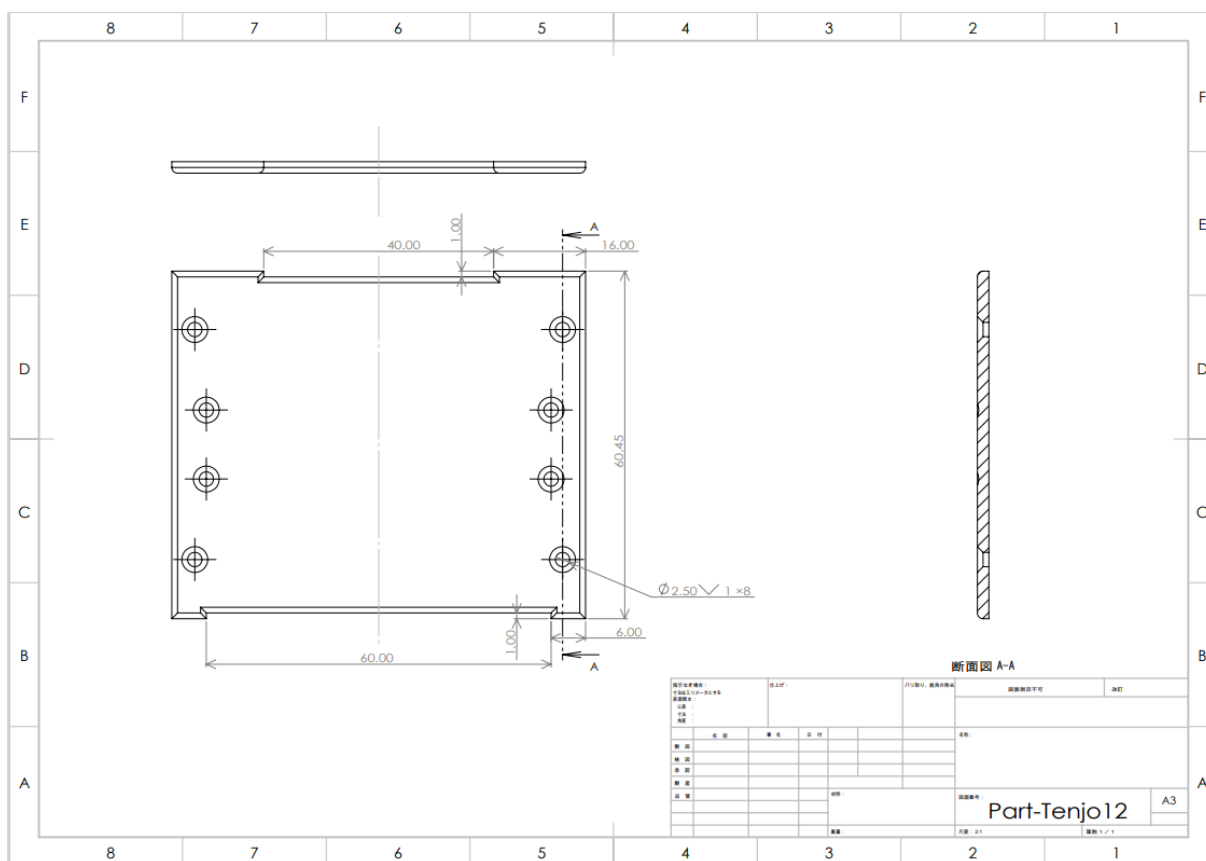


図 22. ギア収納ボックスの蓋の図面

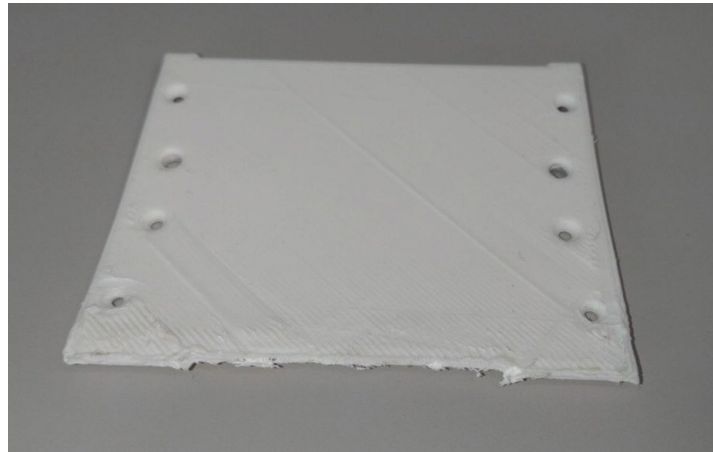


図 23. 3D プリンターで製作したギア収納ボックスの蓋

6.6 かかと部

かかと部の概要を図 24 に示す. Srey らが開発し, 藤野良太らが改良・提案した無動力大腿義足(藤野良太ら, 2018)を参考に, テオ・ヤンセン機構と 3D プリンタの設計に落とし込むために, 2 つのリンクで表現した. かかと部は主にばね部と接地部に分けられる. 両者の設計図を図 25 及び図 26 で示す.

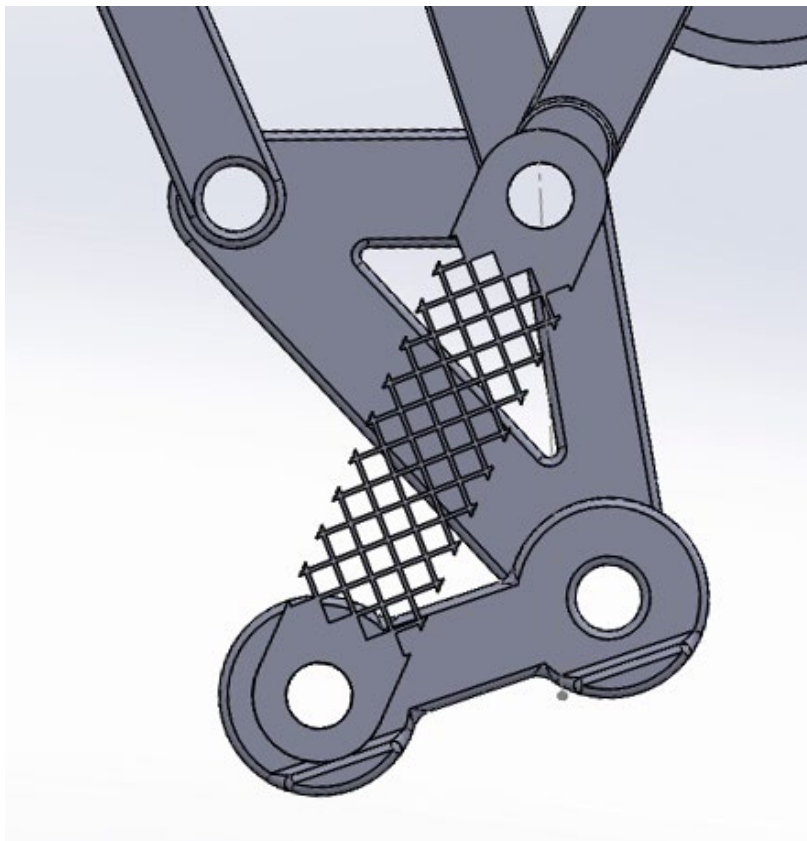


図 24. かかと部

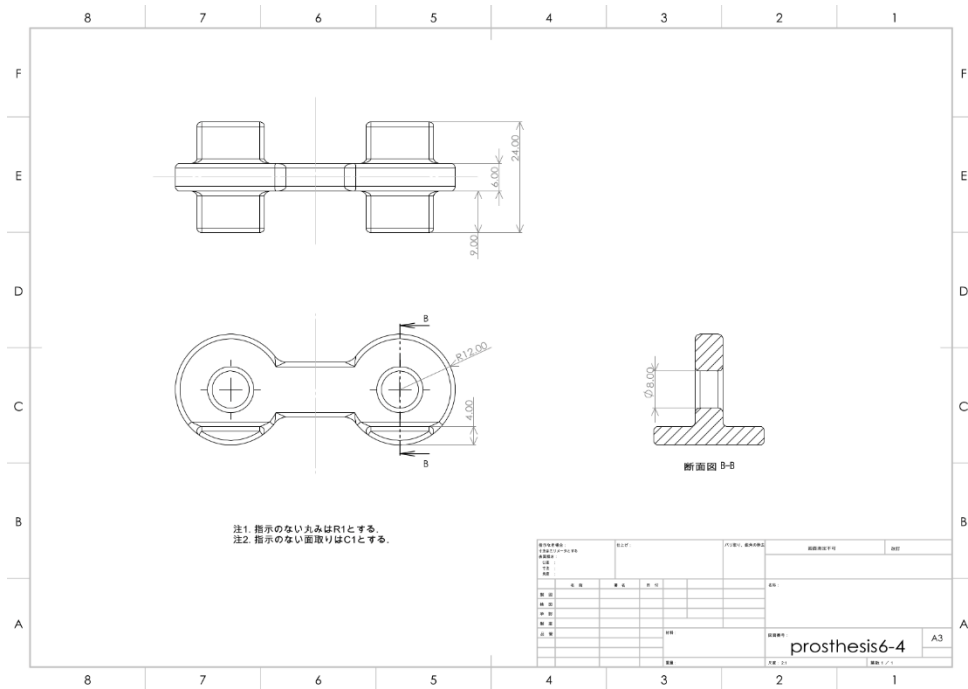


図 25. かかと部の接地部

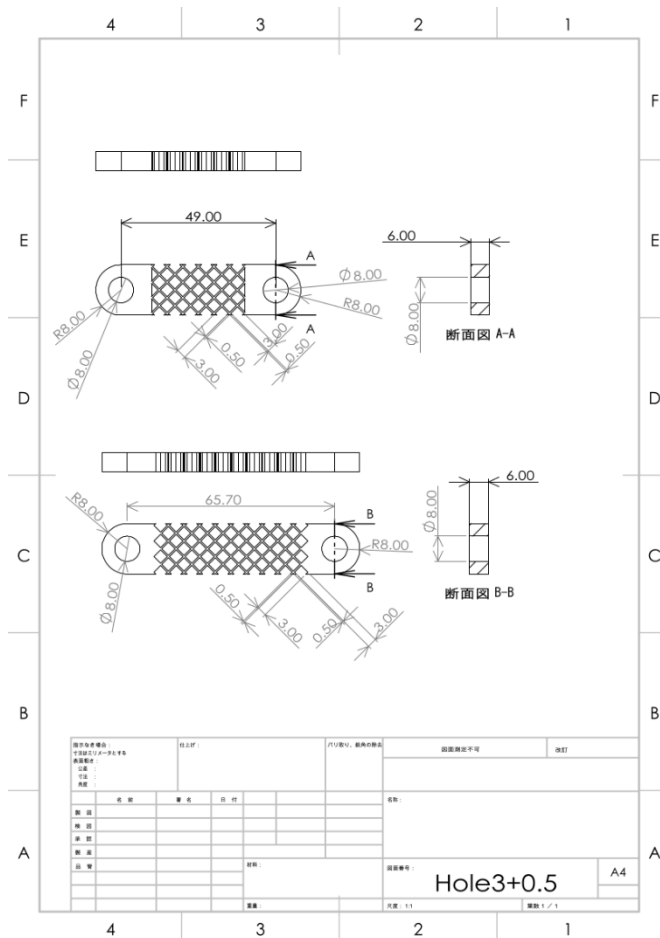


図 26. かかと部のばね部

7 動作確認と分析

7.1 動作確認

はじめに、このミニチュアを平らな机上に置き、動作確認を行った。その結果、動作しないことが分かった。そのため、高さ:90 mm, 左右幅 65 mm, 前後幅 60 mm に示すような段ボール製の支えを作成し、1 mm の厚さのゴムマットを貼り付けた。その動作 Kinovea というソフトウェアを使用して、図 27 及び図 28 に示す。なお、写真の左上の数字は、動画の経過時間(単位:秒)と、フレームの数を示す。

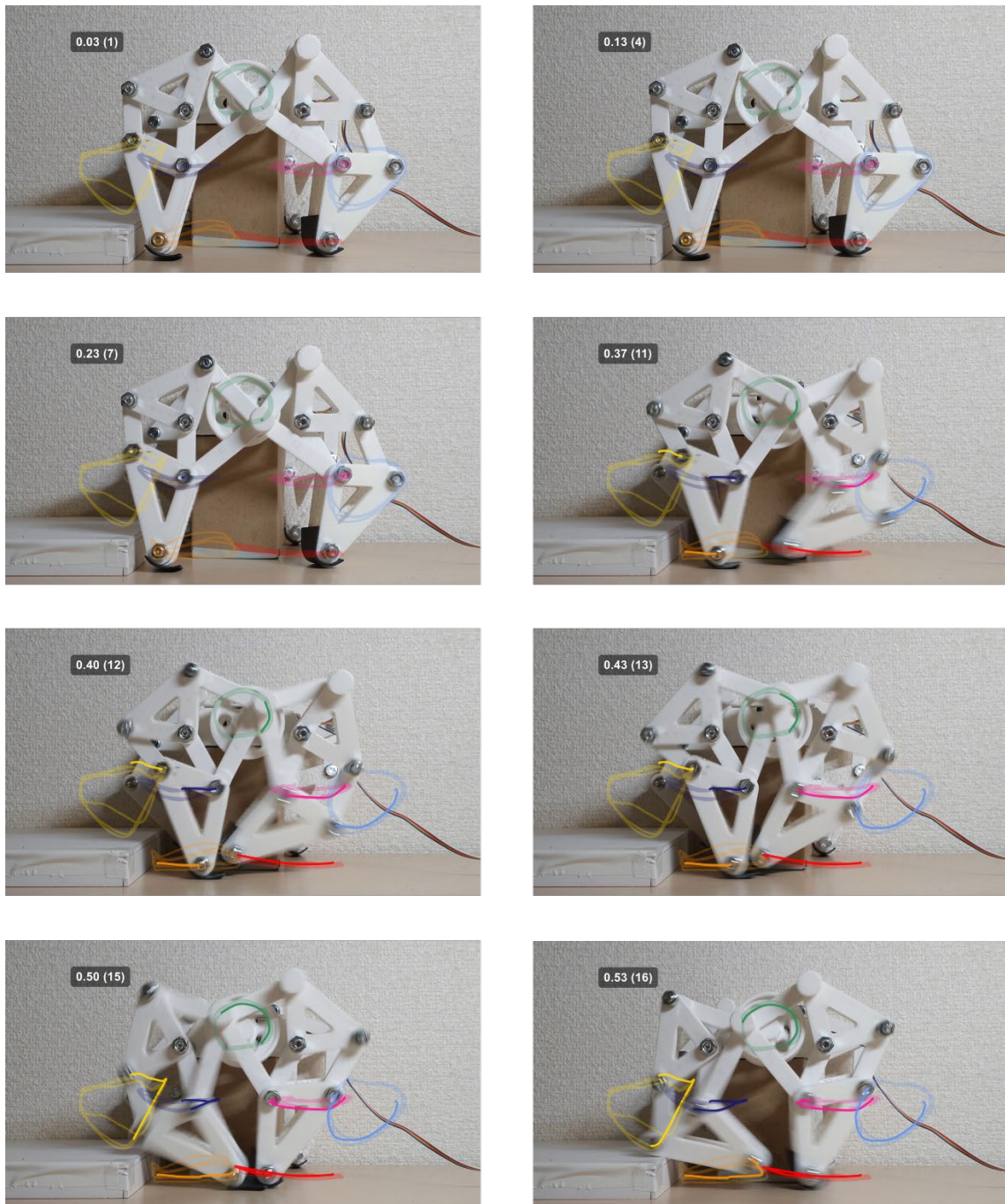


図 27. ミニチュアの動作(1)

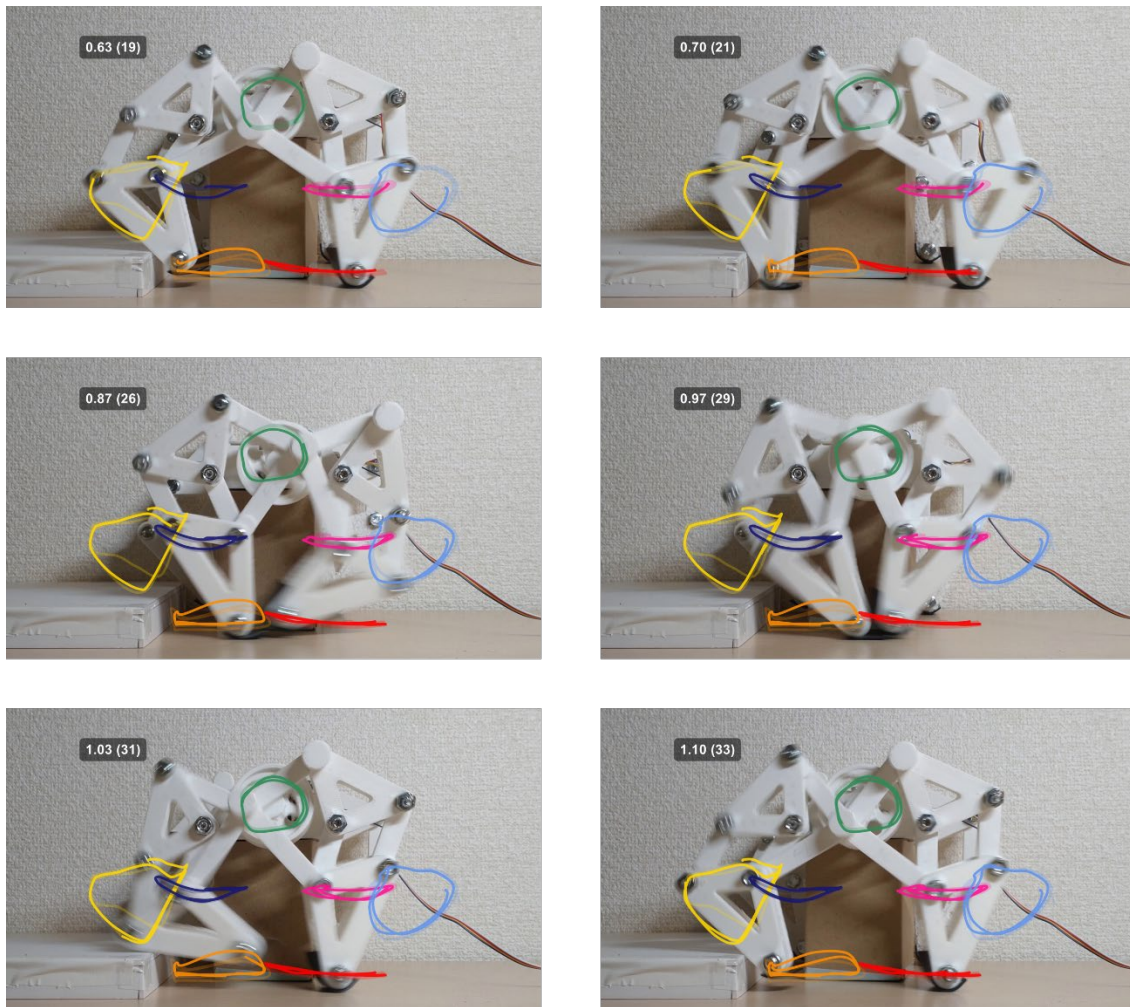


図 28. ミニチュアの動作(2)

7.2 分析

今回の機構は、機構の脚が上がらなかった．その原因として、脚先の角度が後ろ方向に向いていて、段差の上に脚を乗せることができていないからであると考えられる．足先部を次項の図のリンクに変更する．または、図 20 に示される部品に取り換えると、段差の上に脚を乗せることができると考えられる．図 29 にその一例を示す．

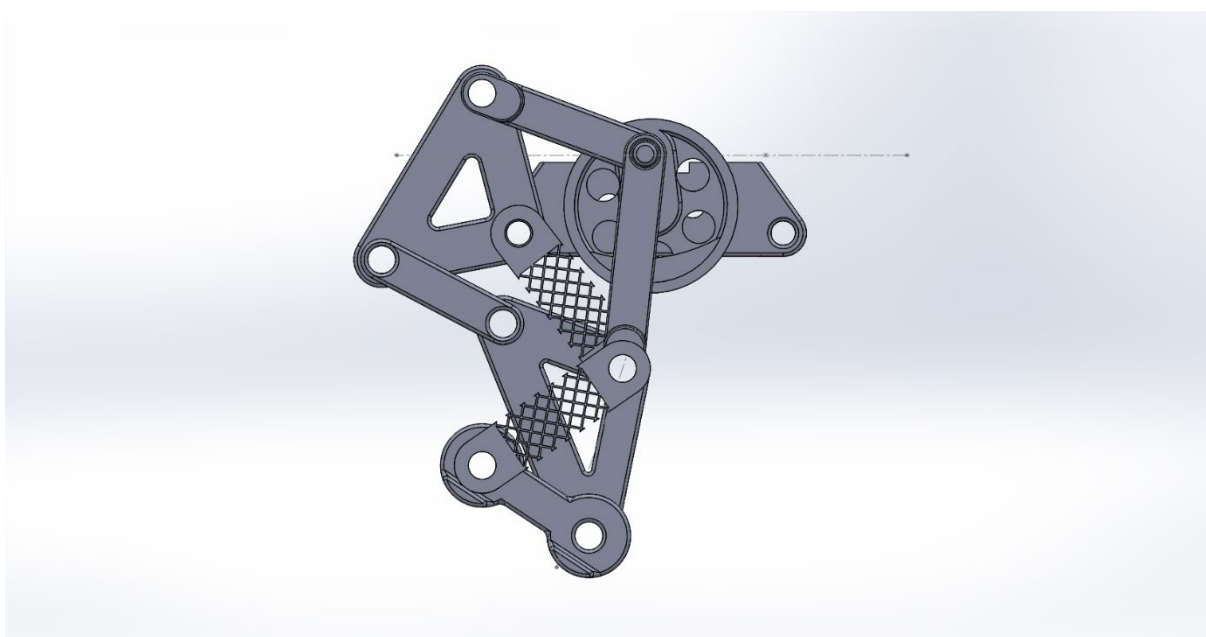


図 29. 部品変更例

8 考察

歩き椅子を今後動作させるために解析を行う必要があると考えられる．リンクの長さを変更して，足先を持ち上げさせるような機構にする．もしくは，足先を大きくそらせて，段差の角を踏ませれば，階段の昇降ができると考えられる．

9 結論

結論として，テオ・ヤンセン機構を利用した，車いすのミニチュアの作成には成功したが，支えなしでは動作しなかった．また，脚が上がらず，階段を登れなかった．

10 謝辞

本論文の執筆にあたり，多くの方々にご支援いただきました．

津山工業高等専門学校 総合理工学科 機械システム系教授，加藤 学教授には本制作及び本論文作成において，ここに深謝の意を表します．

また，同学校技術部，久保田 絢香氏にはミニチュアの制作において，大変お世話になりました．本当にありがとうございました．

本研究の遂行にあたり，指導教官として終始多大なご指導を賜った，総合理工学科 先進科学系教授，松田 修先生に深く感謝いたします．

文献

<https://www.akinaihiroba.com/entry/2021/12/09/テオ・ヤンセンリンク機構を作成して眺める>(参照日 2023 年 4 月 7 日)

藤野良太, 菊地喬之, 小金澤鋼一, 膝関節と足関節の連動による階段昇降可能な無動力大腿義足の提案, バイオメカニズム 24 巻 (2018) p.115-123 .

References

U. Kakati, M. Rameez, P. S. Medhi, S. Mondal, M. Moorthy, Design and Fabrication of a Walking Chair using Linkage Mechanism, International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN: 2278-0181, Vol. 4 Issue 08, August-2015