

2020年度

卒業研究

総合理工学科

松田 修 研究室

2020年度 松田研究室 メンバー

宇谷 優輝（先進科学系）

加田 紘大（先進科学系）

田邊 陽太（先進科学系）

圓山 夏生（先進科学系）

稲垣 佑都（情報システム系）

指導教員：松田 修

卒 業 研 究

微小重力空間における筋肉トレーニングの研究

先進科学系

宇谷優輝

指導教員 松田修

令和3年3月4日

Abstract

Muscle training in microgravity space

UTANI YUKI

The earth will be destroyed in 5 billion years. The sun fuses with helium nuclei and emits energy. However, hydrogen nuclei will eventually be depleted. The lifespan of a similar star with such a sun structure is estimated to be 10 billion years. The current life of the sun is 5 billion years, and the remaining time for the sun to continue nuclear fusion is 5 billion years. As the Sun approaches death, the outer layers expand and the Sun evolves into a red giant. And planets such as Mercury, Venus, and Earth are swallowed by the outer layers. It means the death of the earth. We have a plan for humankind to escape from the earth. In the future, many humans will be forced to live in microgravity space. In this study, we consider the importance of human muscle training in the microgravity space, and consider specific muscle training methods.

キーワード：筋肉トレーニング，筋トレ，微小重力

目次

1. 研究の動機と目的	1
2. 微小重力空間での骨量と筋量	1
3. 骨や筋が臓器に与える影響	2
4. 筋肉と骨	2
4-1 筋肉	2
4-2 骨	3
5. 筋トレに関係する骨格筋とトレーニング法	3
6. 筋トレと骨密度	5
7. 微小重力空間での筋トレの必要性	6
8. 宇宙ステーションで行われている運動器具と運動プログラム	6
9. 21 日間の筋トレに関するデータ	7
9-1 筋トレメニューと食事データ	7
9-2 21 日間の筋トレデータの考察	10
10. 微小重力空間での移動時に行なう筋トレの方法	11
10-1 ゴムの反発を利用する移動型筋トレ装置	11
10-2 風に逆らった移動型筋トレ装置	12
10-3 ゴムチューブトンネルでの筋トレ装置	12
10-4 油圧式スクラムマシン型筋トレ装置	13
10-5 回転遊具を使った筋トレ装置	13
10-6 トレーニングウェア	13
11. 研究のまとめ	14
参考文献	14

1 研究の動機と目的

地球 50 億年後に滅亡する。太陽はヘリウム原子核に熱核融合してエネルギーを放出している。しかし、いつしか水素原子核は枯渇する。このような太陽の構造をもつ同じくらいの恒星の寿命は 100 億年と推定されている。そして、現在の太陽の寿命は 50 億年であり、太陽が核融合を続けられる残りの時間は 50 億年とされている。太陽の寿命が近づくと、外層部が広がり、太陽は赤色巨星へと進化する。そして、水星、金星、地球などの惑星は外層部に飲み込まれる。それは地球の死を意味する（[1]参照）。

人類は地球から脱出する、という計画がある（[2]参照）。そうになると、多くの人間は微小重力空間での生活を余儀なくされる。

本研究では、微小重力空間における人の筋肉トレーニング（以下、筋トレとする）の重要性を考察し、具体的な筋トレの方法を考察する。

2 微小重力空間での骨量と筋量

大島、水野、川島[3]は、宇宙飛行による骨・筋などへの影響を論じた。以下、論文[3]をまとめる。まず、骨への影響について以下を抜粋する。

宇宙の微小重力環境では、骨への荷重負荷が減少し、骨からカルシウムが溶出し、骨量減少や尿路結石のリスクは高まる。ISS の宇宙飛行士の検討では、1 カ月間に腰椎で平均 0.9%、大腿骨頸部で 1.4% 骨密度は減少し、骨量減少速度は約 10 倍となる。最近の定量的 CT 法 (quantitative computed tomography : QCT) を用いた検討によれば、大腿骨頸部の海綿骨では 1 カ月間に 2.5%、同皮質骨では 0.5% の骨量減少が報告された。カルシウムの出納は、飛行前はバランスがとれている（日本人は毎日約 600 mg のカルシウムを摂取し同量排出）が、飛行中は毎日 250 mg のマイナスバランスとなる。この骨量減少は、毎日 2 時間の軌道上の運動では、防ぐことはできない。

筋萎縮に関しては、

地上で姿勢保持と歩行を担う体幹筋、大腿四頭筋、および下腿三頭筋の筋萎縮が特に著しいとされる。筋量変化の実態を把握するために、8 日間のスペースシャトルの飛行前後で、MMRI（磁気共鳴映像法）による下肢筋横断面積を測定した結果、筋横断面積の減少率は、飛行前と比較して腰部背筋 10.3% が最も著しく、ハムストリング 8.3%、下腿三頭筋（ヒラメ筋・腓腹筋）6.0%、大腿四頭筋 6.0% の順であった）だった。同様な研究は JAXA も実施しており、10 日～2 週間前後のスペースシャトル飛行中における下腿三頭筋の筋横断面は、宇宙飛行 1 日あたり約 1.0% 細くなるという結果であったようである。しかし、不活動による筋萎縮は最初の 1 週間で最も著しく、その後筋萎縮速度は徐々に軽減する。

筋力低下に関しては、

1 ～ 2 週間の宇宙飛行後の筋力低下率は、飛行前と比較すると腰部背屈筋が 23% と最も大きく、膝関節伸展筋で 12%、腰部前屈筋（腹筋）で 10%、足関節背屈筋で 8%、膝関節屈筋で 6% であった。筋持久力を飛行前と比較すると、大腿四頭筋で 15%、ハム

ストリングで 12%低下していた。

以上のことから、微小重力空間においては、骨や筋肉は、重力に抵抗する必要がなくなるため、骨量減少、筋横断面積の減少、筋力の低下が必然的に起こる。しかし、もし重力が限りなくゼロ、すなわち超微小重力空間で生活することになったからといっても、骨や筋がまったくなくなった状態で人が生きられるとは考え難い。微小重力空間において人はどのくらいの骨量や筋肉量を有すれば生きていけるのだろうか、このような疑問が生じる。

3 骨や筋が臓器に与える影響

骨や筋がまったくなくなった状態で人は生きられるか、という疑問に対して、著者は否定的な見解をもつ。極端に言えば、人には司令塔である脳と最低限必要と思われる 2 つの臓器である心臓と肺だけが備わっていて、それらを動かすだけで生きることが不可能であると考え。なぜならば人が生きるとは、行動することであると著者は考えるからである。したがって、脳と心臓と肺が存在すれば、それらを使ってさらなる行動をするために、それらと連携するいくつかの臓器が必要となり、そしてこれらの臓器を保護する骨や筋が必要となると考えられる。以下、この点をもう少し詳しく論じる。

まず骨には様々な細胞を作り出す役割がある。そのなかには骨芽細胞というものがある。この細胞が出すホルモンには造血幹細胞の機能を若く保つ役割がある。そのため、骨が老化するとこのような細胞が作り出せなくなり、臓器が正常に働けなくなる可能性がある。次に筋肉が衰えると基礎代謝などが衰え、血流などに影響を及ぼすと考えられる。

以上のことから、骨や筋が臓器にとっていかに重要なものであるかがいえる。

4 筋肉と骨

骨には筋肉がついている。そして、筋肉は、からだや臓器を動かす原動力となる運動器官である。ある骨についている片方の筋肉が縮むとその反対側についた筋肉が伸びて、骨が動く。筋肉は筋細胞でできており、神経からの信号によって筋細胞が収縮する。神経、筋肉、骨の連携によって我々は体を動かすことができる。また、骨には、各臓器を外部の衝撃から守る役割もある。

4-1 筋肉

筋トレ、大きく分けて、骨格筋、平滑筋、心筋に分類される。以下、ウィキペディアから、これらの 3 種類の筋肉についてまとめる。

(1) 骨格筋 ([10] 参照)

骨格筋とは、骨格を動かす筋肉をさす。骨格筋は骨格に対して、間接をまたぐ様に結びついている。関節との関係から、大きく屈筋と伸筋に分けられる。また、骨格筋は運動神経に支配されており、運動神経系から信号を受けると収縮して力を発揮する。さらに、骨格筋には筋紡錘、ゴルジ腱器官と呼ばれる感覚器が存在する。筋紡錘は骨格筋の長さの変化に反応する感覚神経を有する筋繊維である。ゴルジ腱器官は筋-腱移行部に存在し、骨格筋の張力に反応する。

(2) 平滑筋 ([11]参照)

平滑筋とは、横紋筋とは違いサルコメアのない筋肉のことである。血管、膀胱、子宮など、管状あるいは袋状器官では「壁」にみられる。また、消化管（胃・小腸・大腸など）では消化物を筋収縮により運ぶ役割を持つ。また、骨格筋、心筋と異なり横紋は見られず、細胞自体の収縮メカニズムは不明とされている。支配神経は自律神経である。骨格筋とは異なり神経-筋接合部は明確ではなく、神経線維のところどころにある膨らみから信号が伝達される。

(3) 心筋 ([12]参照)

心筋は、骨格筋と同じ横紋筋であるが、骨格筋は随意筋で多核の細胞でできているのに対して、心筋は単核の細胞でできており、不随意筋である。また、ミトコンドリアが非常に多く存在しており、心筋が要求するエネルギーの大部分をまかなっている。

4-2 骨

骨は形の違いにより、大きく扁平骨、長骨、短骨、不規則骨、種子骨という 5 つのタイプに分類される。（以下、[13]参照）

扁平骨は板状の扁平な骨で、頭頂骨、側頭骨、肩甲骨、胸骨、肋骨などがこれに当たる。長骨は長く伸びた管状の骨で、上腕骨、橈骨、尺骨、大腿骨、脛骨などがある。短骨は不規則な形をした短い骨で、手根骨や足根骨などがある。含気骨は、骨の内部に鍾乳洞のような通路があり、空気が自由に流れるようになっている骨のことである。鼻腔を形成する篩骨、上顎を形成する上顎骨などがこれに当たる。不規則形骨の形や構造はさまざま、そのためほかのどの分類（扁平、短、長または種子）にも属さない。このタイプの骨は、かなり複雑な形をしていることが多く、内臓器官を保護するのに役立っている。種子骨は、腱の中に埋め込まれている骨のことである。このような小さく丸い骨は、一般に手、膝および脚の腱の中にある。

5 筋トレに関係する骨格筋とトレーニング法

筋トレの対象となる主たる筋肉は骨格筋である。骨格筋を構成している筋繊維には大きく分けて速筋と遅筋の 2 種類がある。速筋は白っぽいため白筋とも呼ばれる。収縮スピードが速く、瞬間的に大きな力を出すことができるが、長時間収縮を維持することができず張力が低下してしまう。遅筋は赤みがかった色から赤筋とも呼ばれる。収縮のスピードは比較的遅く、大きな力を出すことはできないが、疲れにくく長時間にわたって一定の張力を維持することができる（[9]）。以下、主な骨格筋の役割、筋肉と骨格図、主なトレーニング法をまとめる（[14]参照）。

表 1 (骨格筋の役割)

名称	役割
大胸筋	上腕を前方に押し出し閉じる。
三角筋	上腕を上・前・横・後ろに上げる。
上腕三頭筋	肘関節を伸展させる。
前腕伸筋群	手首関節を伸展させる。
腹筋群	体幹を屈曲・回旋させる。
僧帽筋	肩甲骨を引き寄せる。
広背筋	上腕を上・前から引き寄せる。
上腕二頭筋	肘関節を屈曲させる。
前腕屈筋群	手首関節を屈曲させる。
脊柱起立筋	体幹を伸展させる。
腸腰筋群	股関節を屈曲させる。
大腿四頭筋	肘関節を伸展させる。
下腿三頭筋	足首関節を伸展させる。
臀筋群	股関節を伸展させる。
ハムストリングス	膝関節を屈曲させる。
内転筋群	大腿を内転させる。

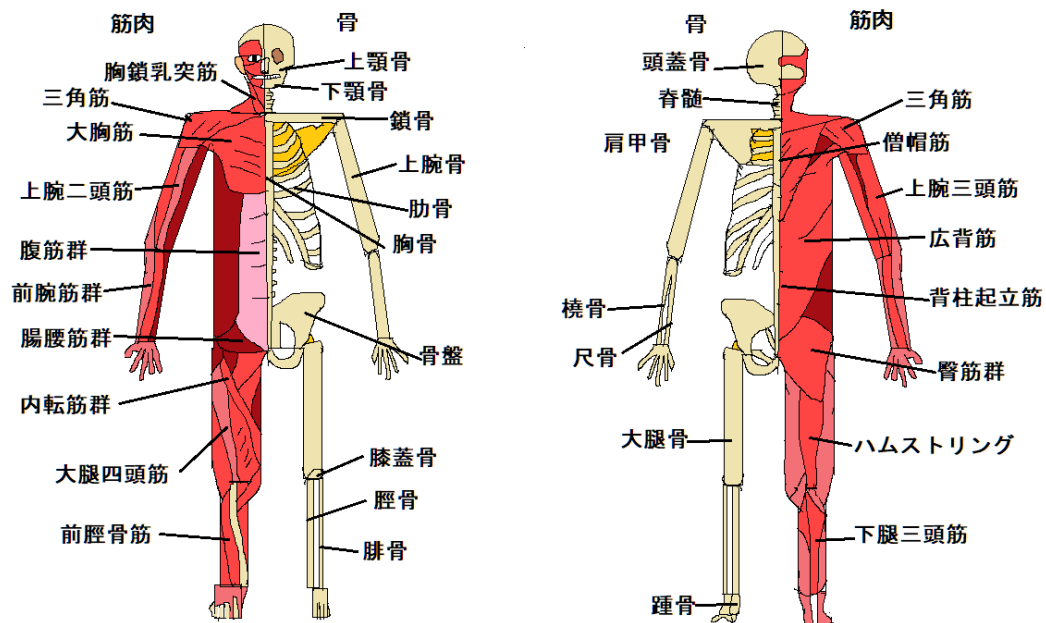


図 1 (筋肉と骨格図)

表 2 (主なトレーニング法)

名称	主なトレーニング法
大胸筋	腕立て伏せ, 膝つき腕立て伏せ, 斜め腕立て伏せ, 足上げ腕立て伏せ, ディップス, チューブチェストプレスなど
三角筋	パイクプッシュアップ, チューブショルダープレス, チューブアップライトロウ, チューブフロントレイズなど
上腕三頭筋	ベンチディップス, ナロー腕立て伏せ, チューブフレンチプレス, チューブプレスダウンなど
腹筋群	自重腹筋種目, リバースクランチ, ドラゴンフラッグ, チューブクランチ, チューブレッグレイズなど
背筋群	懸垂, 斜め懸垂, バックエクステンション, チューブデッドリフト, チューブローイング, チューブラットプルダウンなど
上腕二頭筋	チューブカール, チューブハンマーカール, ダンベルカール, ダンベルハンマーカール, ダンベルコンセントレーションカールなど
下半身筋肉群	スクワット, ブルガリアンスクワット, シシースクワット, チューブスクワット, チューブレッグプレスなど

6 筋トレと骨密度

骨密度 (BMD) とは骨塩量を骨幅で除した値のことである。骨密度は加齢・栄養・照射日光量・嗜好品 (酒, タバコ等)・Ca 調整ホルモン・女性ホルモンおよび運動等によって, さまざまなレベルで影響を受ける [7]。オレゴン大学の微量栄養素情報センターには骨の健康に関する詳細な記事がある [6]。本論で重視したい記事は, 骨量に身体活動がなくてはならないものであることを述べた記事であり, 以下を参照する。

骨の発達のすべての段階において, 身体活動は骨格の健康に非常に有益である。定期的な抵抗運動 (筋力トレーニング) は, 2 つの理由で骨粗鬆症性骨折リスクの低減に役立つ。それは直接間接に骨量を増加させ, 強さ, バランス, および整合性を向上させることで転倒リスクを減らすからである。

運動によって骨量が増える。なぜならば骨にかかる力学的な力がそれに順応した造骨反応を誘発するからである。骨は自らにかかる圧力の程度に比例して自身の強度を調整する。骨量を増やしていくには, 負荷の繰り返し回数やセット数ではなくその強度と新規性が問題である。

筋トレは骨密度を高める重要なものであると考える。

7 微小重力空間での筋トレの必要性

微小重力空間においても人間は最低限の骨量と筋量が必要なはずである。また、人の生存にとって重力はなくてはならないものという説もある([4]参照)。このことから、もし、将来、人類宇宙移住計画が実行されるならば、いつまでもスペースシャトル内の微小重力空間で生活するわけにはいかなく、いつしか地球と同様な重力をもつ惑星に移住する、または技術的な発展により重力があるスペースコロニーで生活することになると考えられる([5]参照)。そのため、移動中の筋肉と骨の量や強度の維持が到着後普通の生活を送るために非常に大切になると考えられる。

以上のことから、微小重力空間では骨と筋肉、両方にアプローチできる方法が望ましいと考える。

8 宇宙ステーションで行われている運動器具と運動プログラム

国際宇宙ステーション (ISS) での宇宙滞在は3～6か月である。ISS で使用されている運動器具は、トレッドミル、自転車エルゴメーター、抵抗運動器、ペンギンスーツなどがある。それぞれの器具の説明を、[3]から引用する。

1. **トレッドミル**：ベルトコンベア上での歩行・走行装置で、歩行に必要な神経-筋活動、骨への長軸荷重、および有酸素能力の維持が主な目的である。走行スピードは 0～10 mph (16 km/h)、身体への荷重は 100 kgf (220 lbf) まで調節可能である。宇宙で全く運動しない場合や自転車エルゴメーター運動の場合、最大酸素摂取量は約 13%低下するが、トレッドミル運動 (60 % HR_{max}, 70 % HR_{max}, 80 %HR_{max} の3つの強度を各 10 分間ずつ、あるいは 65% HR_{max} 4 分と 50% HR_{max} 2 分の組み合わせを 5 セット) を毎日継続した場合、最大酸素摂取量の減少率は 3 %に留まったことが報告されている。
2. **自転車エルゴメーター**：自転車運動により、有酸素能力、無酸素能力、筋力および持久力を維持向上させる。運動負荷は 25 ～ 300 W 回転速度は 30～120 rpm まで可能である。宇宙飛行中に自転車エルゴメーターを用いて運動頻度・時間・強度と酸素摂取量を検討した研究によれば、週に3日以上、1回20分以上、70% HR_{max} 以上の運動実施により、自転車エルゴメーターの運動でも有酸素能力低下が軽減したとの報告がある。
3. **抵抗運動機器**：重量のない宇宙空間で筋肉へ抵抗負荷を与え、筋萎縮を予防する抵抗運動に用いられる運動機器。ワイヤーを牽引すると抵抗運動機器内の円盤が回転し、円盤内のゴム状の弾性体が回転に抗する抵抗力を発生させる。
4. **ペンギンスーツ**：ロシアが提供する器具で弾力バンドがついたスーツ。

軌道上の運動プログラムは、月曜日から土曜日までの週6日間、1日当たり2.5時間行われる。上の運動器具を使用して鍛える部位は、肩、胸、背部、腰、下大腿、下腿、上腕二頭筋、上腕三頭筋である。期間後は、筋力低下、起立性低血圧、平行バランス障害などから、転倒による骨折や捻挫のリスク回避するために45日間のリハビリプログラムが行なわれる。

現在の軌道上の運動機器と運動プログラムは、時間をかけている割に筋・骨の機能維持が十

分ではなく、理想的なものとはいえない。より短時間で効率的な、楽しく継続できる軌道上運動プログラムが必要である。

9 21 日間の筋トレに関するデータ

人間が無重力空間で生きるために必要な骨量や筋肉量を算出するために、また、もし無重力空間で筋トレが必要となった場合、どの程度の筋トレが必要かを算出するために、21 日間の筋トレを実施した。

9-1 筋トレのメニューと食事データ

筋トレの目的は、腹筋、背筋、三角筋、腿を鍛えること、インナーマッスルを鍛えることとした。腹筋を鍛えるために、アブローラー10rep(回)を3セット月、水、金曜日に行うことにした。これらの種目にしたのは、脂肪燃焼と筋肥大の両方を目的としているからである。部活やランニングで十分な有酸素運動を行い、脂肪燃焼をし、そのほかの無酸素運動で筋肥大を狙っている。また多関節種目をメインとして、行うことで、体全体を意識したメニューにしている。

一週間の筋トレメニューは表3（津山高専での筋トレメニュー）である。また、9月1日から9月21日までの食事のデータは表4（筋トレ中の食事データ）である。表4では白米は省略して記載している。そのかわり合計カロリーは白米の分も含まれた数値を記載している。表4は毎日の食事とその合計 kcal のデータである。

表3（津山高専での筋トレメニュー）

月曜日				
ランニング	30min			減量
アブローラー	10rep	3set		腹筋の肥大
火曜日				
ベンチプレス	62.5kg	8rep	3set	胸筋の肥大
腕立て伏せ	10rep	3set		胸筋の肥大
フロントショルダープレス(スミス)	40kg	10rep	3set	肩前部の肥大
プレートフロントレイズ	7.5kg	15rep	3set	肩前部の肥大
ダンベルエクステンション	22kg	12rep	3set	三頭筋の肥大
水曜日				
ランニング	30min			減量
アブローラー	10rep	3set		腹筋の肥大
ロープランク	1分半			インナーマッスル
サイドプランク	左右1分			インナーマッスル

木曜日				
デッドリフト	80kg	8rep	3set	背筋の肥大
ベントオーバーローイング	35kg	10rep	3set	背筋の肥大
サイドレイズ	6kg	12rep	3set	三角筋の肥大
リアレイズ	4kg	10rep	3set	三角筋の肥大
ダンベルカール	12kg	12rep	3set	二頭筋の肥大
金曜日				
ランニング	30min			減量
アブローラー	10rep	3set		腹筋の肥大
土曜日				
スクワット(スミス)	80kg	10rep	3set	腿の肥大
レッグプレス	190, 170kg	10rep	3set	腿の肥大
フロントスクワット(スミス)	60kg	8rep	3set	腿の肥大
日曜日				
完全休息日				休息

表 4 (筋トレ中の食事データ)

	朝食	昼食	夕食	合計 kcal
9月1日	焼きそばパン・クリームパン	鶏のタルタルソース 焼き・金平ごぼう・ バンサンスー	アジフライ・キノコス ープ	2774.13
9月2日	メロンパン・エッ グマフィン	サケの塩焼き・チキ ンナゲット・ブロッ コリーのサラダ	チキンカレー・野菜サ ラダ・ヨーグルト	2755.55
9月3日	ホットドッグ・ス ナックゴールド	ぶっかけ肉うどん・ レンコンのはさみ揚 げ	牛肉のピリ辛炒め・小 松菜とアサリの煮びた し・味噌汁(しめじ・玉 ねぎ)	3366.46
9月4日	ナイススティッ ク・アップルパイ	チキン南蛮丼・ほう れん草のごま和え	豚肉の味噌焼き・ひじ き煮・わかめスープ	3513.76
9月5日	スナックゴール ド・エッグマフィ ン	メンチカツ・キャベ ツとハムのソテー・ ミートボール	タンドリーチキン・里 芋サラダ・コンソメス ープ	3232.06

9月6日	チョコチップメロンパン・チキンカツバーガー	鶏肉の竜田揚げ・オムレツ・マカロニサラダ	牛丼・白身魚フライ・味噌汁(ほうれん草・玉ねぎ)	3032.97
9月7日	ソーセージマフィン・ホットドック	デミカツ丼・ほうれん草のナムル	豚肉の生姜焼き・春雨サラダ・味噌汁(里芋)	2892.59
9月8日	テリヤキバーガー×2	チャーハン・揚げ餃子	鶏肉のネギ味噌焼き・ブロッコリーのかにあんかけ・中華スープ	2809.27
9月9日	ホットドッグ×2	鯖の韓国風焼き・ミニハンバーグ・ジャーマンポテト	カツとじ・焼きナス・味噌汁(麩)	2828.22
9月10日	ナイススティック・クリームパン	照り焼きチキン丼・キャベツの胡麻和え	ポークカレー・野菜サラダ・オレンジゼリー	3035.74
9月11日	焼きそばパン・メロンパン	豚みぞれうどん・イカの天ぷら	鶏の塩から揚げ・青菜のおひたし・味噌汁(大根・キャベツ)	3332.72
9月12日	アンパン・スナックパン	エビカツ・厚焼き卵・ブロッコリーの塩昆布和え	煮込みハンバーグ・大根サラダ・コンソメスープ	2977.28
9月13日	エッグマフィン・アップルパイ	チンジャオロース・肉巻きフライ・フルーツ	のりごまチキン・金平レンコン・味噌汁(ほうれん草・玉葱)	3198.09
9月14日	スナックゴールド・クリームパン	ビビンバ丼・イカリングフライ	味噌カツ・中華クラゲ・豆腐と青菜のとろみスープ	3281.67
9月15日	チーズバーガー・チョコクロワッサン	焼き魚おろしかけ・ピーマンの肉詰めフライ・フルーツ	親子丼・ほうれん草のおかか和え・味噌汁(キャベツ・玉葱)	2826.46
9月16日	プロテインのみ	ジャージャー麺・とり天	豚肉のキムチ炒め・ブロッコリーの胡麻マヨ和え・味噌汁(玉葱・ジャガイモ)	2605.46
9月17日	塩おにぎり×2	天井・漬物	カレーライス・野菜サラダ・プリン	2805.16
9月18日	塩おにぎり×2	サケの南蛮漬け・ツナポテトサラダ・ミ	鶏肉の塩タレ焼き・パンサンズー・味噌汁(豆	2798.37

		ートボール	腐・麩)	
9月19日	塩おにぎり×2	トンカツ・金平ごぼ う・マカロニサラダ (ツナ)	さっぱり焼肉・ひじき 煮・味噌汁(ほうれん 草・玉葱)	2732.14
9月20日	ホットドック	鶏肉のレモンバジル 焼き・五目卵焼き・ ペペロンチーノ	豚肉の七味醤油焼き・ 大根なます・味噌汁(も やし)	2993.87
9月21日	焼きそばパン×2	鶏の唐揚げ・ハッシ ュドポテト・ブロッ コリーのサラダ	アジフライ・豚肉の味 噌炒め・たまごスープ	3123.13
平均				2995.96
標準偏差				±247.33

9-2 21 日間の筋トレデータの考察

今回、9月1日から21日までの筋トレでから得られたデータをまとめたものが表5である。

筋トレ期間の1日当たりの摂取カロリーは、 2995.96 ± 247.33 kcal であった。基礎新陳代謝 1580.0 ± 10.47 kcal に対して、余分カロリーを算出すると、 1415.96 ± 244.33 kcal である。基礎新陳代謝は1日に必要な摂取カロリーであり、通常の生活においては基礎新陳代謝で示されるカロリーで体重や体脂肪率が維持される。ところが、筋トレ期間の体重は 66.2 ± 0.44 kg、体脂肪率は 15.8 ± 0.77 でほとんど変化していない。これは、筋トレによって余分カロリーを消費したものと結論付けることができる。

ところで、基礎新陳代謝は地球上での重力に関係すると考えられる。山下と馬場は[8]の中で重力が生物のエネルギーに関係するとして、宇宙でのエネルギー摂取の変化について論じている。そして山下と馬場の推論から、微小重力空間内での基礎新陳代謝は小さくなると考えられる。したがって、必然的に摂取カロリー、すなわち食事の量は少なくて済む。しかし、摂取カロリーが少ないと体重は落ちてしまう。それは筋力低下、そして骨量低下に繋がるはずである。

体重を落とさないためには、適切なカロリーを摂取する必要がある。そのために微小重力空間における運動は生きることに関わる重要な活動であるといえる。

表5 (体組成と余分なカロリー等のデータ)

月日	身長 (cm)	体重 (kg)	体脂肪 率(%)	体脂肪量 (kg)	徐脂肪体重 (kg)	基礎新陳代謝 (kcal)	余分カロリー (kcal)
9月1日	166.5	66.3	17.5	11.6025	54.6975	1573	1201.13
9月2日	166.5	66.6	16.3	10.8558	55.7442	1585	1170.55
9月3日	166.5	66	16.6	10.956	55.044	1573	1793.46
9月4日	166.5	66.5	16.7	11.1055	55.3945	1581	1932.76
9月5日	166.5	66.7	15.5	10.3385	56.3615	1597	1635.06

9月6日	166.5	67.2	14.7	9.8784	57.3216	1604	1428.97
9月7日	166.5	65.9	16.9	11.1371	54.7629	1570	1322.59
9月8日	166.5	65.8	16	10.528	55.272	1585	1224.27
9月9日	166.5	65.5	15.8	10.349	55.151	1569	1259.22
9月10日	166.5	66	16.7	11.022	54.978	1563	1472.74
9月11日	166.5	65.6	14.5	9.512	56.088	1577	1755.72
9月12日	166.5	66.1	15.2	10.0472	56.0528	1583	1394.28
9月13日	166.5	66.3	15.3	10.1439	56.1561	1594	1604.09
9月14日	166.5	66.7	15.3	10.2051	56.4949	1592	1689.64
9月15日	166.5	66.5	15.5	10.3075	56.1925	1585	1241.46
9月16日	166.5	65.6	16.1	10.5616	55.0834	1569	1036.46
9月17日	166.5	65.9	15.8	10.4122	55.4878	1570	1235.16
9月18日	166.5	66.2	15.7	10.3934	55.8066	1581	1217.37
9月19日	166.5	66	15.3	10.098	55.902	1576	1156.14
9月20日	166.5	65.7	15.5	10.1835	55.5165	1573	1420.87
9月21日	166.5	65.9	14.9	9.8191	56.0809	1580	1543.13
平均	166.5	66.2	15.8	10.45	55.69	1580.0	1415.96
標準偏差	±0	±0.44	±0.77	±0.51	±0.65	±10.47	±244.33

10 微小重力空間での移動時に行う筋トレの方法

第8章で述べたように、現在、ISSでは1日当たり2.5時間、週6日間の筋トレを行い、筋力低下を可能な限り抑えようとしているが、筋力維持にはかなり不足している。そして、前章の21日間の筋トレデータの考察と山下と馬場らの論文[8]から、微小重力空間内での基礎新陳代謝は小さいことを理解した。つまり、地球上での基礎新陳代謝に重力が関係する。そしてこのことは、地球上で常に重力を受けている我々は、無意識の内に軽い筋トレを行っていることを意味すると考えた。そのため日ごろから少しずつ体に負荷を与えることが大切だと考えた。

以上のことから、ISS内での部屋か別の部屋へ移動する際の通路に、筋トレを行う仕掛けを作っておけばよいのではないかと考えた。以下、本研究で構想した5つの筋トレ装置のアイデアを紹介し、さらに、トレーニングウェアについても説明する。

10-1 ゴムの反発を利用する移動型筋トレ装置

この装置は、天井から等間隔にゴムを吊るして置くという簡単なもので、通路の壁には、ボルダリングで使用するホールドが適当な位置に取り付けられている（図2）。そのゴムを腰ベルトに装着し、次のゴムの位置まで、ゴムの反発に対して壁に取り付けられたホールドを掴みながら移動するという筋トレ方法である。これは全身の筋力強化に効果があると考えられる。

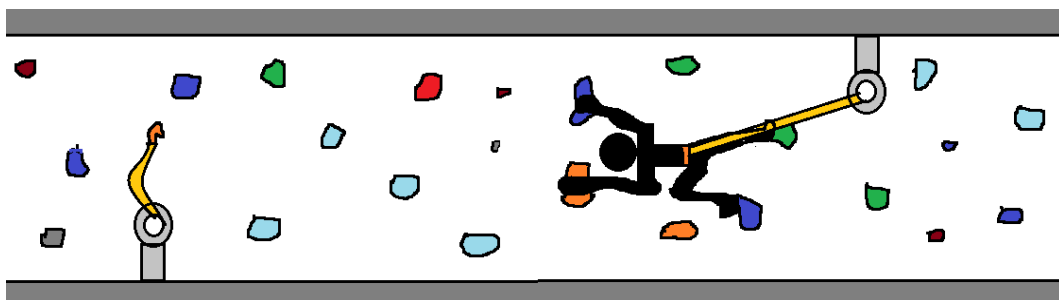


図 2

10-2 風に逆らった移動型筋トレ装置

この装置は、流れるプールをイメージしたもので、行きと帰りの 2 ルートでできている。これについてもやはり通路の壁には、ボルダリングで使用するホールドが適当な位置に取り付けられている。移動時にはそれぞれ設置された巨大扇風機の風に向かって、壁に取り付けられたホールドを掴みながら移動することで、全身の筋力強化に効果があると考ええる。

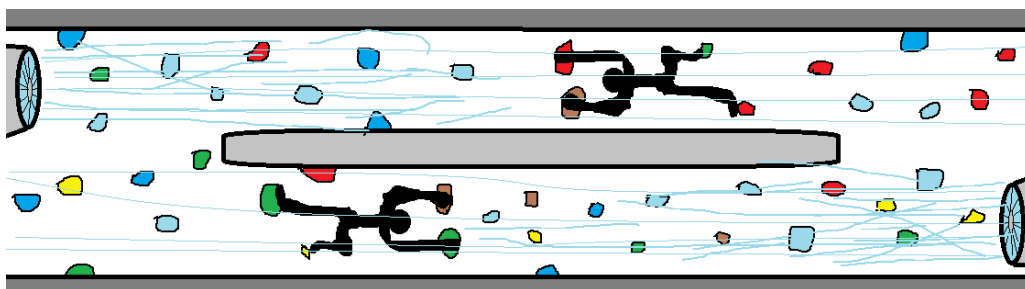


図 3

10-3 ゴムチューブトンネルでの筋トレ装置

ある通路には、細い管のようなゴムチューブトンネルを設置する。そのトンネルは潜り抜けるには、腕や足を使って、通路を広げながら少しずつ前進しなければならない。主に腕、足、腰の筋力強化に効果があると考ええる。

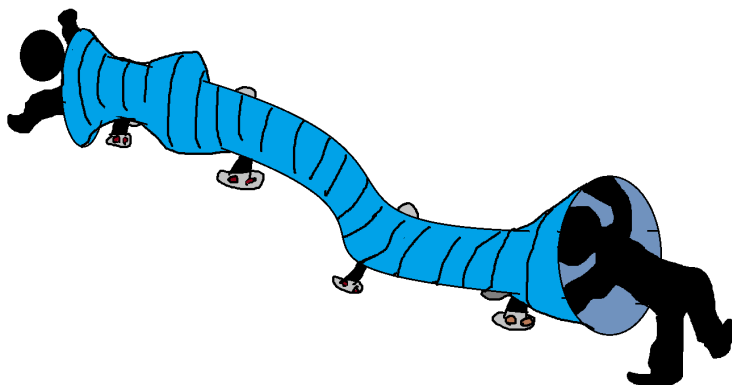


図 4

10-4 油圧式スクラムマシン型筋トレ装置

ラグビーの練習で使用するスクラムマシンから発想を得たもので、油圧式シリンダーが縮む時に負荷がかかるようにしておく。重力下においては、油圧式シリンダーは自重の影響から長さに限界があるが、微小重力空間においては、自重がなくなるため、長い油圧シリンダーを使うことが可能となる。したがって、油圧式スクラムマシンを押すというトレーニングから、肩、足と腰の筋力強化に効果があると考ええる。

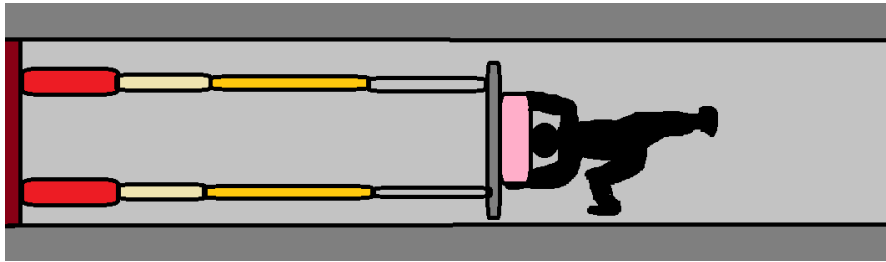


図 5

10-5 回転遊具を使った筋トレ装置

一定の速度で回転する回転遊具の部屋を設置する。回転盤に付けられた鉄棒を掴んで、回転することで、遠心力を受ける腕の筋力強化に効果があると考ええる。

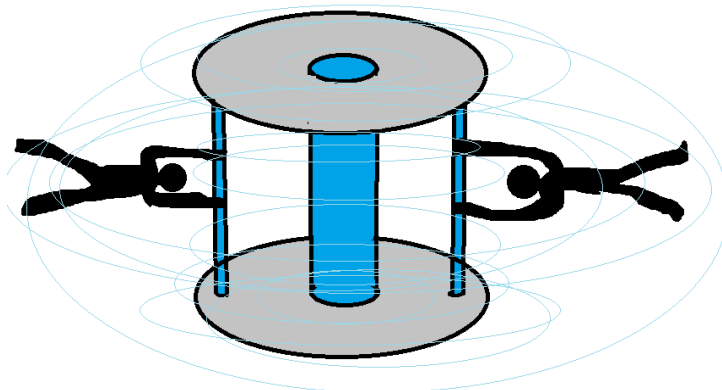


図 6

10-6 トレーニングウェア

通常の服装にも伸縮性を持たせて、筋肉にある程度の負荷を与えることが大切であると考えた。そこで、背面にゴム（図 7 では緑色の線）を貼り付けたトレーニングウェアを考えた。図 7 の焦げ茶部が革素材になっており、そこにトレーニング用の平ゴムを接着する。前屈すると背中中のクロスしたゴムが伸びて背筋に負荷がかかる。腕を曲げると上腕二頭筋に負荷がかかる。お尻から膝裏と、膝裏から踝までのゴムは少し張力を強くすることで、歩行するときに、大腿二頭筋と下腿三頭筋に負荷がかかる。このトレーニングウェアを着て、上に述べた筋トレ装置で筋トレを行うことで、効果はより高まると考えている。

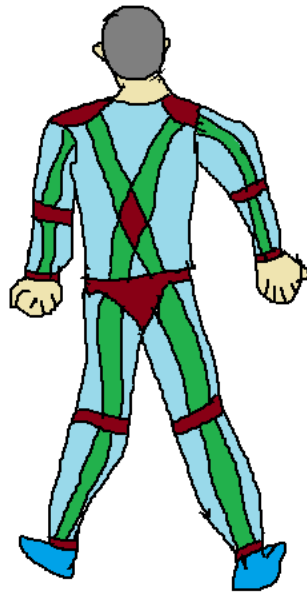


図 7

11 研究のまとめ

本研究では、微小重力空間における人の筋トレの重要性を考察し、具体的な筋トレの方法を提案した。ISでの宇宙滞在は3～6か月であり、その間に宇宙飛行士は、1日2.5時間、週6日間の筋トレを行い、筋力低下を可能な限り抑えようとしているが、筋力維持にはかなり不足している。もし微小重力空間に長期滞在を余儀なくされることになったなら、筋肉の低下だけでなく、骨も脆くなり、その結果、次第に筋肉と骨に守られている臓器にも大きな影響が及んでいく。したがって、微小重力空間において筋トレは人が生きるという意味で非常に重要となる。

微小重力空間において、筋力維持のためには、特別な筋トレが必要不可欠である。しかし、本研究では、地球上で我々が受けている重力という負荷を、別な形で自然に作り出すことは、特別な筋トレ以上に重要であると考えた。この観点に立ち、本研究では、部屋から別の部屋へ移動する廊下のような場所で自然に筋トレが行える5種類の装置というアイデアを示した。それらは、ゴムの反発を利用する移動型筋トレ装置、風に逆らった移動型筋トレ装置、ゴムチューブトンネルでの筋トレ装置、油圧式スクラムマシン型筋トレ装置、回転遊具を使った筋トレ装置である。本研究ではこの5のアイデアの提案ということで終了したが、本論文が、微小重力空間における筋肉トレの研究に何らかの形で貢献出来たらと考えている。

参考文献

- [1] 谷口義明, 宇宙はなぜブラックホールを造ったのか, 光文社, 2019年
- [2] 矢崎純一, 「第三の選択」の謎—宇宙への人類移送計画は真実か?! 地球の危機はここまで迫っている, KAWADE 夢文庫, 1993年

- [3] 大島博, 水野康, 川島紫乃, 宇宙飛行による骨・筋への影響と宇宙飛行士の運動プログラム, リハビリテーション医学, 2006; 43 : 186 —194
- [4] 跡見順子, 身体の「メカニズム」を解明する「重力」というキーワードの有効性とその背景「重力健康科学」の提案, 日本スポーツリハビリテーション学会誌 2013; 2: 1-13
- [5] JAXA 宇宙情報センター, スペースコロニー, http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/space_colony.html
- [6] Oregon University, Linus Pauling Institute » Micronutrient Information Center
<https://lpi.oregonstate.edu/mic/health-disease/bone-health>
- [7] 中外製薬会社, わかりやすい骨粗鬆症, 中外印刷株式会社, 東京, 1-102
- [8] 山下雅道, 馬場昭次, 大きさと重力の生物学, 宇宙生物科学, Vol. 18, No. 1, pp13-27, 2004 年
- [9] 厚生労働省の e-ヘルスネット, <https://www.e-healthnet.mhlw.go.jp/information/exercise/s-04-002.html>
- [10] ウィキペディア, 骨格筋, <https://ja.wikipedia.org/wiki/骨格筋>
- [11] ウィキペディア, 平滑筋, <https://ja.wikipedia.org/wiki/平滑筋>
- [12] ウィキペディア, 心筋, <https://ja.wikipedia.org/wiki/心筋>
- [13] Visible Body: 解剖学を学ぶ, <https://www.visiblebody.com/ja/learn/skeleton/types-of-bones>
- [14] 日本パワーリフティング協会 HP, <https://www.jpa-powerlifting.or.jp/musclename>

卒 業 研 究

ルーロー模様ของฟูรีエ解析

先進科学系

加田 紘大

指導教員 松田 修

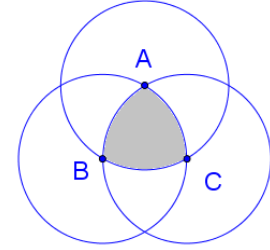
令和3年3月4日

Fourier Analysis of The Reuleaux Patterns

KADA Kodai

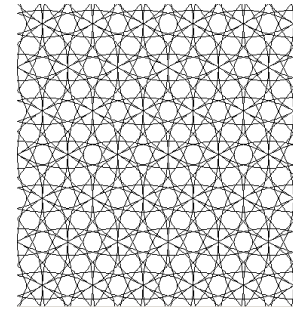
1. Motivation and purpose

The Reuleaux triangle is a triangle ABC formed by connecting arcs whose radius is one side of the regular triangle centered on each vertex of the regular triangle ABC. I am fascinated by the Reuleaux triangle. Currently, I am interested in studying the whole figure in which the Reuleaux triangles regularly arranged on the entire plane. The lower right figure shows three examples of different patterns of the Reuleaux triangles that are deformed little by little according to a certain rule and are regularly arranged on the entire plane. I wondered if I could define a scale that indicates the difference in atmosphere received from these patterns, so I decided to work on this research based on the Fourier analysis that I learned in my 4th year of Kosen.

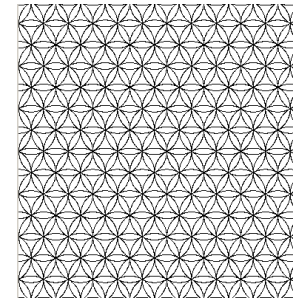


Reuleaux Triangle

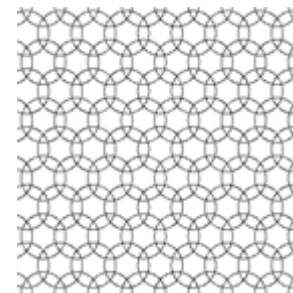
Reuleaux pattern
 $R(d)$



$R(0.5)$



$R(1.0)$



$R(1.5)$

2. Method

Let's explain the Reuleaux pattern $R(d)$. (1) Let d a positive real number. (2)

Consider the vector space $\mathbf{R}^2$ with dimension 2. Let $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ are

bases of $\mathbf{R}^2$. Furthermore, consider the lattice

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i \mid a_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

gotten by $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$.

(3) Draw circles with radiuses 1 centered on all the grid points of the lattice Λ . The plane filled with innumerable circles drawn in this way is called the Reuleaux pattern $R(d)$.

I performed Fourier analysis using grid points, furthermore I defined the quantities of the intersection density energy $E_{pt}(d)$ and the intersection moment governing factor $(\omega_1, \omega_2 | C_{2/1})$ to study the difference between the patterns.

3. Results

1. $E_{pt}(d)$ are considered monotonically decreasing exponential functions which satisfy $\lim_{d \rightarrow 0} E_{pt}(d) = +\infty$, $\lim_{d \rightarrow 2} E_{pt}(d) = 0$.

2. $E_{pt}(d)$ are considered to be quantity representing the densities of the patterns, $(\omega_1, \omega_2 | C_{2/1})$ are considered to be quantity representing the complexity of the patterns.

キーワード：ルーロー三角形，フーリエ解析

目次

1. 研究の動機と目的	1
2. これまでの研究結果	1
3. ルーロー模様 $R(d)$	2
4. ルーロー模様 $R(d)$ と平面結晶群	3
5. ルーロー模様 $R(d)$ の交点密度エネルギー	4
6. $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ の調査結果	7
7. $R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式	9
8. ルーロー模様 $R(d)$ の交点モーメント支配因子	10
9. 交点モーメント支配因子に関する結果	12
10. 今後の研究の予定	14
11. 謝辞	14
参考文献	14
付録 研究に用いたプログラム	i
プログラム 1. 任意のルーロー模様 $R(d)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム	i
プログラム 2. ルーロー模様 $R(1)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム	v
プログラム 3. 交点座標をcsvファイルから読み込み交点密度エネルギーの導出に必要なデータをcsvファイルに書き込むプログラム	vi
プログラム 4. 交点座標をcsvファイルから読み込みモーメント支配因子の導出に必要なデータをcsvファイルに書き込むプログラム	ix
プログラム 5. 任意のルーロー模様 $R(d)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム (軽量化 ver)	xi

1. 研究の動機と目的

高専1年生から昨年まで、数学クラブで、ルーロー三角形に興味をもち研究を行なってきた[2]. ルーロー三角形とは、正三角形 ABC の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一边となる円弧を結んでできた膨らみをもった三角形 ABC のことである (図1). 私は、円 A , 円 B , 円 C の半径を1とし, A , B , C の位置を正三角形 ABC に配置したとき, 3つの円が交差してできる内側の凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ (図2) や, 凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ (図3) を研究した. そして, ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の角に関するある種の公式を得ることができた.

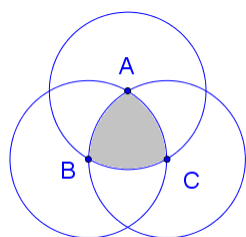


図1 ルーロー三角形

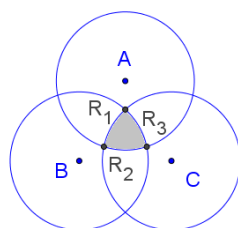


図2 凸型ルーロー正三角形

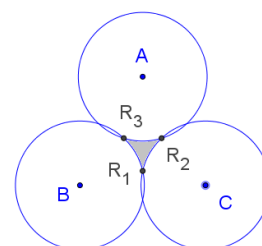


図3 凹型ルーロー正三角形

本研究では、円をたくさん描いてルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ を平面全体に規則的に並べた図形全体を研究してみようと考えた. 図4は、ある規則でルーロー正三角形を平面全体に規則的に並べてできた模様の異なる3つの例である. 私はこれらの模様の特徴を示す尺度が定義できないかと思い、この研究を行なうことにした. また、フーリエ解析は高専で習ったばかりの数学で、これを使って研究してみたいという動機もある.

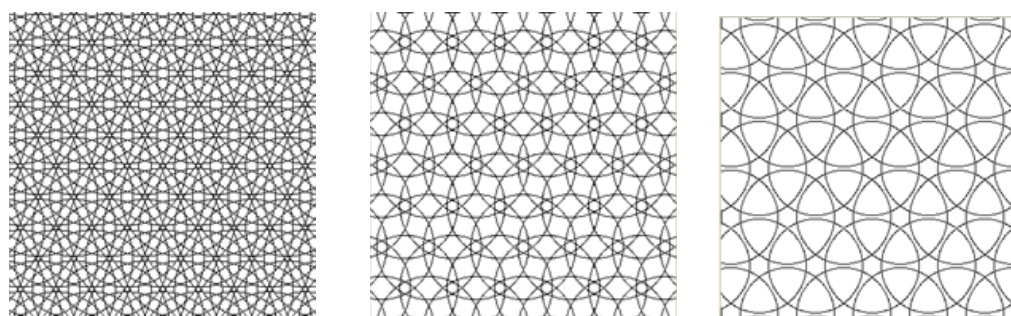


図4 多くの円を規則的に並べてできる模様の例

2. これまでの研究結果

凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ を作る3つの円 A, B, C の隣り合う2つの円の外側の交点を X, Y, Z とし、それらを中心とした円 X , 円 Y , 円 Z をそれぞれ描くと、その中心に凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ ができる. 私のこれまでの結果の1つを述べると、凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の接線によって作られる一つの角を α とし、凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の一つの角を β とすると、

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$$

が成り立つというものである[2].

この研究は Geogebra というフリーソフトを用いて行なった. このソフトのおかげで, 上に述べた研究以外にも一般の 2 次曲線に関するルーロー三角形に関する掛谷問題といった研究にも取り組んだ[1].

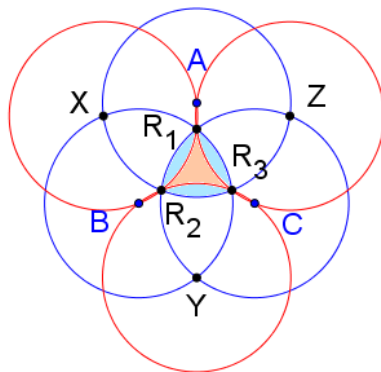


図5 ルーロー三角形の角

3. ルーロー模様 $R(d)$

研究対象であるルーロー模様 $R(d)$ を説明する.

(1) d を正の実数とする.

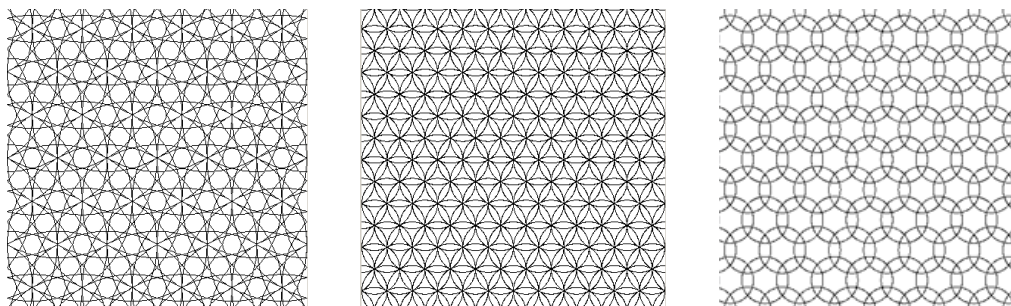
(2) 実 2 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ を考え, その基底を $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とする. そして $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ から作られる格子 Λ を

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^2 a_i \mathbf{b}_i \mid a_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

とする.

(3) 格子 Λ の全ての格子点を中心とする半径 1 の円を描く.

このようにして描いた無数の円で埋めつくされた平面を, ルーロー模様 $R(d)$ という.



$R(0.5)$

$R(1.0)$

$R(1.5)$

図6 ルーロー模様 $R(d)$

4. ルーロー模様 $R(d)$ と平面結晶群

平面結晶群 Γ は17種類に分類されることが分かっている．平面結晶群 Γ の17種類の名称はICU (International Union of Crystallography) による記法が広く用いられており，アルファベット ($\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{m}, \mathbf{g}$) は，以下の頭文字である．

$\mathbf{p}$: primitive $\mathbf{c}$: centered $\mathbf{m}$: mirror $\mathbf{g}$: glide reflection

そして，記法で用いられる数字は，回転の位数を表す．さらに，平面結晶群 Γ は， $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ の2方向の平行移動で生成される格子群

$$\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2} = \langle \mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \rangle$$

を正規部分群にもち， $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}$ の基本領域の型で17種類の分類がなされている（ただし，基本領域の取り方は一通りには決まらない）．

さて，本研究で扱うルーロー模様 $R(d)$ は，作り方から全て六面格子になっており，位数3の回転，3方向の鏡映の軸，3方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心として鏡映の軸上にはないものがある $\mathbf{p31m}$ 六角格子と呼ばれている平面結晶群に分類される．

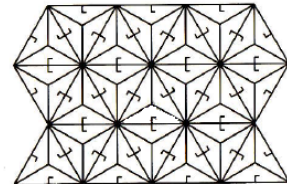
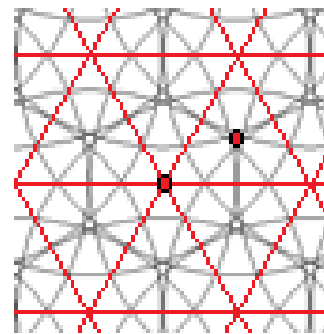
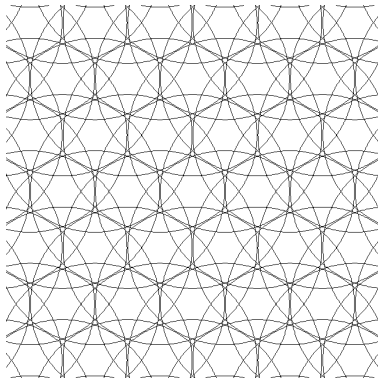


図7 $\mathbf{p31m}$



(赤い点を中心に位数3の回転が2個ある)

図8 $\mathbf{p31m}$ 結晶群をもつルーロー空間 $R(0.67)$

参考までに，図7の $R(0.67)$ を2次元FFTした画像が図9である．これはフリーソフトImageJで作った．内側が低周波，外側にいくほど高周波となっており，白いほどその位置の周波数の振幅が大きいことを示している． $R(d)$ は六面格子になるように作ってあるので，図9を見てもわかるように $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ の3軸方向に対称性があることは当然である．しかし，この方法ではこれ以上の望む結果を得ることはできない．

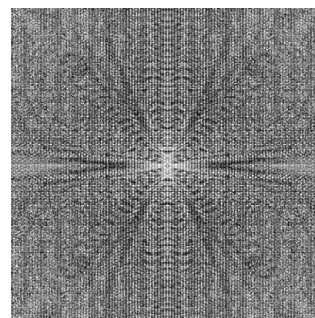


図9 $R(0.67)$ の2次元FFTの画像

今回の研究のテーマは， d によって $R(d)$ の模様の特徴を示す尺度を発見することであり，定義した尺度から得られる数値と d にどのような関係式があるのかを研究することである．

以下の節で，今回行った具体的な研究方法とその結果を示していく．

5. ルーロー模様 $R(d)$ の交点密度エネルギー

初等幾何学では相似という概念がある．これは拡大縮小を無視して形が同じであるということを示す概念である．そして，辺の長さや面積などの尺度を用いると，相似である形の違い（大きさという漠然とした概念）を表すことができる．前節で，ルーロー模様 $R(d)$ は一般的に**p31m**六角格子という文様群であることを説明した．文様群は初等幾何でいう相似という概念に対応すると考える．しかし同じ文様群**p31m**六角格子でも図5を見ると d によって模様（漠然とした概念）が異なる．初等幾何で辺の長さや面積などの尺度で大きさの違いを表すことができたように，この模様の違いを表す尺度を発見できないだろうか．

私は，周期的な模様が発する光の波によって，その違いが現れているのではないかと考えた．このことから，ルーロー模様 $R(d)$ から何らかのデータを取得し，それらのデータをフーリエ解析（高専で学習した）してみればよいのではないかと考えた．では数学的には何のデータをとればよいのだろうか．

私は，規則的な模様を見るという行為を，瞬間的に一部の領域を捉えて，その次に視点の位置を平行移動して（ずらして），そしてそれをくり返し行なうこととだと考えた．これをヒントに，視線が感知する領域を半径1の円領域とし，そこで交点の数を数えていく．そして円領域を水平方向へ微小に平行移動させ，各領域での交点の数をデータとしてとってみようと考えた．

以上の考えを python でプログラムし，以下の手順で平行移動する半径1の円領域内の交点の密度のデータをとることにし，そして得られたデータをエクセルでFFT解析することにした．

交点の密度のデータ取得の方法とFFT解析

- (1) 半径1の円領域を準備して，その領域内に交点がいくつあるかをカウントする．
- (2) 円領域の中心を x 方向に微小に（今回は周期の $1/64$ だけずつ）ずらし，その領域に交点がいくつあるかをカウントし，交点密度を交点数 $\div \pi$ としてデータをエクセルファイルに保存する．そしてこれを，交点の配置が1周期くるまでくり返す．すなわち，図8のように円領域の中心をAからBまでずらしていく．
- (3) FFT解析（Fast Fourier Transformation）を行なうため，交点密度のデータ取得回数は32回とする．
- (4) エクセルのFFT解析を使って， $e^{i\omega t \cdot 2\pi/32}$ の振幅スペクトル $C(\omega)$ （ $0 \leq \omega \leq 32$ ）を算出する．ここで， ω を32個としているのは，残りの半分はFFTの対称性により意味がないからである．

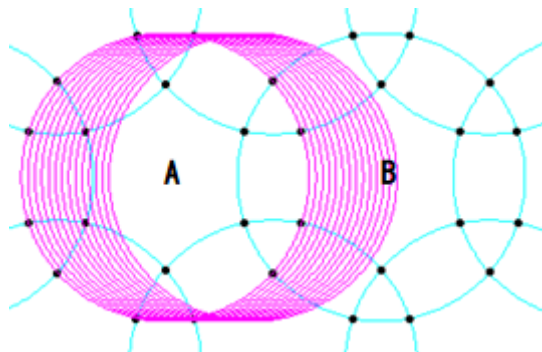


図10 $R(1.5)$ 上で円領域内の交点数のデータを取得する様子

表 1 は、 $R(1.5)$ の交点密度のデータであり、図 1 1はそのグラフである．表 2は周波数 ω に対する FFT の結果($a + bi$)と、振幅スペクトル $C(\omega) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \frac{1}{64}$ である（注意． $E(\omega)$ については後述する）．素直に FFT 解析した結果が、図 1 2のグラフである． $C(0)$ が最大になっており、次に大きいのが $C(1)$ である．この結果はほとんどの d についていえることであった．

表 1 $R(1.5)$ の交点数と交点密度

	交 点 数	交点 密度		交 点 数	交点 密度		交 点 数	交点 密度		交 点 数	交点 密度
1	18	5.729578	9	12	3.819719	17	12	3.819719	25	8	2.546479
2	12	3.819719	10	12	3.819719	18	8	2.546479	26	8	2.546479
3	12	3.819719	11	12	3.819719	19	8	2.546479	27	8	2.546479
4	12	3.819719	12	12	3.819719	20	8	2.546479	28	8	2.546479
5	12	3.819719	13	12	3.819719	21	8	2.546479	29	8	2.546479
6	12	3.819719	14	12	3.819719	22	8	2.546479	30	8	2.546479
7	12	3.819719	15	12	3.819719	23	8	2.546479	31	8	2.546479
8	12	3.819719	16	12	3.819719	24	8	2.546479	32	8	2.546479

	交 点 数	交点 密度		交 点 数	交点 密度		交 点 数	交点 密度		交 点 数	交点 密度
33	10	3.183099	41	8	2.546479	49	12	3.819719	57	12	3.819719
34	8	2.546479	42	8	2.546479	50	12	3.819719	58	12	3.819719
35	8	2.546479	43	8	2.546479	51	12	3.819719	59	12	3.819719
36	8	2.546479	44	8	2.546479	52	12	3.819719	60	12	3.819719
37	8	2.546479	45	8	2.546479	53	12	3.819719	61	12	3.819719
38	8	2.546479	46	8	2.546479	54	12	3.819719	62	12	3.819719
39	8	2.546479	47	8	2.546479	55	12	3.819719	63	12	3.819719
40	8	2.546479	48	8	2.546479	56	12	3.819719	64	12	3.819719

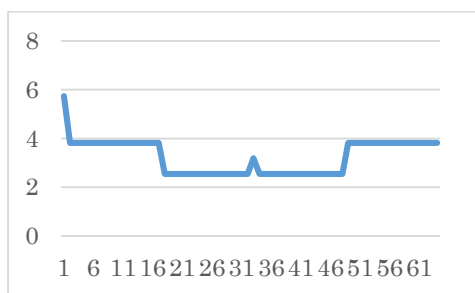


図 1 1 $R(1.5)$ の交点密度のグラフ

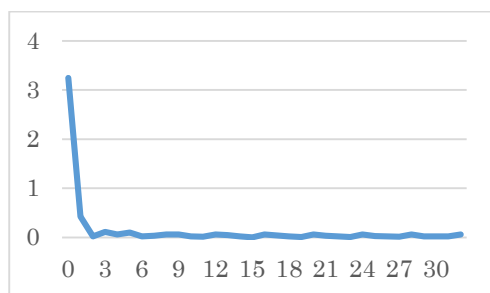


図 1 2 $\omega - C(\omega)$ のグラフ

表 2 FFT の結果

ω	FFT の結果 ($a + bi$)	$C(\omega)$	$E(\omega)$
0	207.538045791831	207.538045791831	0
1	27.1906258764452	27.1906258764452	0.361001
2	1.27323954473517	1.27323954473517	0.003166
3	-7.31024424678914	-7.31024424678914	0.234842
4	3.81971863420549	3.81971863420549	0.113986
5	6.35629673766347	6.35629673766347	0.493195
6	1.27323954473517	1.27323954473517	0.028497
7	-2.2852265973306	-2.2852265973306	0.124947
8	3.81971863420549	3.81971863420549	0.455945
9	3.96527838068377	3.96527838068377	0.621874
10	1.27323954473517	1.27323954473517	0.079157
11	-0.851032300218473	0.851032300218473	0.042791
12	3.81971863420549	3.81971863420549	1.025877
13	2.99000433528943	2.99000433528943	0.737735
14	1.27323954473517	1.27323954473517	0.155148
15	-0.131563811260368	0.131563811260368	0.001902
16	3.81971863420549	3.81971863420549	1.823781
17	2.42723660158911	2.42723660158911	0.831366
18	1.27323954473517	1.27323954473517	0.256469
19	0.328940740847182	0.328940740847182	0.019073
20	3.81971863420549	3.81971863420549	2.849658
20	3.81971863420549	2.0363899589011	2.849658
21	2.0363899589011	1.27323954473517	0.892957
22	1.27323954473517	0.67104208880354	0.383121
23	0.67104208880354	3.81971863420549	0.116312
24	3.81971863420549	1.72881193844531	4.103508
25	1.72881193844531	1.27323954473517	0.912107
26	1.27323954473517	0.954309641579097	0.535103
27	0.954309641579097	3.81971863420549	0.324173
28	3.81971863420549	1.46210678997634	5.58533
29	1.46210678997634	1.27323954473517	0.877858
30	1.27323954473517	1.21068929690042	0.712415
31	1.21068929690042	3.81971863420549	0.687795
32	3.81971863420549	207.538045791831	7.295125
$E_{pt}(1.5)$			32.68621

ほとんどの d で図 1 1 のようなグラフが得られるということはどういうことなのか. 私は模様 $R(d)$ の x 方向の周期性が周波数 $\omega = 0,1$ に支配されていることを意味すると考えた. しかし, 周波数 $\omega = 0$ は, 視覚的な光の刺激には影響しないはずなので, 周波数 $\omega = 1$ が $\mathbf{p31m}$ 六角格子の平面結晶群をもつ $R(d)$ の x 方向の周期性に対応すると考えられる. それでは, 同じ $\mathbf{p31m}$ 六角格子の平面結晶群をもちながら, d による模様の違いを表している要因は何なのだろうか. 表 2 の $C(\omega)$ を詳しく見ると, $\omega \neq 0,1$ のときも $C(\omega) \neq 0$ である. それはどんな周波数も模様の違いに影響を与えていると考えることができる. $C(\omega)$ をうまく使って模様の違いに影響を与えるような $R(d)$ の尺度を定義すればよい. そして, 交点密度エネルギーという考えを思いついた.

交点密度エネルギーの定義

各局所単位円においてその交点密度をデータとしてとり, それらを FFT 解析から得られる振幅スペクトル C_ω ($0 \leq \omega \leq 32$)と振動数 ω に関する力学的エネルギー $E(\omega) = (2\omega C(\omega))^2/2$ の総和を, $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ と呼ぶ.

模様 $R(1.5)$ の交点密度エネルギーは, $E_{pt}(1.5) = 32.686$ であった (表 2).

6. $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ の調査結果

交点の座標を数式で求め, 処理するプログラムを作り単位円内の交点をカウントした. また, $d = 1$ などの特殊なものは交点が2重点でなく3重点以上の重複度を持ち, このような場合は密度エネルギーが小さく計算されるので, 以下のデータでは無視した. 以下に, $0.5 \leq d \leq 1.6$ の $R(d)$ に関する交点エネルギー $E_{pt}(d)$ の一般的な d のデータを列举する.

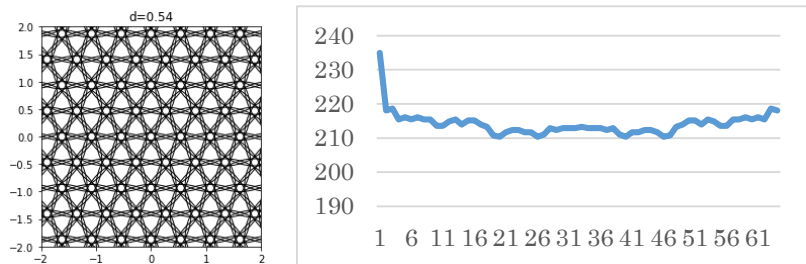


図 1 3 ルーロー模様 $R(0.54)$ と交点密度のグラフ

$R(0.54)$ の交点密度エネルギー

$$E_{pt}(0.54) = 1953.96$$

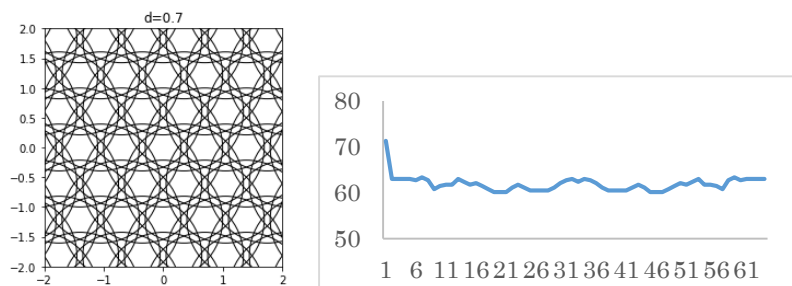


図 1 4 ルーロー模様 $R(0.70)$ と交点密度のグラフ

$R(0.7)$ の交点密度エネルギー

$$E_{pt}(0.7) = 433.34$$

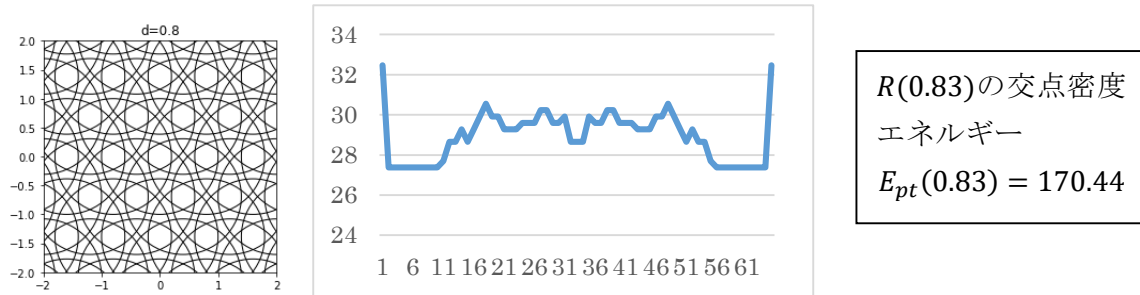


図 1 5 ルーロー模様 $R(0.80)$ と交点密度のグラフ

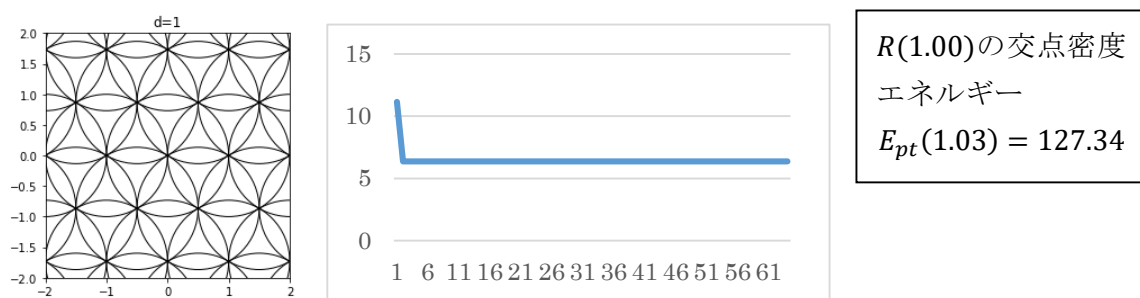


図 1 6 ルーロー模様 $R(1.00)$ と交点密度のグラフ

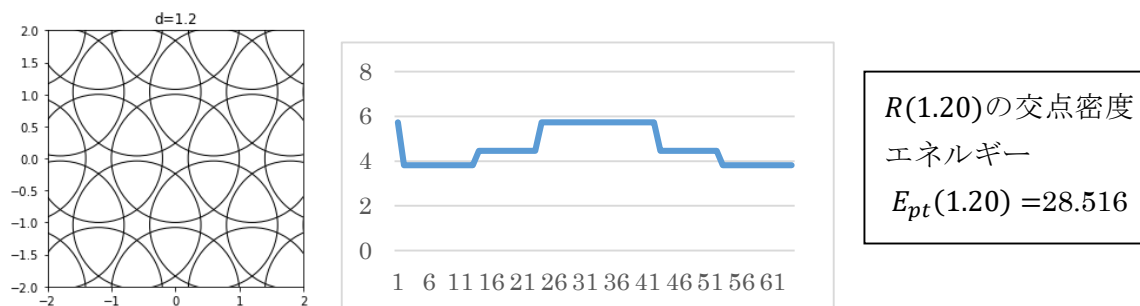


図 1 7 ルーロー模様 $R(1.20)$ と交点密度のグラフ

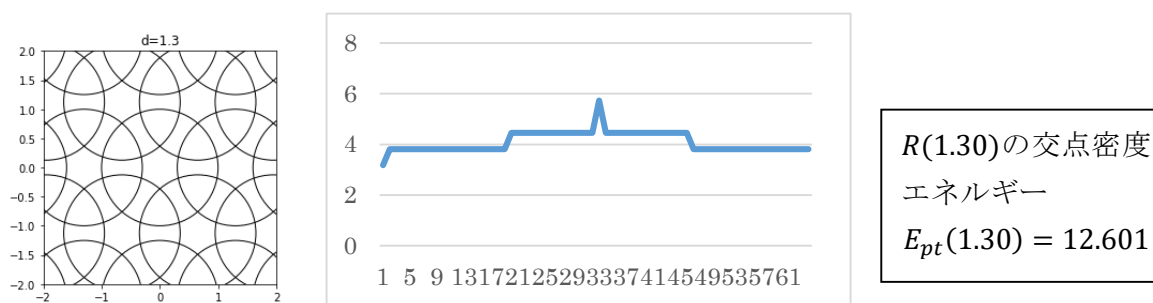


図 1 8 ルーロー模様 $R(1.30)$ と交点密度のグラフ

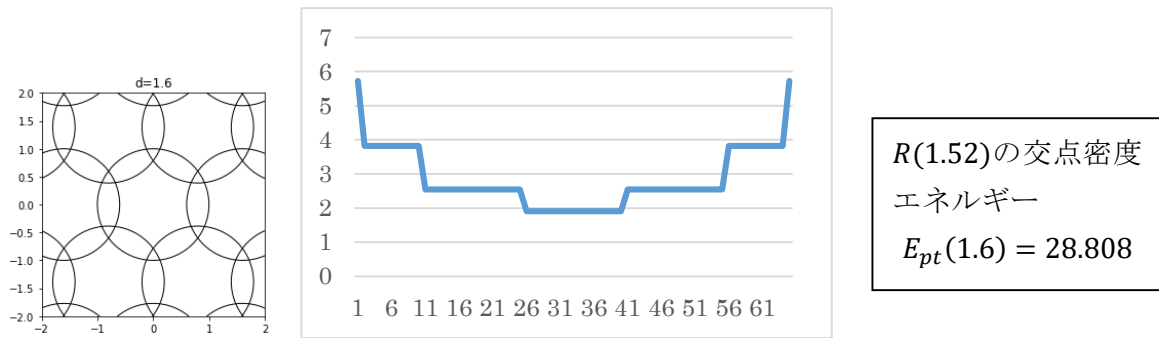


図 19 ルーロー模様 $R(1.6)$ と交点密度のグラフ

7. $R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式

$R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式を求めるために、 $d - E_{pt}(d)$ のデータを表 3 に整理し、そのグラフを考察した (図 2 1) .

表 3 $d, E_{pt}(d)$ のデータ

d	0.54	0.6	0.7	0.8	0.85	1.00
$E_{pt}(d)$	1953.957	1381.511	433.3426	170.4354	243.3894	127.3441
$E_{pt}(d)_{1.0}$	15.34392	10.84865	3.402927	1.338385	1.911273	1
$\log(E_{pt}(d)_{1.0})$	2.730719	2.38404	1.224636	0.291463	0.64777	0
$f(d)$	2.468037	2.014286	1.394505	0.88125	0.649105	0
$E_{pt}(d)_{\text{仮}}$	11.79926	7.495372	4.03298	2.413915	1.913827	1

d	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$E_{pt}(d)$	93.1753	28.51559	12.6009	22.93178	32.68621	28.80756
$E_{pt}(d)_{1.0}$	0.731681	0.223925	0.098952	0.180077	0.256676	0.226218
$\log(E_{pt}(d)_{1.0})$	-0.31241	-1.49644	-2.31312	-1.71437	-1.35994	-1.48626
$f(d)$	-0.42727	-0.88125	-1.39451	-2.01429	-2.82	-3.96563
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	0.652286	0.414265	0.247956	0.133416	0.059606	0.018956

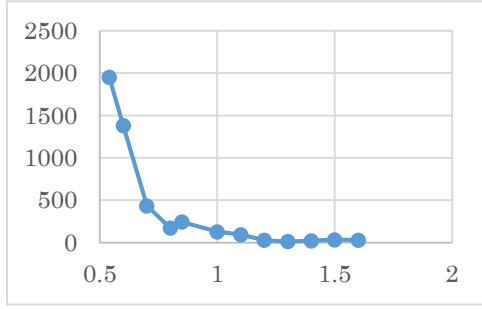


図 2.0 $d - E_{pt}(d)$ のグラフ

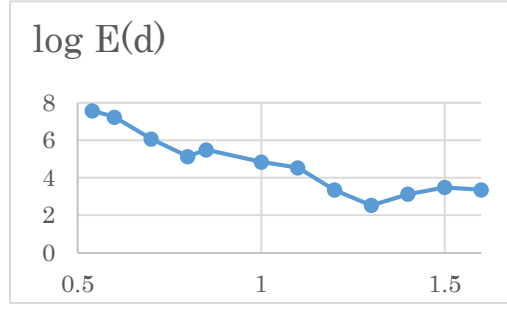


図 2.1 $d - \log(E_{pt}(d))$ のグラフ

前節でも述べたように、例えば、 $d = 1$ の場合、6 重点だけの模様となっているが（図 6）、 $E_{pt}(d)$ は 2 重点の個数を 1 としてカウントするので、6 重点の場合は 5 としてカウントし、 $E_{pt}(1) = 127.3441$ を得た。これを基準に考えた交点密度エネルギーを相対交点密度エネルギーと呼び、

$$E_{pt}(d)_{1.0}$$

と表すことにした。 $E_{pt}(d)_{1.0}$ は FFT のデータ数に依存しないものとして考えた量である。

さて、得られたデータの $d - E_{pt}(d)$ のグラフは指数関数のグラフのように見えた。そこで、 $d - \log(E_{pt}(d)_{1.0})$ の回帰直線を求めた（図 2.1）。その結果、 $\log(E_{pt}(d)_{1.0}) = -4.2314d + 4.3225$ であり、相関係数 r は、 $r = -0.921$ で強い相関が得られた。しかし、 $0 < d < 2$ であり、 $\lim_{d \rightarrow 0} \log(E_{pt}(d)_{1.0}) = +\infty$ 、 $\lim_{d \rightarrow 2} \log(E_{pt}(d)_{1.0}) = -\infty$ であることを考慮する必要がある。そこで、 $d = 1$ のとき $\log(E_{pt}(d)_{1.0}) = 0$ であることも考慮して、

$$f(d) = \frac{4.23(d-1)}{d(d-2)}$$

という $\log(E_{pt}(d)_{1.0})$ の近似関数を考えた。まだまだ不十分ではあるが、今回はこれを使い、相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ との関係式を、 $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と書いて

$$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}} = e^{f(d)}$$

として、相対交点密度エネルギーを表す仮の尺度とした。

予想 ルーロー模様 $R(d)$ について、 d に関する相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ は、ある単調減少な指数関数で表される。ただし、 $\lim_{d \rightarrow 0} E_{pt}(d)_{1.0} = +\infty$ 、 $\lim_{d \rightarrow 2} E_{pt}(d)_{1.0} = 0$ を満たす。

8. ルーロー模様 $R(d)$ の交点モーメント支配因子

ルーロー模様 $R(d)$ をじっと見ていると、少し模様が振動するような錯覚を受ける。これについても模様が作る幾何学的な量が影響しているように思えた。

私はこれについて、見る視点を中心とした交点のモーメントに関係するのではないかと考えた。すなわち、見る視点を中心として単位円を考え、その単位円内にある交点が中心軸（ y 軸）より左側に多いときは左側が重く感じ、右側に多いときは右側が重く感じる。私たちは模様を見るときに、模様のパ

ターンのある方向へ視線をずらしながら見ていく，同時に左右のモーメントの変化を感じ取っていると考えた．そこで今回の研究では，上下に対称である軸を x 軸にとり， x 軸上で視点を平行移動したとして，平行移動する半径 1 の円領域内の交点の（視点の縦軸となる） y 軸に関するモーメントの総和のデータを取り，得られたデータをエクセルで FFT 解析することにした．

今回は，データ数 $2^6 = 64$ での FFT 解析を行ない，振動という錯覚に影響している $R(d)$ の幾何学的な量として以下を定義した．

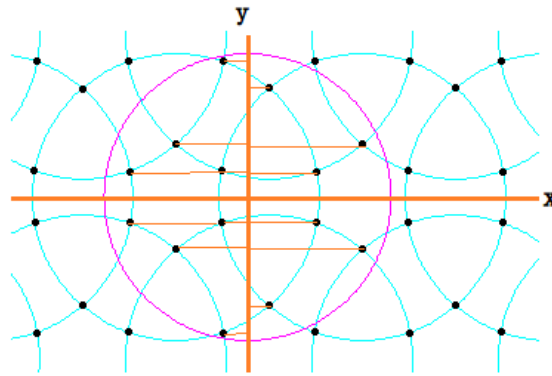


図 2.2 交点モーメント

交点モーメント支配因子の定義

平行移動しているデータ取得領域である単位円において，その y 軸に関する交点のモーメントの総和をデータとしてとり，それらの FFT 解析から得られる振幅スペクトル C_ω ($0 \leq \omega \leq 64$)を値の大きい順に並べる．このとき，最大な C_ω の周波数 ω_1 と，2番目に大きい C_ω の周波数 ω_2 と，振幅比 $C_\omega(1:2) = C_{\omega_2}/C_{\omega_1}$ の3つの量を $R(d)$ の交点モーメント支配因子呼び， $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ と表す．さらに，

$$F_{1,2}(x) = \cos \omega_1 x + C_\omega(1:2) \cos \omega_2 x$$

を，交点モーメント支配因子関数と呼ぶ．

上に定義した交点モーメント支配因子は，交点モーメントの FFT の状況を代表的な数値で表したもので，交点モーメント支配因子関数は，交点モーメント支配因子を用いて FFT の状況を近似した関数である．

(例 1) $R(0.60)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (12, 18 | 0.57)$ である．

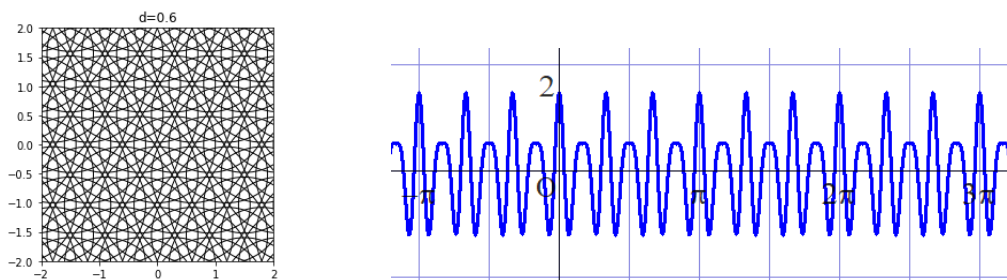


図 2.3 ルーラー模様 $R(0.60)$ と交点モーメント支配因子関数のグラフ

(例 2) $R(0.80)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (5, 25 | 0.87)$ である.

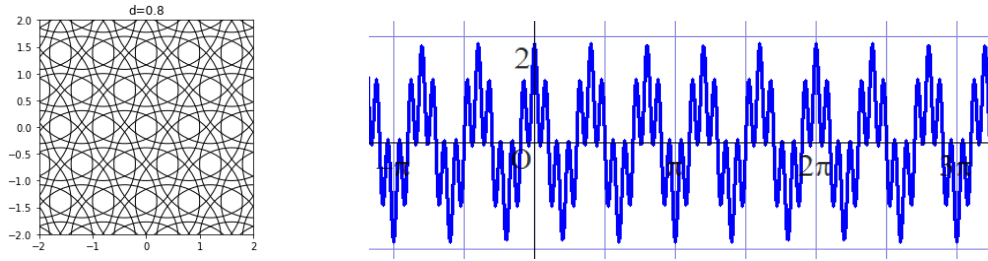


図 2 4 ルーロー模様 $R(0.80)$ と交点モーメント支配因子関数のグラフ

(例 3) $R(1)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (1, 2 | 0.99)$ である.

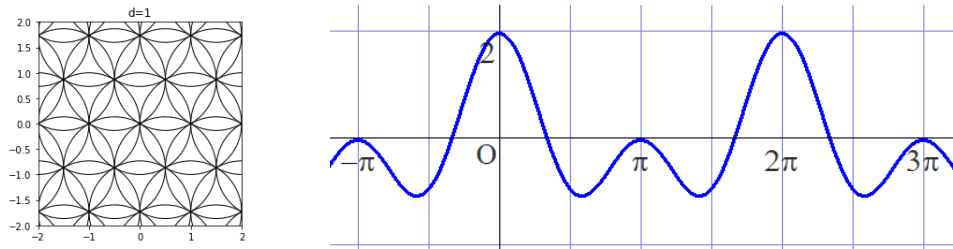


図 2 5 ルーロー模様 $R(1)$ と交点モーメント支配因子関数のグラフ

例 1 と例 2 は, どちらも交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の周波数 ω_1, ω_2 の振幅が同じくらいあるものである. $R(1)$ の場合は $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$ であるが, 振幅比が0.99で $\omega_1 = 1$ の影響が弱いものである.

9. 交点モーメント支配因子に関する結果

$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ は $d = 1$ のときの交点密度エネルギー $E_{pt}(1)$ を基準にしたもので, 模様の濃さのようなものを表す量として定義した. また, 交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ は, 模様の揺らぎのような量を表すものとして定義した. $F_{1,2}(x)$ は交点モーメント支配因子関数で, 交点モーメント支配因子を用いて FFT の状況を近似した関数である. これらの量や関数はルーロー図形のフーリエ変換全体を考えなくても, その図形の特徴を示すものになるだろうと考え定義した.

表 4 は交点モーメント研究の結果の一部で, $0.5 \leq d \leq 1.6$ の $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と $(\omega_1, \omega_2 | F_\omega)$ の主なデータである. これは, $d = 1$ のルーロー模様 (6 重点だけで構成され模様) を基準に比較できるようにまとめたものである.

$d = 0.54$ ルーロー模様は $d = 1$ の模様になんとか類似している印象があるが, $F_{1,2}(x)$ のグラフの類似性がそれを表しているように見える. また, $d = 1.1$ のルーロー模様は, 空白が大きいエリアが目立つ印象を受けるが, それが $\omega_1 = 22$ という大きい値をとることに対応しているように思える.

$d = 0.7$ や $d = 1.2$ のルーロー模様も空白が大きいエリアが目立つ印象をもつが, それぞれ, $\omega_1 = 21, \omega_1 = 20$ という値をとっている. これらの模様の少しの違いは, 2 番目に広くみえる空白エリアにあるように見え, $d = 0.7$ の模様の方が目立つ. これが ω_2 の値の違いに現れているように見える.

この考察から $d = 1.4$ と $d = 1.5$ のルーロー模様を比較してみると, 円の中心に見える 6 角形のエリアが $d = 1.4$ より $d = 1.5$ 目立ち, それぞれ, $\omega_1 = 13, \omega_1 = 4$ という値をとっている. そして, 2 番目に広

くみえる空白エリアはすこしだけ $d = 1.4$ の模様が大きい．これに対して， $\omega_2 = 8, \omega_2 = 8$ という値をとっている．

表 4 主な $R(d)$ の $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$

d	0.54	0.6	0.7	0.8
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	15.34392	10.84865	3.402927	1.338385
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(1,3 0.58)	(12,18 0.49)	(21,4 0.55)	(5,25 0.87)
$F_{1,2}(x)$ のグラフ				
ルーロー模様 $R(d)$				

d	0.85	1.0	1.1	1.2
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	1.911273	1	0.731681	0.223925
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(11,29 0.90)	(1,2 0.99)	(22,1 0.65)	(20,6 0.85)
$F_{1,2}(x)$ のグラフ				
ルーロー模様 $R(d)$				

d	1.3	1.4	1.5	1.6
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	0.098952	0.180077	0.256676	0.226218
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(4,10 0.97)	(13,8 0.96)	(4,8 0.92)	(13,21 0.72)
$F_{1,2}(x)$ のグラフ				
ルーロー模様 $R(d)$				

以上のような考察をしてはみたものの、ルーロー模様 $R(d)$ と、今回定義した交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の明確な対応関係を見いだすことはできなかった。

10. 今後の研究の予定

今回、模様の相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ については、仮の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ を用いた。すなわち、 $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}} = e^{f(d)}$ としたとき、 $f(d)$ を

$$f(d) = \frac{4.32(d-1)}{d(d-2)}$$

という式で近似した。しかし、まだまだ実際のデータと誤差が大きく、納得できるものではない。 $f(d)$ が増減していることから三角関数が含まれているかの研究も含め、 $f(d)$ の正確な関数を求めたい。

さらに、ルーロー模様 $R(d)$ と今回定義した交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の明確な対応関係があるのか、それとも別な量があるのか、さらに研究したい。

また、ルーロー空間の対称性を2つの円の中心の間で調べたが、任意の地点から任意の方向でデータをとった場合を調べたい。

今回、モーメント支配因子は振幅スペクトルの大きい2つを用いたが、全てのデータの減少の様子を加味した全データを用いた評価も行いたい。

その他、数値処理のプログラムで得られたデータからの発見として、得られたデータの範囲では交点密度をFFT解析すると虚数の係数が全てが0になる。この理由も研究したい。

11. 謝辞

本論文の執筆にあたり、主指導教員である松田修教授には、研究の着想、アドバイス、相談、論文執筆まで多くのご指導を5年間もの間いただきました。ここに心から感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 加田紘大, 2次曲線で作られる凹型ルーロー三角形の掛谷問題, 代数学ミニシンポジウム 2018in 倉敷 (報告集) pp. 40-50, http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2018.pdf
- [2] 加田紘大, 正多角形から得られるルーロー図形の研究, 代数学ミニシンポジウム 2017in 倉敷 (報告集) pp. 76-85, http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2017.pdf
- [3] 松田修研究室 HP, 加田紘大, ルーロー模様のフーリエ解析 <https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/ReuleauxFFT.pdf>

付録. 研究に用いたプログラム

本研究では任意のルーロー模様 $R(d)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム, ルーロー模様 $R(1)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム, 交点座標をcsvファイルから読み込み交点密度エネルギーの導出に必要なデータをcsvファイルに書き込むプログラム, 交点座標をcsvファイルから読み込みモーメント支配因子の導出に必要なデータをcsvファイルに書き込むプログラムの4つを用いてデータを収集, 解析した. また本研究には時間の都合上使えなかったが, 交点座標をより高速に求める軽量化したプログラムも記載する.

それぞれのプログラムは $d, cnt, excel_cell_cnt, cx, cy, theta, caret$ の変数に目的合わせて値を設定する. d の値はルーロー模様 $R(d)$ を描くために使われる. cnt は円の個数の設定に使われ, $(2 \times cnt + 1)^2$ の円を描く. また他変数より得られる条件より大きい自然数 cnt を入力しなければ十分なデータを得られない. $excel_cell_cnt$ は読み込むcsvデータのデータが入力されている行の数を入力する. cx, cy は座標データの読み込み開始地点の x, y 座標を設定する. $Theta$ は座標データの読み込む方向を設定し, 単位[rad]を入力する. $Caret$ はデータの分割数を設定し $2^{theta-1}$ 個のデータを記録する.

プログラム 1. 任意のルーロー模様 $R(d)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import sympy.geometry as sg
import csv
figure, axes = plt.subplots()
axes.set_aspect(1./axes.get_data_ratio())

window_size=3
plt.xlim(-window_size,window_size)
plt.ylim(-window_size,window_size)

d=0.6
cx=0
cy=0
caret=6
theta=0

radius=1
cnt=4
i=-d*cnt
lx = []
ly = []
ix = []
loix=0
iy = []
ioiy=0
stockix=[]
stockiy=[]
nix=[]
```

```

niy=[]
a=1
one=0

with open(('交点座標データ''%f'.csv)% d,'a',newline='') as f:
    writer = csv.writer(f)
    writer.writerow(["d="+str(d), "cnt="+str(cnt)])
j=-cnt
while j<=cnt:
    lx.append(i)
    i=i+d
    j=j+1

i=-d*math.sqrt(3)/2*cnt
j=-cnt
while j<=cnt:
    ly.append(i)
    i=i+d*math.sqrt(3)/2
    j=j+1

v=-cnt
while v<=cnt:
    u=-cnt
    while u<=cnt:
        if (v+cnt*2)%2==0:
            plt.plot(lx[u+cnt],ly[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 0)
            center1 = sg.Point(lx[u+cnt],ly[v+cnt])
            circle1 = sg.Circle(center1, radius)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt],ly[v+cnt]),1,fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v2=-cnt

        elif (v+cnt*2)%2==1:
            plt.plot(lx[u+cnt]+d/2,ly[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt]+d/2,ly[v+cnt]),1,fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            center1 = sg.Point(lx[u+cnt]+d/2,ly[v+cnt])
            circle1 = sg.Circle(center1, radius)

            v2=-cnt
        while v2<=cnt:
            u2=-cnt
            while u2<=cnt:
                if (v2+cnt*2)%2==0:
                    center2 = sg.Point(lx[u2+cnt],ly[v2+cnt])
                    circle2 = sg.Circle(center2, radius)

                elif (v2+cnt*2)%2==1:
                    center2 = sg.Point(lx[u2+cnt]+d/2,ly[v2+cnt])

```

```

circle2 = sg.Circle(center2, radius)

if center1 != center2:
    result = sg.intersection(circle1, circle2 )
    if len(result)==2:
        intersectionchekerx0=0
        check=0
        if one==0:
            ix.append(result[0].x)
            iy.append(result[0].y)
            ix.append(result[1].x)
            iy.append(result[1].y)
            a=0
            while a<=1:
                if abs(result[a].x) < 10**-7:
                    stockix.append(0)
                else:
                    stockix.append(result[a].x)

                if abs(result[a].y) < 10**-7:
                    stockiy.append(0)
                else:
                    stockiy.append(result[a].y)

            loix=len(ix)
            loiy=len(iy)
            one=1

        if one!=0:
            while intersectionchekerx0<loix:
                intersectionchekery0=0

                resultcnt0=0
                while resultcnt0<=1:
                    resultcnt1=0
                    while resultcnt1<=1:
                        if result[resultcnt0].x==ix[intersectionchekerx0]:
                            if result[resultcnt1].y==iy[intersectionchekery0]:
                                check=1
                                resultcnt1=resultcnt1+1
                                resultcnt0=resultcnt0+1
                            intersectionchekerx0=intersectionchekerx0+1
                            intersectionchekery0=intersectionchekery0+1

            if check==0:
                ix.append(result[0].x)
                iy.append(result[0].y)
                ix.append(result[1].x)
                iy.append(result[1].y)
                loix=len(ix)

```

```

loiy=len(iy)

        u2=u2+1
        v2=v2+1
        u=u+1
        v=v+1
plt.title(' d=' +str(d))

pointx=0
pointy=0

i=0
while i<len(ix):

    if abs(ix[i]) < 10**-7:
        stockix.append(0)
    else:
        stockix.append(ix[i])

    if abs(iy[i]) < 10**-7:
        stockiy.append(0)
    else:
        stockiy.append(iy[i])
    i=i+1

nix.append(stockix[0])
niy.append(stockiy[0])

i=0
while i<len(stockix):

    j=0

    jchecklist=[]
    pointx=0
    pointy=0
    points=0
    while j<len(nix):
        pointx=0
        pointy=0
        if abs(stockix[i]-nix[j])<10**-7:
            pointx=1
        if abs(stockiy[i]-niy[j])<10**-7:
            pointy=1
        if pointx+pointy==2:
            points=1
        j=j+1
    if points!=1:
        nix.append(stockix[i])
        niy.append(stockiy[i])

```

```

        i=i+1
i=0
while i<len(nix):
    with open('交点座標データ.csv')% d,'a',newline='') as f:
        writer = csv.writer(f)
        writer.writerow(["="+str(nix[i]),"+str(niy[i])])
    i=i+1

```

プログラム2. ルーロー模様R(1)の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム

```

import matplotlib.pyplot as plt
import math
import sympy.geometry as sg
import csv

figure, axes = plt.subplots()
axes.set_aspect(1./axes.get_data_ratio())

windowsize=5
plt.xlim(-windowsize,windowsize)
plt.ylim(-windowsize,windowsize)

radius=1
cnt=5
lx= []
ly= []

with open('交点座標データ.csv','a',newline='') as f:
    writer = csv.writer(f)
    writer.writerow(["d="+str(1), "cnt="+str(cnt)])

i=-cnt
j=-cnt
while j<=cnt:
    lx.append(i)
    i=i+1
    j=j+1

i=-math.sqrt(3)/2*cnt
j=-cnt
while j<=cnt:
    ly.append(i)
    i=i+math.sqrt(3)/2
    j=j+1

u=-cnt
while u<=cnt:
    v=-cnt
    while v<=cnt:

```

```

        if v%2==0:
            plt.plot(lx[u+cnt],ly[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt],ly[v+cnt]),1,fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v=v+1

        elif v%2==1:
            plt.plot(lx[u+cnt]+1/2,ly[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt]+1/2,ly[v+cnt]),1,fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v=v+1

    u=u+1
plt.title('d'+str(1))

ax=[]
ay=[]
i=-cnt
while i<=cnt:
    ax.append(i)
    ay.append(i*math.sqrt(3)/2)
    i=i+1

v=-cnt
while v<cnt:
    u=-cnt
    while u<=cnt:
        if (v+cnt*2)%2==0:
            plt.plot(ax[u],ay[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 4)
            with open('交点座標データ 1.0.csv','a',newline='') as f:
                writer = csv.writer(f)
                writer.writerow(["="+str(ax[u]),"="+str(ay[v+cnt])])

        elif (v+cnt*2)%2==1:
            plt.plot(ax[u]+1/2,ay[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 4)
            with open('交点座標データ 1.0.csv','a',newline='') as f:
                writer = csv.writer(f)
                writer.writerow(["="+str(ax[u]+1/2),"="+str(ay[v+cnt])])

    u=u+1
    v=v+1

```

プログラム3. 交点座標をcsvファイルから読み込み交点密度エネルギーの導出に必要なデータをcsvファイルに書き込むプログラム

```

import csv
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from decimal import Decimal, ROUND_HALF_UP

```

```

figure, axes = plt.subplots()
axes.set_aspect(1./axes.get_data_ratio())

window_size=4
plt.xlim(-window_size,window_size)
plt.ylim(-window_size,window_size)

d=1.4
excel_cell_cnt=0
radius=1
cnt=6
cx=0
cy=0
theta=0

ix=[]
iy=[]
lx= []
ly= []

with open('交点座標データ.csv','r',newline='') as f:
    reader=csv.reader(f)
    line=[row for row in reader]

    i=1
    while i<excel_cell_cnt:
        a=line[i][0]
        a2=float(a.lstrip("="))
        c=line[i][1]
        c2=float(c.lstrip("="))

        ix.append(a2)
        iy.append(c2)

        print("a")
        plt.plot(float(a2),float(c2),marker = 'o',color = 'b',markersize = 3)
        print("b")
        i=i+1

    i=-d*cnt
    j=-cnt
    while j<=cnt:
        lx.append(i)
        i=i+d
        j=j+1

    i=-d*math.sqrt(3)/2*cnt
    j=-cnt
    while j<=cnt:
        ly.append(i)

```



```

        i=i+d*math.sqrt(3)/2
        j=j+1

u=-cnt
while u<cnt:
    v=-cnt
    while v<cnt:
        if v%2==0:
            plt.plot(lx[u+cnt],ly[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt],ly[v+cnt]),1,fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v=v+1

        elif v%2==1:
            plt.plot(lx[u+cnt]+d/2,ly[v+cnt],marker = 'o',color = 'b',markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt]+d/2,ly[v+cnt]),1,fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v=v+1
    u=u+1

px=0
py=0
r=1
w=0
caret=7
jstep=2*d/(2**caret)
Ts=[]
dist=0
dist2=0

while w<d:
    ts=0
    i=0
    while i<len(ix):
        px=ix[i]
        py=iy[i]
        dist=float(math.sqrt((w*math.cos(theta)-px+cx)**2+(w*math.sin(theta)-py+cy)**2))
        y = Decimal(str(dist))
        dist2=y.quantize(Decimal('0.0000000000001'), rounding=ROUND_HALF_UP)
        if dist2<=r:
            ts=ts+1
            i=i+1

    Ts.append(ts)

draw_circle = plt.Circle((w*math.cos(theta)+cx, w*math.sin(theta)+cy), r,fill=False,ec='y')
axes.add_artist(draw_circle)

```

```

w=w+jstep

i=0
while i<len(Ts):
    with open(('交点密度データ.csv')% d,'a',newline='') as f:
        writer = csv.writer(f)
        writer.writerow(["="+str(Ts[i]/math.pi)])
    i=i+1
plt.title('d='+str(d))

```

プログラム4. 交点座標をcsvファイルから読み込みモーメント支配因子の導出に必要なデータをcsvファイルに書き込むプログラム

```

import csv
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from decimal import Decimal, ROUND_HALF_UP

figure, axes = plt.subplots()
axes.set_aspect(1./axes.get_data_ratio())

windowsize=3
plt.xlim(-windowsize,windowsize)
plt.ylim(-windowsize,windowsize)
d=0.8
cnt=6
excel_cell_cnt=0
cx=0
cy=0
theta=0
caret=7

lx= []
ly= []
ix=[]
iy=[]

radius=1

with open('交点座標データ.csv','r',newline='') as f:
    reader=csv.reader(f)
    line=[row for row in reader]

    i=1
    while i<excel_cell_cnt:
        a=line[i][0]
        b=float(a.lstrip("="))
        c=line[i][1]
        d=float(c.lstrip("="))

```

```

        ix.append(b)
        iy.append(d)

    plt.plot(float(b), float(d), marker = 'o', color = 'b', markersize = 3)
    i=i+1

i=-d*cnt
j=-cnt
while j<=cnt:
    lx.append(i)
    i=i+d
    j=j+1

j=-cnt
i=-d*math.sqrt(3)/2*cnt
while j<=cnt:
    ly.append(i)
    i=i+d*math.sqrt(3)/2
    j=j+1

u=-cnt
while u<=cnt:
    v=-cnt
    while v<=cnt:
        if v%2==0:
            plt.plot(lx[u+cnt], ly[v+cnt], marker = 'o', color = 'b', markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt], ly[v+cnt]), 1, fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v=v+1

        elif v%2==1:
            plt.plot(lx[u+cnt]+d/2, ly[v+cnt], marker = 'o', color = 'b', markersize = 0)
            draw_circle = plt.Circle((lx[u+cnt]+d/2, ly[v+cnt]), 1, fill=False)
            axes.add_artist(draw_circle)
            v=v+1
    u=u+1

px=0
py=0
r=1
w=0
jstep=2*d/(2**caret)
Tx=[]
dist=0
dist2=0

while w<d:
    tx=0
    i=0

```

```

while i<len(ix):
    px=ix[i]
    py=iy[i]
    dist=float(math.sqrt((w-px+cx)**2+(-py+cy)**2))
    y = Decimal(str(dist))
    dist2=y.quantize(Decimal('0.00000001'), rounding=ROUND_HALF_UP)
    if dist2<=r:
        tx=tx+px-w
        print(tx)
    i=i+1
Tx.append(tx)

draw_circle = plt.Circle((w*math.cos(theta)+cx, w*math.sin(theta)+cy), r, fill=False, ec='y')
axes.add_artist(draw_circle)
w=w+jstep
i=0
while i<len(Tx):
    with open('交点モーメントデータ.csv','a',newline='') as f:
        writer = csv.writer(f)
        writer.writerow(["="+str(Tx[i])])
    i=i+1
plt.title('d='+str(d))

```

プログラム5. 任意のルーロー模様 $R(d)$ の交点座標をcsvファイルに書きこむプログラム (軽量化 ver)

```

import datetime
import sympy.geometry as sg
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from decimal import Decimal, ROUND_HALF_UP

def get_unique_list(seq):
    seen = []
    return [x for x in seq if x not in seen and not seen.append(x)]

cnt=5
radius=1
d=0.66

figure, axes = plt.subplots()
axes.set_aspect(1./axes.get_data_ratio())

window_size=2
plt.xlim(-window_size, window_size)
plt.ylim(-window_size, window_size)

fdt_now = datetime.datetime.now()
print("          開始", fdt_now)

dt_now = datetime.datetime.now()

```

```

print("        中心設定中", dt_now)

list_center = []

for j in range(-cnt, cnt+1):
    for i in range(-cnt, cnt+1):
        if (j+cnt*2)%2==0:
            center_x, center_y = i*d, math.sqrt(3)/2*d*j

        else:
            center_x, center_y = i*d+d/2, math.sqrt(3)/2*d*j

        center=sg.Point(center_x, center_y)
        list_center.append(center)
        draw_circle = plt.Circle(center, 1, fill=False)
        axes.add_artist(draw_circle)

dt_now = datetime.datetime.now()
print("    四捨五入定義中", dt_now)

def round_off(a):
    return Decimal(str(float(a))).quantize(Decimal('0.00000001'), rounding=ROUND_HALF_UP)

dt_now = datetime.datetime.now()
print("    交点座標計算中", dt_now)

list_intersection=[]

check_j=0
for j in range(0, (2*cnt+1)**2):
    check_i=0
    cnt_jskip=0
    for i in range(j+1, (2*cnt+1)**2):
        center_1=list_center[j]
        center_2=list_center[i]

        if center_1.distance(center_2)<2 and center_1!=center_2:
            check_i=1
            check_j=1

            circle_1=sg.Circle(center_1, radius)
            circle_2=sg.Circle(center_2, radius)

            result = sg.intersection(circle_1, circle_2)
            point=sg.Point(round_off(result[0][0]), round_off(result[0][1]))
            list_intersection.append(point)
            point=sg.Point(round_off(result[1][0]), round_off(result[1][1]))
            list_intersection.append(point)

dt_now = datetime.datetime.now()

```

```

print("        リスト整理中", dt_now)

list_write=get_unique_list(list_intersection)

dt_now = datetime.datetime.now()
print("        交点描画中", dt_now)

dt_now = datetime.datetime.now()
print("csv ファイルに記録中", dt_now)

import csv
for i in range(len(list_write)):
    with open((' 交点座標データ'+'%f'.csv'% d,'a',newline='')) as f:
        writer = csv.writer(f)
        writer.writerow(["="+str(list_write[i][0]),"="+str(list_write[i][1])])

ldt_now = datetime.datetime.now()
print("        終了", ldt_now)

print(str(ldt_now-fdt_now)+"で計算しました")

```

卒 業 研 究

津山を活性化させるための水族館構想

先進化学系

田邊陽太

指導教員 松田修

令和3年3月4日

概要

本研究の目的は、津山に水族館を構想することである。このテーマから、津山地域の本質的な課題を考え、それを解決するための現代テクノロジーを調査し、それをもとに、津山地域が活性化する街づくりデザインを考えていく。水族館の設置場所は、市の中心にある鶴山公園にし、建物は生きた木で建築する。そして、淡水プランクトンを展示する。このことから、この水族館は津山を楽しくするためのアイデアを募集する拠点となる場所にしたいと考える。このような構想が理解できるように津山水族館のコマーシャルも制作した。

Abstract

Aquarium concept to revitalize Tsuyama City

TANABE YOTA

The purpose of this study is to envision an aquarium in Tsuyama City. From this theme, I considered the essential issues of the Tsuyama area, investigated modern technologies to solve them, and considered urban development designs that would revitalize the Tsuyama area based on them. The aquarium will be set up in Tsuyama Park in the center of the city, and the building will be built with living wood. And we will exhibit freshwater plankton. I would like to make this aquarium a base for soliciting ideas to make Tsuyama fun. I also made a commercial for Tsuyama Aquarium so that I could understand this concept.

キーワード：津山，デザイン，3DCG，現代，技術，プランクトン，生きた木の建築

目次

1	はじめに	1
1-1	津山の課題	1
1-2	津山の課題に対する考察	1
1-3	津山の課題を解決するための水族館	1
2	津山水族館のデザイン	2
2-1	津山水族館の立地	2
2-2	津山水族館の外観	2
2-3	津山水族館の展示品と展示法	4
2-4	津山水族館での通貨“ごんご”	5
3	ミジンコを展示する方法	5
3-1	ミジンコの3Dデータ化を実現するアイデア	6
3-2	ミジンコを巨大化してアウトプットする技術アイデア	7
4	フリー動画ソフト Houdini	7
4-1	Houdini を使う理由	7
4-2	Houdini でできること	7
5	コンセプト映像制作	8
6	津山水族館の外観イメージ図の作成	9
7	津山水族館のコマーシャル制作	11
7-1	企画、シナリオ、コンテ制作	11
7-2	撮影	11
7-3	CG 制作	12
7-4	動画合成	17
7-5	動画編集、音入れ	17
7-6	動画のまとめ	17
8	まとめ	18
	参考文献	19

1 津山水族館構想と研究の目的

本研究の目的は、津山地域の本質的な課題を考えること、それを解決するための現代テクノロジーを調査し理解することである。そしてそれをもとに、津山地域が活性化する街づくりデザインを企画することである。そのための指導教員から与えられた具体的なミッションは、「新しい津山地域の街づくりとして、一見、津山地域に関連しないと思われる水族館を構想し、デザインせよ」というものである。より具体的には、今の津山地域の課題は何か、そしてその課題を解決するためには、どのような現代テクノロジーを用いたらよいか、そしてそれをどのように扱って、自分がイメージする水族館のデザイン、またはそれに類する街づくりデザインに活かせるかを研究し、それらを総括的に扱った詳細な企画案を作成することである。

1-1 津山の課題

津山市HPの津山市第2次環境基本計画¹⁾によると、津山市では人口減少及び少子高齢化が進んでいること、地域産業の衰退が起きていること、そのため、自然や景観、文化を守っていくことも困難となっており、多方面において地域活性化が課題となっているとされている。また、2020年10月2日の山陽新聞の記事²⁾によれば、津山市は2日、住民基本台帳に基づく1日現在の人口が9万9994人（男4万8069人、女5万1925人）となり、2005年の新市発足後、初めて10万人を下回ったという報道がなされた。若者の関西圏、県南都市部への流出に歯止めが掛からず、年平均約730人が減少している。

さらに、津山市第2次環境基本計画¹⁾には、環境学習や環境保全活動について、今後参加してもよい・参加したいと思う環境学習や環境保全活動がある市民の比率は、20%~40%となっていて、機会さえあれば環境保全活動に参加する市民は少なくないともみられ、行動する市民を増やしていくことが課題となっている。この点から環境基本計画の推進組織であるNPO法人「エコネットワーク津山³⁾」は「人づくり、環境教育・環境学習の推進」が最も重要な課題として位置付けている。

1-2 津山の課題に対する考察

前述したように、津山市の課題は、若者の流出などにより人口が減少していることが大きな問題であり、それにより、津山の産業、自然、文化を守っていくことが困難になっている点である。私は、津山の人口が減少している原因は以下の3点にあるのではないかと考えた。

(1) インターネット、SNSなどのテクノロジーの発達で世界の情報へと容易にアクセスできるようになったため、自分の身近なことへの関心が薄くなった。

(2) 津山に若者が楽しめる施設、場所が少ない、または知らない、思いつかない。

(3) 津山に愛着がない。

この3つの原因を解決する必要があると考える。

1-3 津山の課題を解決するための水族館

津山の課題を解決するための水族館の構想として、“津山を楽しくするアイデアを募集する場所”と

位置付けることにした。

その理由は、津山には楽しめる場所がない、自然があるが、移動は車などを持っていないと不便であり娯楽施設もあまりない、したがって、この街で楽しむには遊び、暮らしを楽しむアイデアと、それを共有して人とつながる場所が必要だと考えたからである。

アイデア募集はネットで行えば良いと思うかもしれない。しかし、ネットに情報が溢れている現代において、津山のサイトをわざわざ見ようとする人はなかなかいない。ネットは見たい情報しか与えてくれない。そこで、津山で遊びや暮らし楽しむために、街ぐるみのイベントや水族館の利用についてのアイデアを市民が出し合い、それらについてまずは語り合える場所としての水族館を考えた。すなわち、本研究から創出される水族館の存在意義は、単に美しい生物を見せるだけでなく、多くの市民が豊かな活動に繋げるためのアイデアを出し合える場所であること、そして豊かな津山の将来を空想し語り合える空間となるものをイメージした。このことにより、ネットでは得られない人と人とが触れ合える津山の交流拠点になると考えた。

2 津山水族館のデザイン

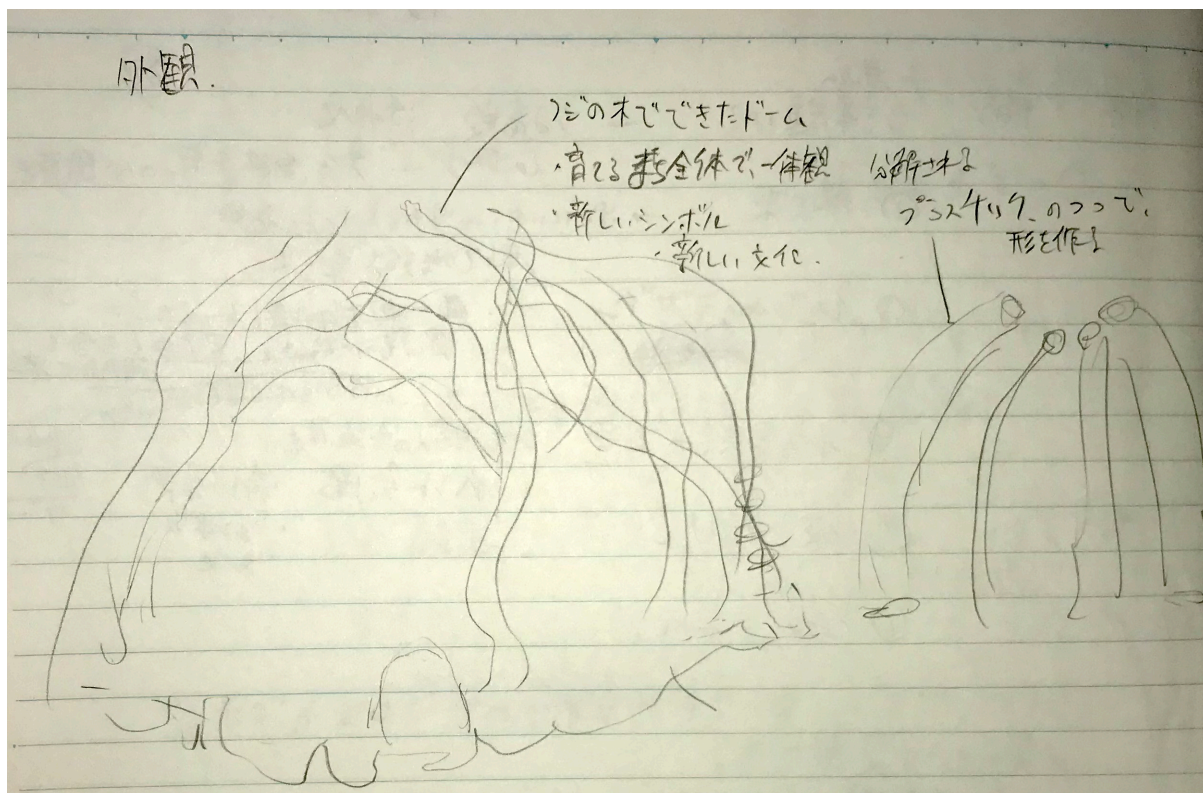
2-1 津山水族館の立地

津山水族館は鶴山公園に設定する。鶴山公園は津山城があった場所であるが、現在、復元された備中櫓と呼ばれる建物しかない。しかも鶴山公園は、津山において歴史的に重要な場所であるにも関わらず、春の桜まつりでにぎわう公園というだけの印象しかない。鶴山公園に建てられる津山水族館を、津山地域の文化、特に津山地域の自然をイメージできる新たな津山のシンボルにし、年間を通して大勢の市民や旅行者などが集える場にしたいと考えた。

2-2 津山水族館の外観

津山地域の自然をイメージできるシンボルとしての津山水族館であるために、水族館の外壁はコンクリート壁などではなく、生きた木の幹の壁を想定している。素材は伸縮性のある筒上の素材（自然に帰る）で骨組みをつくり、植えた木を中に通すことにより生きたまま建物する。建築には何十年もかかり、未来の世代のために建築することになる。そして、その次の世代はそれを受け継いで手入れしなければならない。インドの北東部メガラヤ州には木の根でできた橋がある。これはゴムの木の根でできしており、水分がある方向へ進む性質を利用して竹に根を通して対岸に成長させ、橋にしている。ゴムの木は津山で育てるには気候的な問題がある。そこで、津山でも育ち、強い生命力で寿命も長く、木に巻きつきながら育つため形の形成が容易であるフジを利用する。すなわちフジドームを作る。このドームは育てること自体が街の文化となり、新しい街のシンボルとして街への一体感をうむことができる。

津山での中心的な環境教育を果たす場所として、生きた植物を使った本水族館構想を提案したい。図1は津山水族館の外観アイデアスケッチである。



(図1) 津山水族館外観アイデアスケッチ

アイデアスケッチをもとに作成した津山水族館の外観イメージ図を図2に示す。

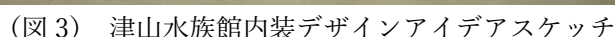


(図2) 津山水族館外観イメージ図

公益社団法人日本動物園水族館協会（JAZA）⁴⁾によれば、水族館の目的は、研究調査、教育、種の保存、レクリエーションの4つがあると言われている。特に、教育においては、普段は出会えない生き物たちを間近に見られる場所という点で重要であるとされている。しかし、近年、動物保護の観点などから、例えばイルカやクジラなどのように、展示するその生き物は本当に必要なのかという議論は尽きない。

特に、身近にいて、普段は気づくことのないものの代表として、淡水性プランクトン、ミジンコに注目した。それは、津山市民に普段は気づいていない、しかしとても魅力的な水生生物が存在していることをアピールするという目的がある。この視点から津山市の環境教育にもアプローチする。

さらに、津山水族館は、プランクトンの美しさを見て感動してもらうだけには留まらない。ドームの中には、はしごなどを使わないとたどり着けない場所を設置し、体を動かす施設としても市民に利用してもらう。くつろいで座れるソファや、会議に使える場所も作り、美しい生物を見ながら多目的に用できる施設に設計する。図3に津山水族館の内装デザインのアイデアスケッチを示す。



ミジンコを巨大化してどのようなになるのか具体的にイメージするためにミジンコの模型を制作し、3Dプリンターで印刷した。(図4)



(図4) ミジンコの模型

2-4 津山水族館での通貨“ごんご”

津山水族館の目的は、津山を楽しくするアイデアを募集することである。津山水族館に来館した人にはアイデアを募集し、良いアイデアに賛同して寄付や、活動してもらう人を集める。しかし、ただ掲示板を置くだけでは、それに注目する人を集めるのは難しいと思われる。そこで、津山水族館で利用できる通貨“ごんご”を開発し提供する。“ごんご”は津山地域の方言で河童を意味する。

“ごんご”は、津山水族館内で主に寄付するために使用する。津山を楽しくするアイデアに賛同した人、そのアイデアを実行するのに“ごんご”使って寄付するのである。“ごんご”を手に入れる方法は運である。

“ごんご”は市民の1/4に毎日抽選で配布される。これはお金を持つことを努力や才能ではなく運であることにし、それを気軽に津山のために使用できるようにするためである。“ごんご”は貯蓄することができない。つまり期限を超えると使えなくなる。津山水族館の維持やあらたな開発は、寄付された“ごんご”を現金化して使うことも可能とする。このようなシステムのねらいは、市民が愛着を持って津山水族館を訪れる機会を増やし、それを機に、津山市のための活動を行える人が増え、市民の活動が活発になることにある。

3 ミジンコを展示する方法

ミジンコは体が透明であるため、内臓が露わになっておりとても美しい。しかし肉眼では点のよう

にしか見えないほど小さい。よってそのまま展示したのではその面白さは伝わりにくい。そこで、テクノロジーを駆使して巨大化して展示する方法を考える。生きたミジンコをどうにかしてコンピュータに取り込み、その動いている様子を巨大化して目の前に出力するという方法を考える。そのための技術のアイデアを以下に記す。

3-1 ミジンコの3D データ化を実現するアイデア

(1) PIFu(Pixel-Aligned Implicit Function for High-Resolution Clothed Human Digitization)⁴⁾ を利用する。すなわち、服を着た人の画像を入力してその3次元テクスチャを推定するモデル Pixel-Aligned Implicit Function を使い、機械学習によりモデルの予測を行う。図5はこの技術を使い、写真1枚から体の後ろを予測してできた自分の3Dモデルである。この技術を発展させれば、ミジンコの動画をとりながらリアルタイムで3Dモデル化できるようになると考える。



(図5) PIFu を使用し自分の写真でモデルをつくった図

(2) TextureFusion⁵⁾ を利用する。米マイクロソフトは TextureFusion という RGB-D カメラを使って対象となる物体の 3D モデルをリアルタイムに作成するソフトを開発した。この手法はテクスチャ空間と符号付き距離関数を組み合わせた新しいボクセルグリッドを使用し、高解像度のテクスチャマッピングを可能にする。この結果、リアルタイムでありながら高解像度のモデリングを実現した。この技術も利用できそうである。

(3) 超音波スキャン⁶⁾ を利用する。ミジンコは透明であるため、カメラだけでは正確なモデル化ができないと考えられる。指向性の高い超音波を当て反射した音波の情報をもとに形を認識する技術エコーロケーションと併用することでうまく形をインプットできると考えられる。

(4) RVS real time virtual sonography⁶⁾ を利用する。これは、CT、MRI 超音波診断装置のボリュームデータから作成した MPR 画像をリアルタイムで超音波画像と同期させる機能をもつものである。超音波診断装置のプロープに装着した位置センサーにより空間的位置情報を装置に送り、装置ないであらかじめ取得しておいた同一患者の CT、MRI、超音波ボリュームデータと超音波プロープのポジショ

ニングを行うことで超音波像と同一の MPR（任意多段面再構成）画像をリアルタイムに同期表示させる。これをミジンコに使うことによりリアルタイムのミジンコの情報を 3D データとして取り込むことができると考えられる。

3-2 ミジンコを巨大化してアウトプットするアイデア

(1) VR で表現する。

VR 技術⁷⁾を使えば、目の前の仮想空間上にミジンコを表現することができる。VR とは virtual reality の略で仮想現実と訳される。ヘッドセットから左右の目に違う映像を送ることによりその世界に入り込んだかのような映像を見せることができる。これを使用する場合、水族館に入るときに参加者に VR のヘッドセットを装着してもらうことになる。

(2) ホログラム技術を用いる。

慶応技術大学と Burton の共同研究⁸⁾により「空間立体描画」技術が開発されている。レーザー光線を 1 点に集約させると崩壊する現象をレーザーブレイクダウンといい、この時にその点にある空気分子のイオン化が起こる。イオン化した直後にレーザーの照射をやめると空気分子は再結合し、光を発生させる。これを利用して空間中に光を描写することができる。現在、10～15fps で毎秒50000 ポイントを構築することができるらしい。将来的にフレームレートを増やし、発光の光もフルカラーにすることができたら、空間上にミジンコを描写することができるデバイスとして利用可能である。

4. フリー動画ソフト Houdini

本研究のイメージ図を作成するにあたってフリー動画ソフト Houdini⁹⁾を使用する。Houdini を学ぶためのテキストとして作久間修一、理論と実践で学ぶ Houdini -SOP&VEX 編, 2017.6.29¹⁰⁾を使用する。

4-1, Houdini を使う理由

画像ソフト Houdini は、頭の中にあるイメージを表現するのに数学を使うことがとても有効である。頭の中のイメージは理想的であり、抽象的である。それを見えるようにするにはそのイメージを自分の知っているもので近似するしかない。言葉にする、絵に描くなど方法はあるが、頭の中の想像を絵に描き表すのは容易ではなく、相当な練習をしなければならない。言葉で表すのは比較的容易であるが、その言葉から相手は想像しなければならないため、時間もかかり、正確に伝えるにはテクニックも必要である。そこで、数学を使い、イメージを近似することで視覚的に表すことができる。Houdini を使用すればそれを容易に行うことができる。

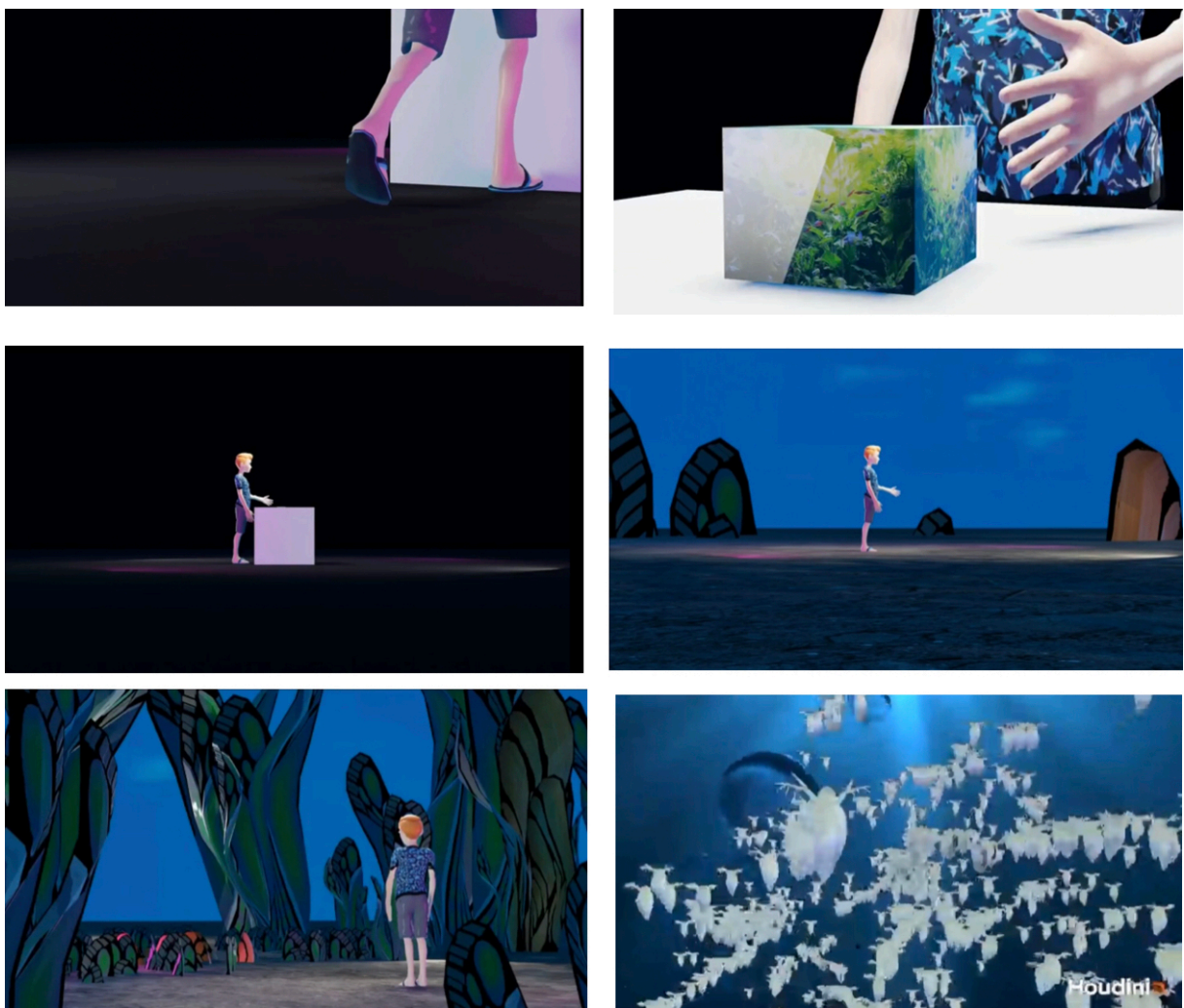
4-2 Houdini でできること

Houdini ではノードという特定の処理を受け取る塊を作り、そのノードの各パラメータ繋いでいくことで、目的の結果を構成するためのルールとステップを定義していくというやり方で図形を作成していくことができる。そのメリットはパラメータを変化させれば即座に異なる結果を得ることができる

ということ、アルゴリズムや数学によって明確に定義される手作業では作れない複雑な形状を容易に作ることができること、物理法則、自然の法則に基づいた運動を作ることが容易であることである。

5. コンセプト映像制作

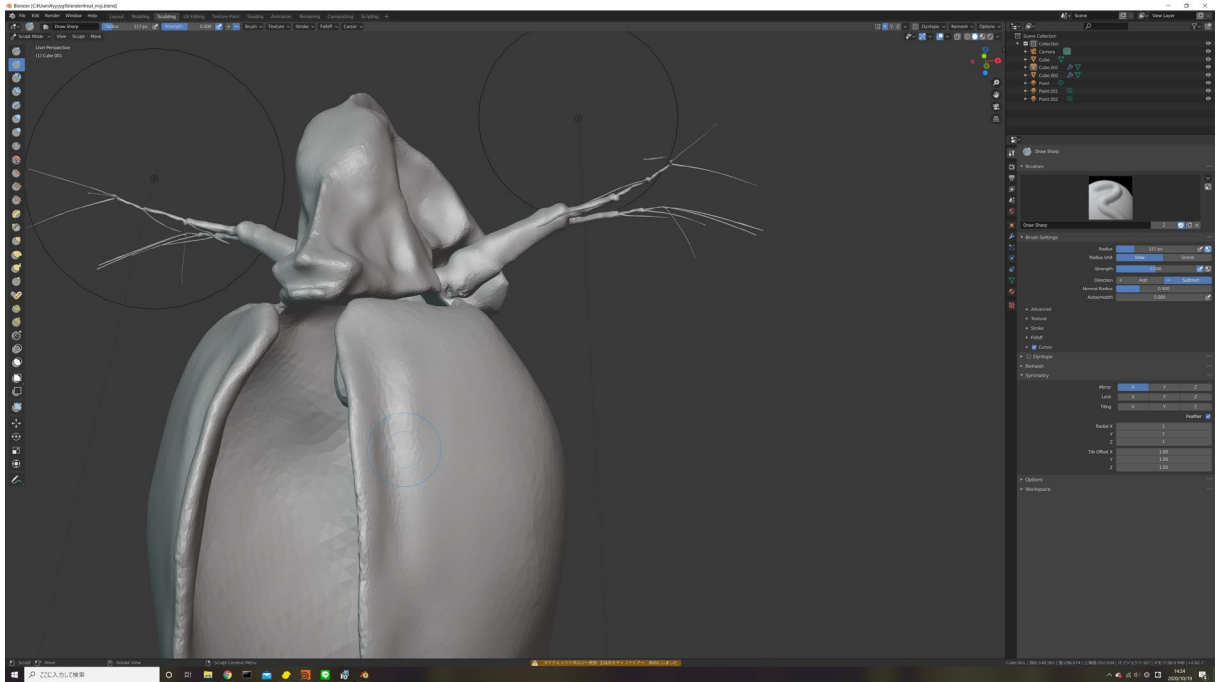
津山水族館のコンセプト映像を制作した。コンセプト映像は少年が暗闇を歩いて白い機械に近づくところから始まる。少年は機械にミジンコが入った水槽を乗せる。すると水槽が機械に取り込まれる。その循環周りの景色が一気に変わり自分がその水槽の中に入ったかのような幻想的な世界になる。そこに目の前からミジンコの大群が一気にやってくる。この映像は津山水族館のミジンコの展示方法の説明と理想のイメージの映像となっている。図6にコンセプト映像のスナップショットを示す。



(図6) コンセプト映像のスナップショット

このコンセプト映像のミジンコの動きは Houdini によって作成した。その作成手順を説明する。

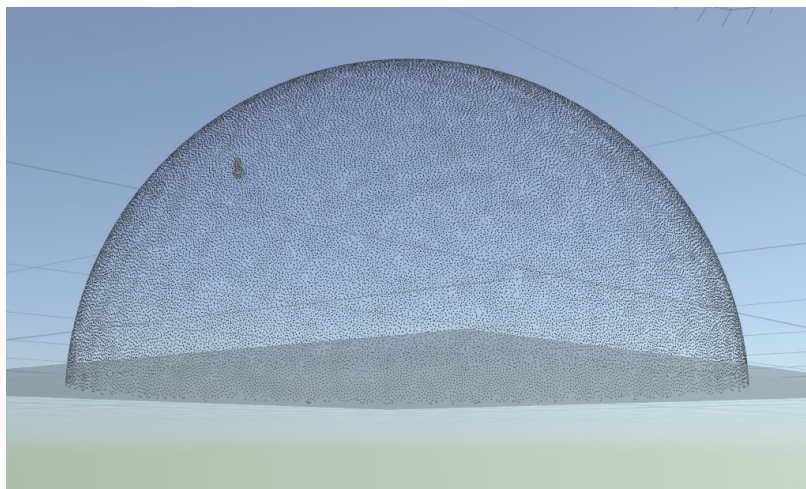
まず、曲線を用意する。次にそれに垂直な方向に連続に変化する 0~1 のランダムな値を出力する関数（ノイズ関数とよばれる）を足す。これにより、ミジンコの泳ぎのイメージにあう自然な動きを再現した。そして、ミジンコのモデルを（Blender というフリーCG ソフトで作成した図 7^{10）}そのカーブに沿って動かす。



（図 7） 作成したミジンコの模型

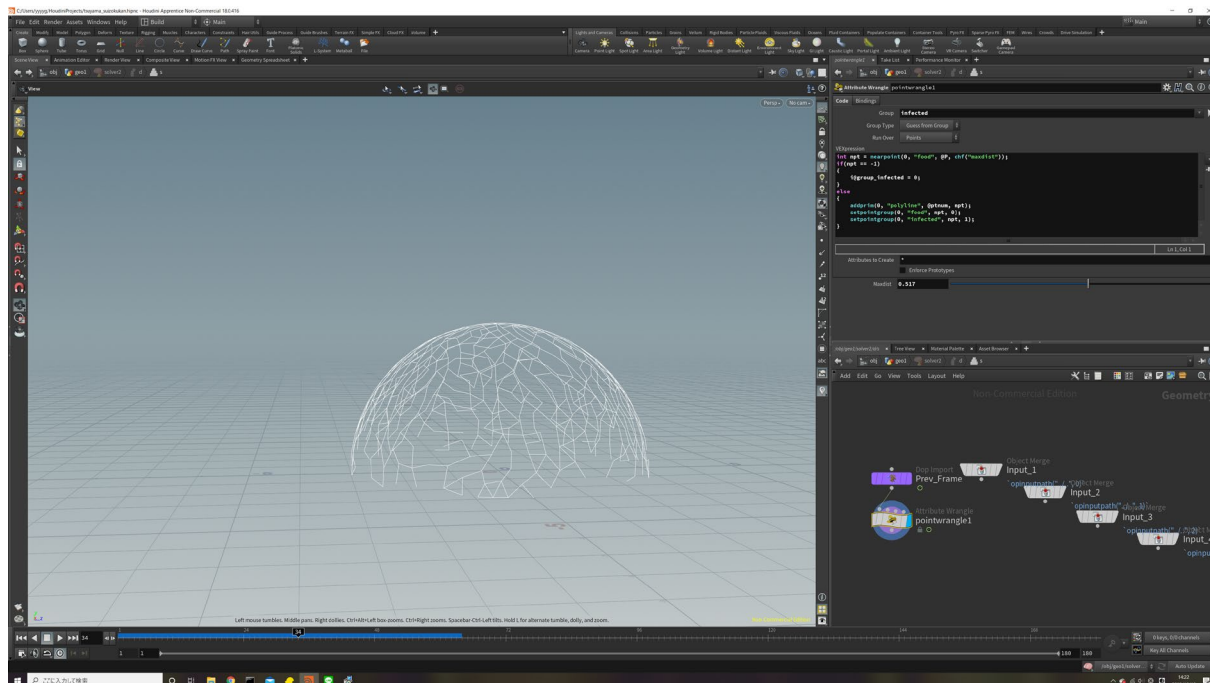
6. 津山水族館の外観イメージ図の作成

津山水族館の外観のイメージを具体的にするためにイメージ図の作成を行った。その方法について説明する。外観イメージ図は Houdini によって行った。まず、半球の表面上にランダムな点を散布する（図 8）



（図 8） 半球上に散布した点

点を餌と感染者の 2 つのグループに分け、感染者が一番近いポイントを検索せてそれを新しい感染者にし、そのポイントと自分を線で繋ぐようにする。これを繰り返すことで任意の空間に枝が伸びるようなイメージの設計ができる。図 9 に制作画面を示す。



(図 9) ドームのイメージ図制作画面

このドームの形状を立体的に見るために 3D プリンターで印刷した。(図 10)



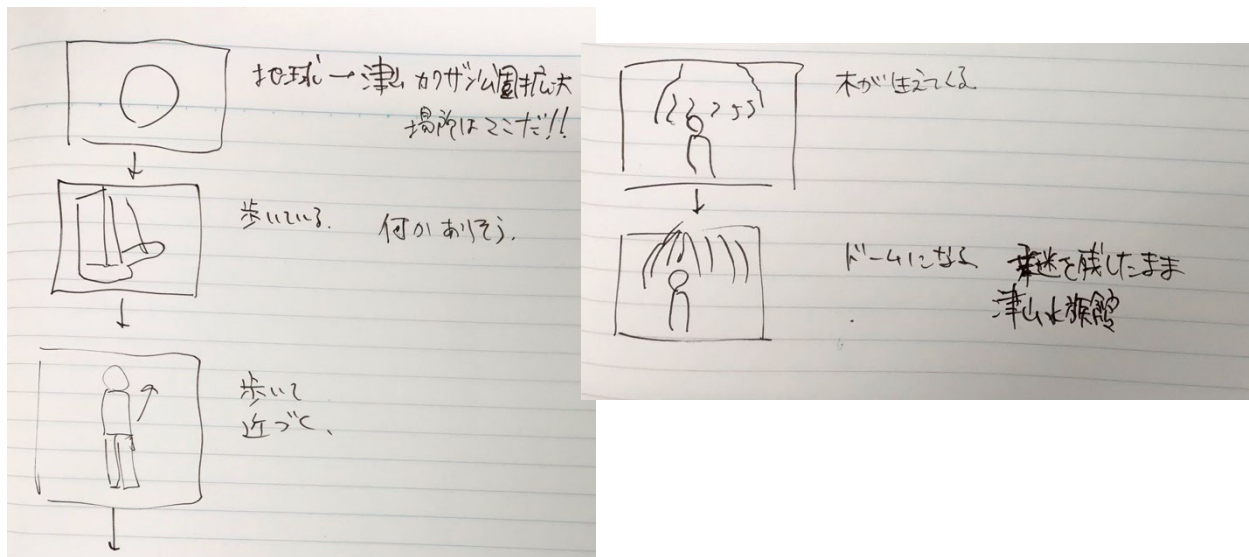
(図 10) 3D プリンターで印刷したドーム

7 津山水族館のコマーシャル制作

津山水族館構想を達成すべく第一歩として、本研究では、津山水族館構想が多くの人に理解されるようなコマーシャルを制作することにした。

7-1 企画、シナリオ、コンテ制作

鶴山公園を舞台にした映像の構想を行った。何か凄いことが起こっているという雰囲気、津山水族館のフジのドームの奇妙さを押し出したいと考え、そのアイデアをもとに絵コンテスケッチを行った。そのスケッチを図 11 に示す。



(図 11) 絵コンテ風アイデアスケッチ

7-2 撮影

必要な動画を撮りに鶴山公園に撮影に行った。図 12、図 13 に撮影したシーンを示す。



(図 12) 足拡大シーン



(図 13) 鶴山公園を歩くシーン

Google studio というサイトを使用し、津山の航空写真を利用して鶴山公園を拡大するシーンを作成した。図 14 に google studio で制作したシーンを示す。



(図 14) 作成した鶴山公園航空写真

7-3 CG 制作

Houdini による CG 制作に取り組んだ。植物でドームを作るイメージの図形を作成した。その手順を説明する。それは(1)葉を作る工程、(2)茎を作る工程、(3)茎が時間で伸びるようにする工程、(4)ドーム状にする工程に分かれる。

(1) 葉を作る工程

グリッドを作成し、uv 座標を設定する。Sort ノードでポイント番号の順番を座標に従って並び替える。グリッドの位置を辺の長さの半分ほどずらし、原点が葉の茎の部分に来るようにする。葉の写真を貼り付ける。図 15 に作成した葉の図形を示す。

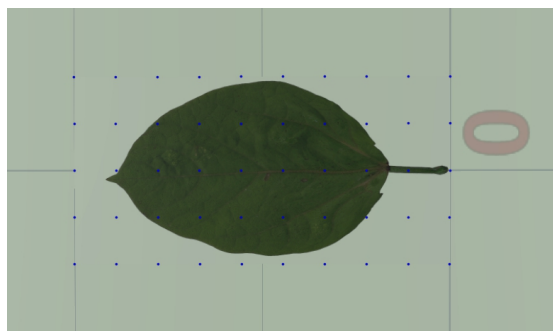


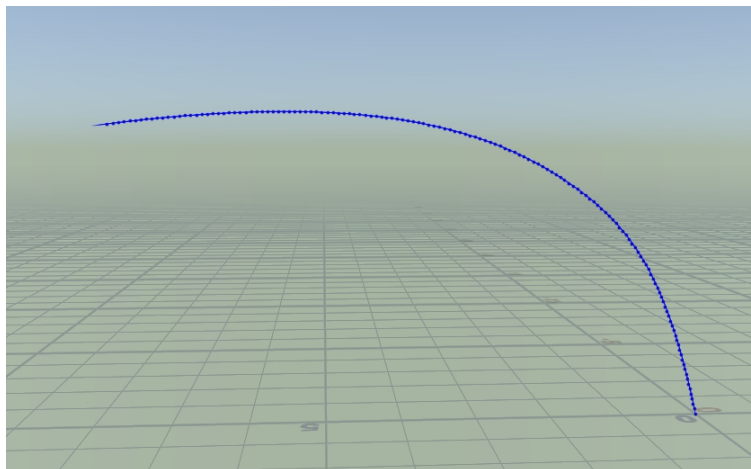
図 15 作成した葉

(2) 茎を作る工程

Curve ノードでカーブを作り、リサンプルノードで点を小さい間隔でそのカーブ上に作り u 座標と接線を設定する。1 つ先のポイントから前のポイントを引くことで接線を計算する。プログラム 1 は接線を作成するプログラムである。最後のポイントはそのポイントから前のポイントをする。そして、作成したポイントの図を図 16 に示す。

(プログラム 1) 接線の計算

```
if(@ptnum != @numpt-1)          //番号が最後以外の場合
{
    vector pos = point(0, "P", @ptnum+1);
    @N = normalize(pos-@P);        //次のポイントから自分のベクトルを引く
}
else                             //最後のポイントの場合
{
    vector pos = point(0, "P", @ptnum-1);
    @N = normalize(@P-pos);        //自分のベクトルから一つ前のポイントのベクトルを引く
}
```



(図 16) 作成したポイント

姿勢情報を点に持たせ、クォータニオンを使用して軸を回転させ葉を y 軸、x 軸周りにランダムに回転させ、自然な葉の生える点にする。以下のプログラム 2 に軸の回転のプログラムを示す。そして、葉を回転したポイントに複製し、完成した茎の図を図 17 に示す。

(プログラム 2) 軸の回転のプログラム

```
@orient = dihedral(set(1, 0, 0), @N);    //軸を x 方向にセット
vector yaxis = qrotate(@orient, set(0, 1, 0));
```

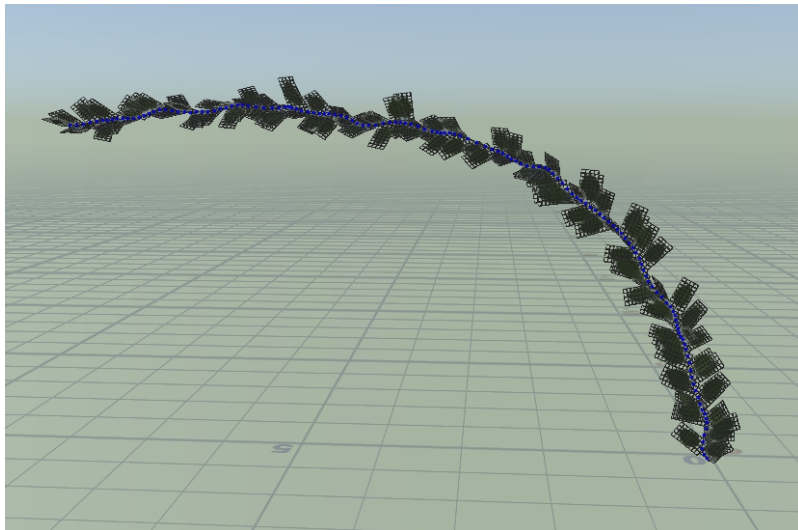
```

float ang1 = 0;
float ang2 = 0;

if(rand(@ptnum)<0.5) {ang1 = 180; ang2 = -20;}      //ランダムで角度を変更
else {ang1 = 0; ang2 = 20;}

vector4 quat = quaternion(radians(ang1), yaxis);    //クオータニオン作成
@orient = qmultiply(quat, @orient);                //クオータニオン乗算
quat = quaternion(radians(ang2+ang2*rand(@ptnum)),yaxis);
@orient = qmultiply(quat, @orient);
quat = quaternion(radians(50*(2*rand(100*@ptnum)-1)),@N);
@orient = qmultiply(quat, @orient);
@N = normalize(qrotate(@orient, set(1, 0, 0)));

```



(図 17) 茎

(3) 茎の成長を作る工程

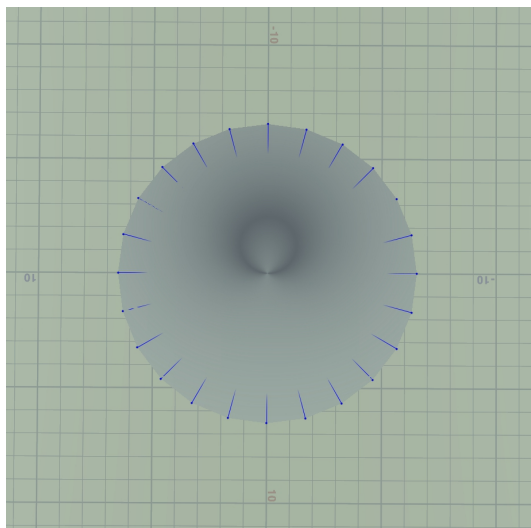
Carve ノードで作成したカーブの **u** 座標をどこからどこまで使用するか指定できる。それを時間軸で変化するように設定し時間で茎が伸びていくようにする。茎の太さはポイントの総数からポイント番号を引いた値にし、茎の根元に行くほど太く先端に行くほど細くなるように設定した。茎の太さを設定したプログラムをプログラム 3 に示す。そして、作成した茎の図を図 18 に示す。

(プログラム 3) 茎の太さの設定

```

f@len = (@numpt - @ptnum)*0.001;      //全ポイント数から自身の番号を引く

```



(図 18) 作成した茎

(4) ドーム状にする工程

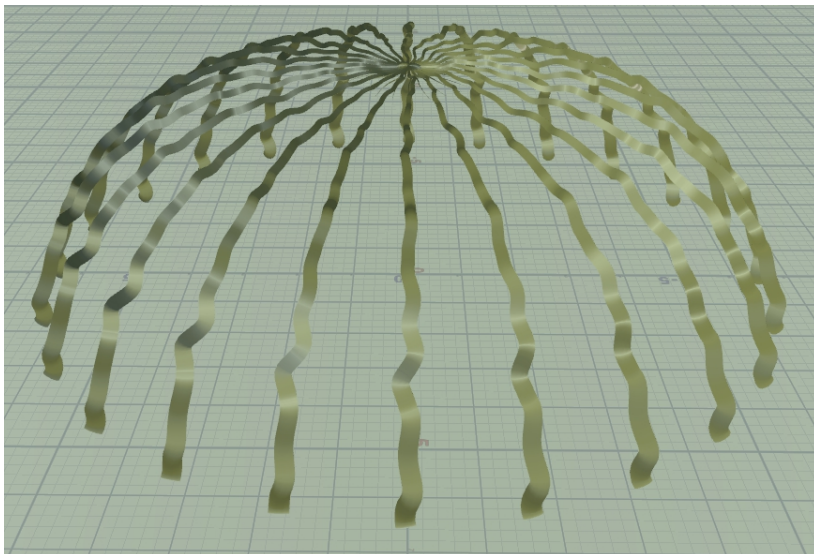
円状に点を配置し内側に向けたベクトルを作成し、そこに完成した葉、茎を複製する。プログラム 4 に中心に向けたベクトルを作成したプログラムを、図 19 に作成したベクトルの図形を示す。

(プログラム 4) ドームを作るためのベクトル

```
vector cen = {0,0,0};
```

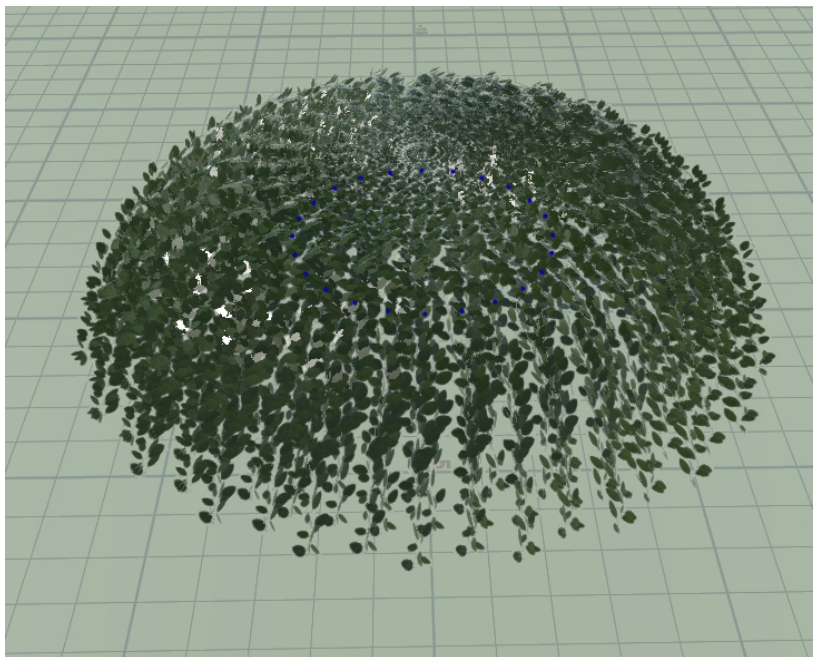
```
@N = cen - @P;
```

```
//原点からポイントのベクトルを引く
```



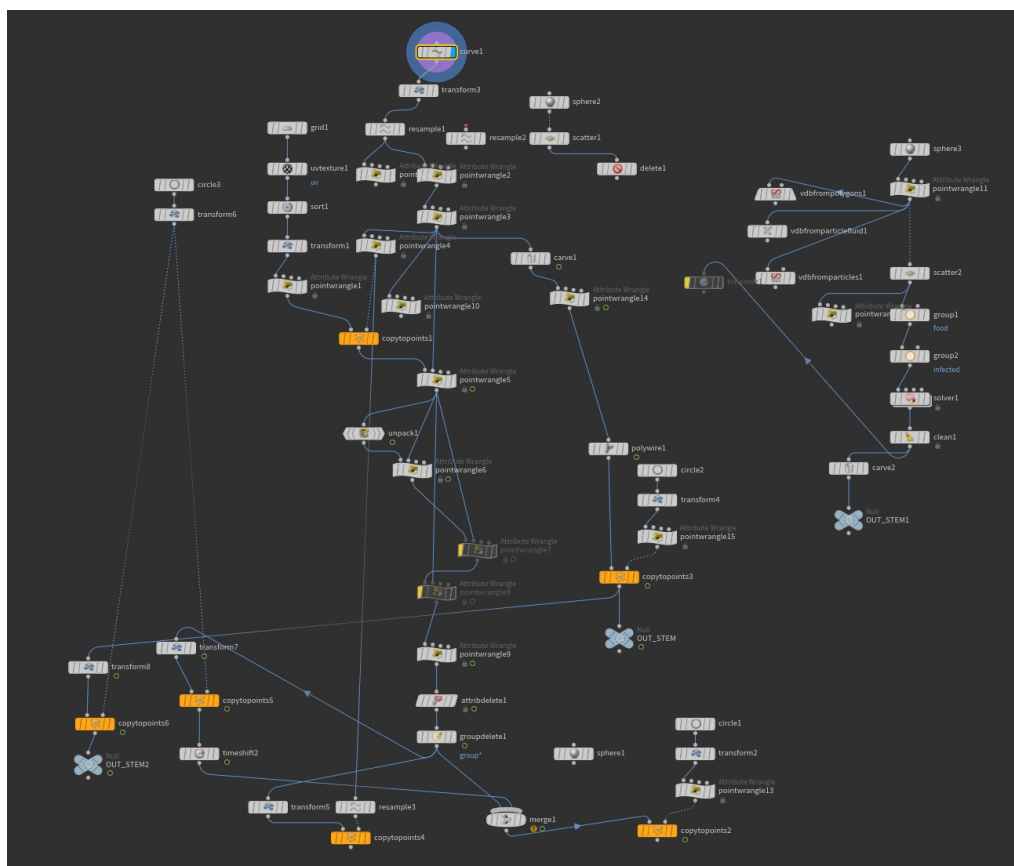
(図 19) 作成した図形

茎をポイントに複製し、完成したドームの図形を図 20 に示す。



(図 20) 完成したドーム

最終的に構築したノードネットワークを図 21 に示す。



(図 21) 最終的に構築したノードネットワーク

7-4 動画合成

完成した CG を撮影した映像に合成する作業を行った。ここでは Nuke X というフリー動画編集ソフトを使用した。図 22 に合成した映像の一部の画像を示す。



図 22 合成した映像

7-5 動画編集、音入れ

作成した動画をまとめる作業を行った。Blender というフリーソフトを利用した。絵コンテに沿って動画を繋ぎ、音入れを行った。音は SonissGDC2019AudioBundle という Sonniss 社のフリー音源を利用した。

7-6 動画のまとめ

全長 30 秒の動画を完成させた。動画は地球から津山鶴山公園へのクローズアップから始まり、その場所で何が起こるのか視聴者を鼓舞する。シーンは切り替わり、鶴山公園の二の丸公園を歩いているシーンに移る。女性が石垣に向かって歩いていると地面からつるが伸び始め、瞬く間に巨大なドームが形成される。女性がそれに飲み込まれそうになったところで謎を残し津山水族館始動の文字とともに映像は終了する。CG の特性を活かし、存在しない植物のドームの空想をリアルに表現することで津山水族館の構想に視聴者が興味を持つような映像とした（図 23）。



(図 23) 完成した動画のスナップショット

8 まとめ

本研究では、津山地域を活性化させるための水族館を構想することをテーマに、津山地域の本質的な課題を考え、それを解決するための現代テクノロジーを調査し、具体的な水族館のイメージを構築した。

津山地域では少子高齢化、人口減少といった問題を抱えており、さらには文化、自然を守っていくことさえも困難な状況になっている。身近な友人に津山についての意見を聞いても、津山には何もない、将来的に津山に住むことは選ばないと言う。大都市や有名な観光地などの方が魅力的に映り、あえて津山に関心をもてないという人が多いと考えられる。

しかし、津山に魅力がないわけではない。津山にもどこかに市民を引き付ける魅力があるはずである。もしその魅力が見つかって、それを十分に引き出すことができれば、多くの津山市民が津山の魅力を認識し、津山に誇りを感じ、津山地域をさらに活性化することに繋がれるのではないかと考えた。

このような経緯から、本研究では津山に生息するミジンコやアルテミアといった美しい微生物に注目した。これらの微生物をかつて津山城があった鶴山公園に水族館を作り展示する構想とした。それ

は津山地域の文化と融合させるという意味をもつ。そして現代テクノロジーをどのように使えば展示する微生物を魅力的に見せられるかについて考察した。また、水族館の建物そのものもフジなどの木が外壁となり、成長する生きた水族館であることをイメージした。そしてこのような構想を多くの人に理解できるようにするために、津山水族館の30秒コマーシャル動画制作にもチャレンジした。

この構想がさらに展開し、少しでも津山地域の役に立つことを望んでいる。

参考文献

- 1) 津山市 HP, 津山市第2次環境基本計画, <https://www.city.tsuyama.lg.jp/city/index2.php?id=5345>
- 1) 津山市、人口10万人を下回る 少子高齢化や若者流出止まらず, 山陽新聞, 2020年10月02日
- 2) 公益財団法人日本動物園水族館協会 (JAZA)
- 3) AI-SCHOLAR, 今井画像から人物の三次元形状を復元! 同時にテクスチャする「PIFu」とは
<https://ai-scholar.tech/articles/treatise/pifu-ai-196>
- 4) IT media NEWS Kinect で高品質にリアルタイム 3D スキャン Microsoft など「Texture Fusion」開発
<https://www.itmedia.co.jp/news/articles/2012/07/news081.html>
- 5) HITACHI RVS
<https://www.hitachi-power-solutions.com/product-site/finesat/basic/index.html>
<http://www.hitachi.co.jp/products/healthcare/products-support/contents/us-tech/rvs/index.html>
- 6) ELECOM VR の基礎知識
https://www.elecom.co.jp/pickup/column/vr_column/00001/
- 7) 産総研 「空間立体描画 (3D ディスプレー)」技術の高性能化実験に成功
https://www.aist.go.jp/aist_j/press_release/pr2007/pr20070710/pr20070710.html
- 8) Houdini Apprentice, Side Effects Software, 2017.11.7
<http://www.sidefx.com/>
- 9) 作久間修一, 理論と実践で学ぶ Houdini -SOP&VEX 編, 2017.6.29
- 10) Blender, Blender Foundation

卒業研究

群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込みの 研究

先進科学系

圓山夏生

指導教員 松田修

令和3年3月4日

Embedding of invariant graphs by a group action on closed surfaces

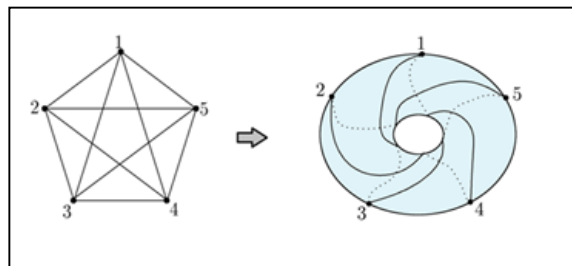
MARUYAMA Natsuki

1. Purpose

I am interested in embeddings of graphs on closed surfaces. A graph is composed by vertices (also called nodes or points) and edges. A closed surface means a sphere, a one person swimming tube, a two person swimming tube, or generally a g person swimming tube. The number of holes of a g person swimming tube is called the genus. Closed surfaces can be classified by g . It is known the problem that find the minimum genus g when drawing a graph on a closed surface so that no two edges intersect.

There is a special graph called a complete graph K_n which every pair of distinct vertices is connected by a unique edge. K_n has $n(n-1)/2$ edges. K_n is embedded on a closed surface with $g = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil$, where the symbol $\lceil x \rceil$ means round up x . This embedding give minimum embedding of K_n .

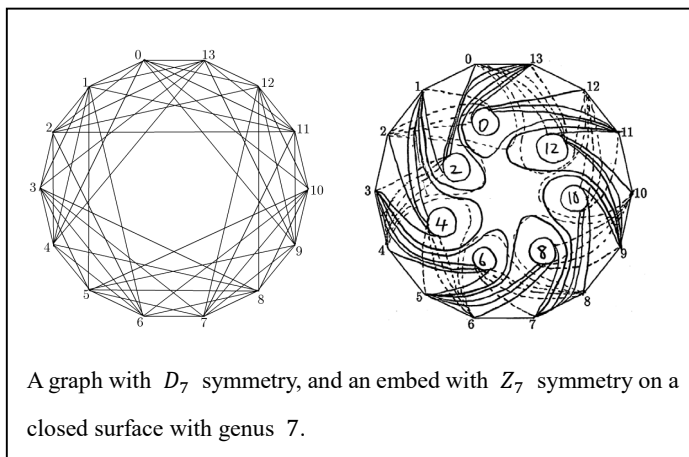
However, the embedding formula is unknown for graphs that are not complete graphs. The symmetric embedding of K_5 in a closed surface with $g = 1$ was interesting to me. It has $1/5$ rotational symmetry and 5 reflections. I wondered if there is a surface that has symmetrical embedded of a graph with symmetry. So, I decided to find out what kind of symmetric graph is embedded in what kind of surface.



2. Result

I proved the following

Theorem. Let p be a prime number larger than equal to 7. Let D_p be a dihedral group with degree p and Z_p a cyclic group with degree p . Then a graph with D_p symmetry has an embedding with Z_p symmetry on a closed surface with genus p .



目次

1. 研究の動機と目的	1
2. 完全グラフ K_7 と K_9 の閉曲面への埋め込み	2
3. 二面体群の作用とグラフのタイプ	3
4. 完全グラフの閉曲面への Z_n 不変な埋め込み	4
5. ハブと条件文	5
6. D_p 不変な G_{2p} の $g = p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み	7
7. D_p 不変な G_{3p} の $g = p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み	9
8. D_p 不変な $G_{p_1p_2}$ の $g = p_2$ の閉曲面への Z_{p_2} 不変な埋め込み	11
9. 本研究で得られた成果	13
10. 今後の研究の予定	13
参考文献	13

1. 研究の動機と目的

本研究は、グラフ理論の「グラフの閉曲面への埋め込み問題」という問題に取り組む。それは、現実問題として電子回路への応用も知られている。グラフとは、「ノード(頂点)とエッジ(辺)の集合で構成されたもの」である。閉曲面とは、球や一人乗りの浮き輪や二人乗りの浮き輪、一般に n 人乗りの浮き輪というものを指し、その浮き輪にある穴の数を、種数(genus)と呼び、 g という文字で表す。そして、閉曲面は g で分類できるという定理が知られている。

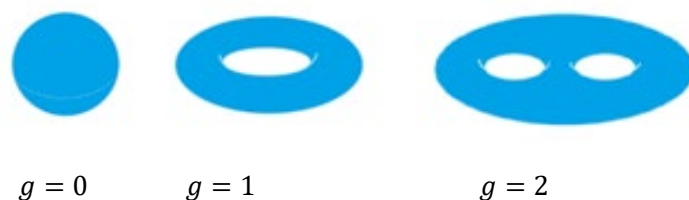
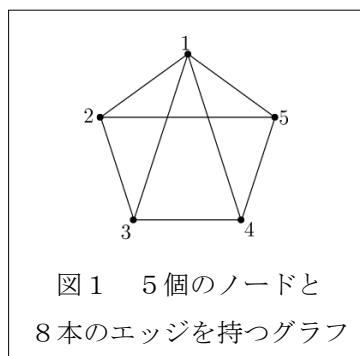


図2 閉曲面の種数 g

さて、今回の研究テーマである「グラフの閉曲面への埋め込み問題」とは、

『グラフをある閉曲面上に、どの2つのエッジも交わらないように描くとき、その閉曲面の最小種数 g を求めよ』

というものである。

グラフの中には、完全グラフと呼ばれる特別なものがある。それは、「任意の2個のノードを繋ぐエッジが必ず存在するグラフ」を指す。そして、完全グラフの総エッジ数は、 $n(n-1)/2$ であり、さらに、完全グラフは、

$$g = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

である閉曲面に埋め込まれ、この g が最小であるということが知られている ([2]参照)。これを完全グラフの最小種数公式と呼ぶ。ここで、記号 $\lceil x \rceil$ は、 x の切り上げを表す。

以下、 n 個のノードを持つ完全グラフを K_n で表す。たとえば、完全グラフ K_5 を考えると、これは完全グラフの最小種数公式より、 $g = \left\lceil \frac{(5-3)(5-4)}{12} \right\rceil = 1$ の閉曲面に埋め込まれる。具体的な埋め込みの様子を描いたものが図3である。ここで青い図が閉曲面を表し、正面に埋め込まれたエッジを実線で、背面に埋め込まれたエッジを点線で表している。

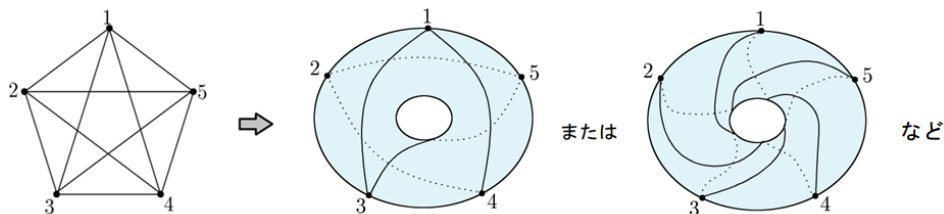


図3 完全グラフ K_5 の埋め込み

しかし、完全グラフでないグラフについては埋め込み公式はわかっていない．私は、図3の右のような K_5 の $g = 1$ の閉曲面への埋め込みで回転対称をもつような埋め込みに興味をもった．対称性という視点に立つと K_5 自身も $1/5$ 回転対称と、5つの鏡映という対称性を持っている．次の節で詳細に述べるが、私は、完全グラフの部分グラフで対称性をもったものについては、規則正しく埋め込むことができる曲面が存在するのではないかと考えた．つまり、どのような対称性を持つグラフがどのような曲面に埋め込まれるかという視点から、グラフに関する研究を行うことにした．

2. 完全グラフ K_7 と K_9 の閉曲面への埋め込み

前節で述べたように、完全グラフ K_5 については、 $g = 1$ の閉曲面へ回転対称をもつような埋め込みが存在した．では、完全グラフ K_7 や K_9 の埋め込みについてはどうだろうか．

まず、 $n = 7$ でエッジ数 $e = 21$ をもつ完全グラフ K_7 の埋め込みについて説明する．これは完全グラフの最小種数公式から $g = 1$ の閉曲面に埋め込まれる．私が注目した埋め込みは、以下の図である．

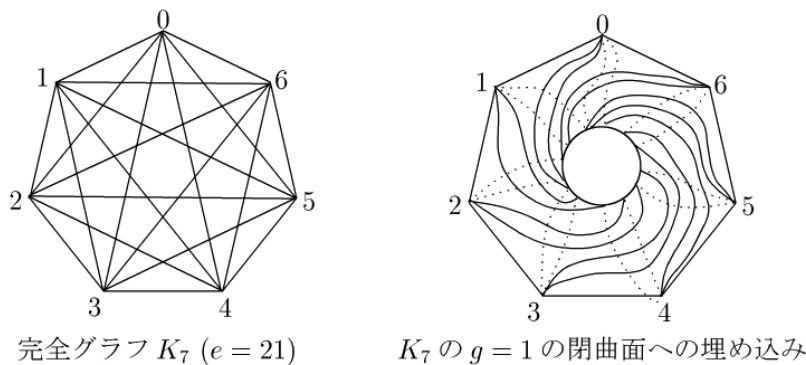


図4

完全グラフ K_7 は、それ自身で対称性を持っている．それは、 $1/7$ 回転対称と、7つの鏡映である．そして上に描いた $g = 1$ の閉曲面への埋め込みは、穴に巻きつく形で $1/7$ 回転対称性を持っている．

次に、 $n = 9$ でエッジ数 $e = 36$ をもつ完全グラフ K_9 の埋め込みについて説明する．これは完全グラフの最小種数公式から $g = 3$ の閉曲面に埋め込まれる．やはり、私が注目した埋め込みは、以下の図である．

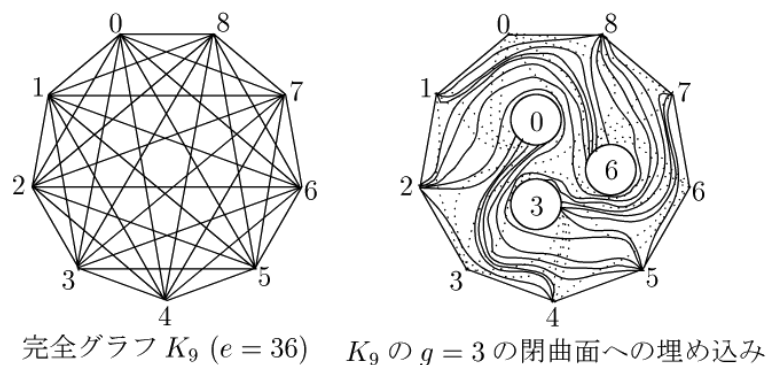


図5

完全グラフ K_9 の対称性は、 $1/9$ 回転対称と、9つの鏡映である．そして上に描いた $g = 3$ の閉曲面への埋め込みも、穴に巻きつく形で $1/3$ 回転対称性を持っている．穴にある数字は $1/3$ 回転対称に対応す

るノードである.

以上のことから, 私は, 完全グラフでないものは, 最低種数 g を求める公式がないのだが, しかし, ある特定の条件の下では, 公式が作れるのではないかと考えた. すなわち, 穴に巻きつくようにエッジを埋め込むという完全グラフの埋め込みをヒントにして対称的なグラフを考えれば, 何らかの結果が得られるのではないかと考えた.

3. 二面体群の作用とグラフのタイプ

完全グラフ K_n は, $1/n$ 回転対称と, n 個の鏡映軸をもつ. このことは現代の数学では, 二面体群や巡回群という概念を用いて表現される. まず, それらを以下に整理しておく.

二面体群 D_n : 例えば, 正三角形は, $1/3$ 回転対称性, 頂点と重心を通る直線に関する対称性 (鏡映) をもつ. 作用とは, $1/3$ 回転や鏡映のことを指し, 作用全体を正三角形の二面体群 D_3 という. 一般に, 正 n 角形に作用する $1/n$ 回転や鏡映の作用全体を, 正 n 角形の二面体群 D_n という.

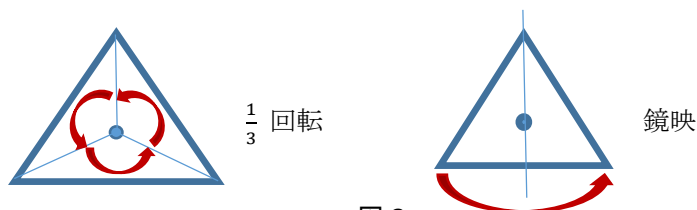


図 6

巡回群 Z_n : 二面体群 D_n の中の鏡映を除いた $1/n$ 回転だけの作用全体のことを指す.

さて, グラフが与えられたとき, そのグラフが, D_n 不変であるとは, $1/n$ 回転や n 個の鏡映の作用で変化しないグラフを指す. 同様に, Z_n 不変であるとは, そのグラフが $1/n$ 回転の作用で変化しないグラフを指す.

右に示すグラフは, 10個のノードと25本のエッジを持つグラフで, D_{10} 不変なものである. エッジを外周とする対称性を示す図形を取り出すと, Z_{10} 不変である正10角形が1個, Z_5 不変である正5角形が1個 ($0-2-4-6-8-10$), Z_5 不変である星型正5角形が1個 ($1-5-9-3-7$), 残りは, Z_5 で移り合う直線が5個 ($0-5, 1-6, 2-7, 3-8, 4-9$) となっている. 以下, 本研究では, 正10角形を

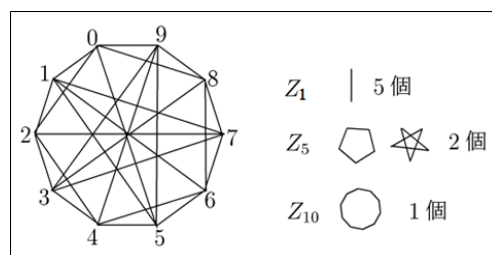


図 7

Z_{10} で, 正5角形や星型正5角形を Z_5 で, そして直線を Z_1 で表わし, このグラフを

$$G_{10}[5Z_1 \oplus 2Z_5 \oplus Z_{10}; 25] \quad (D_5 \text{不変})$$

と表すことにし, グラフ G_{10} のタイプと呼ぶ. また, 以下において, G_{10} を構成する部分グラフをそれぞれ, $Z_1(0,5)$, $Z_1(1,6)$, $Z_1(2,7)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(4,9)$, $Z_5(0,2,4,6,8)$, $Z_5(1,5,9,3,7)$, $Z_{10}(0,1,\dots,9)$ と表す. ()内は部分グラフのノードの番号を表す.

一般に, p を素数, q をある正の整数としたとき,

$$G_{qp}[i_1 Z_1 \oplus i_p Z_p \oplus i_{pq} Z_{pq}; e] \quad (Z_p \text{ 不変})$$

と書いたら, これは, その要素が, 直線 Z_1 が i_1 個 (i_1 は p の倍数), Z_p 不変な正 p 角形が i_p 個, Z_p 不変な正 qp 角形が i_{qp} 個で構成されていることを表し, さらに, qp 個ノードと e 個のエッジをもつグラフであることも示すものである. ここで, $e = i_1 + i_p \cdot p + i_{pq} \cdot (pq)$ である. そして, これをグラフ G_{qp} のタイプと呼ぶ.

4. 完全グラフの閉曲面への Z_n 不変な埋め込み

前節の定義をもとに, 改めて完全グラフ K_7 の埋め込みを考えると, K_7 のタイプは,

$$G_7[3Z_7; 21] \quad (D_7 \text{ 不変})$$

であり. そして「これは $g = 1$ の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込むことができる」といえる.

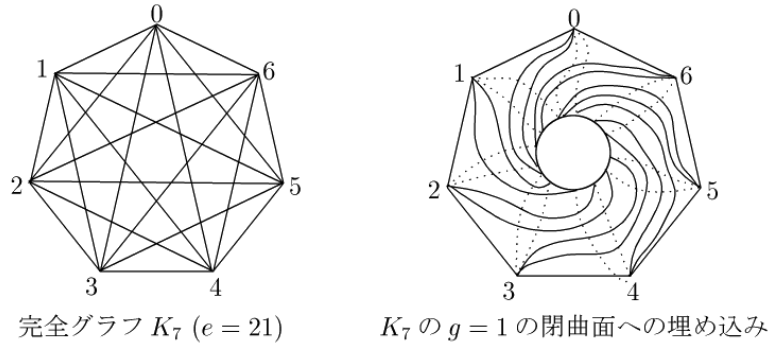


図 8

また, 完全グラフ K_9 のタイプは,

$$G_9[4Z_9; 36] \quad (D_9 \text{ 不変})$$

とでき, 「これは $g = 3$ の閉曲面へ Z_9 不変に埋め込むことができる」といえる.

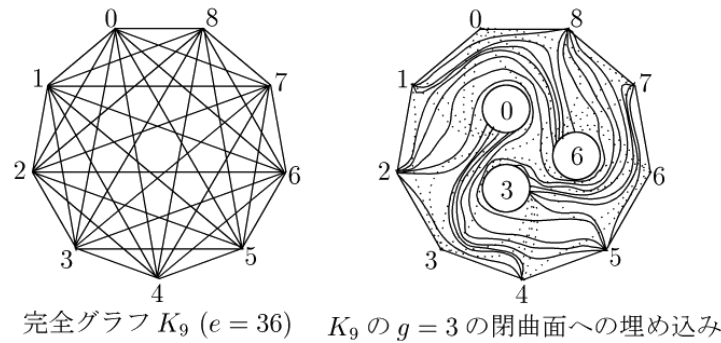


図 9

一般に, 完全グラフ K_n のタイプは, $G_n\left[\frac{n-1}{2}Z_n; \frac{n(n-1)}{2}\right] \quad (D_n \text{ 不変})$ とできる. そして, 次の問題を立てている.

問題. 完全グラフ K_n は、 n がどのような値のとき種数 g の閉曲面 $\rightarrow Z_n$ 不変に埋め込むことができるか。

*今回は、この問題は扱わない。

5. ハブと条件文

グラフの閉曲面への埋め込みを、なるべくスムーズに行なうようにするために、条件付きハブ■というものを考案した。これについて右の局所的な埋め込みを表した図10を使って説明する。

番号付きの点はノードの番号を表わし、番号付きの円は閉曲面の穴の番号を表す。そして、 h_A, h_B は閉曲面の上面に設置されたハブを、 h_a, h_b は閉曲面の下面に設置されたハブを表し、 h_3, h_6 は閉曲面の穴付近に設置されたハブで、実線から点線に移す役割を果たすものである。さらに $\bar{h}_3, \bar{h}_6$ は閉曲面の穴付近に設置されたハブで、点線から実線に移す役割を果たすものである。

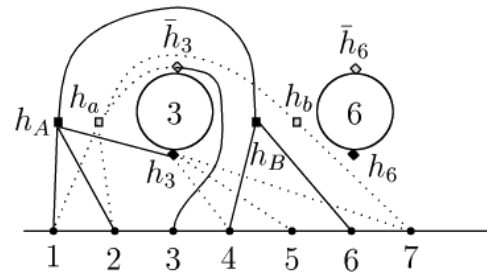


図10 (条件付きハブ)

定義1. 記号 $h_x([i_1, i_2], [j_1, j_2])$ は、ハブ h_x に関する条件文であり、番号は i_k, j_k は[]内のノードの番号である。そして $h_x([i_1, i_2], [j_1, j_2])$ の意味は、 $[i_1, i_2]$ がハブ h_x に入るノード番号の範囲を表し、 $[j_1, j_2]$ がハブ h_x から向かうノード番号の範囲を表す。

定義2. エッジ $(s - t)$ がハブ h_x を経由して埋め込まれるとき、 $(s - t)$ は h_x 経由で埋め込み可能であるという。

閉曲面のハブ h_x の条件文を $h_x([i_1, i_2], [j_1, j_2])$ を仮定すると、以下の命題が成り立つ。証明は図を用いて示す。

命題1. もしエッジ $(s - t)$ のノード s, t が $s \in [i_1, i_2]$, $t \in [j_1, j_2]$ ならばエッジ $(s - t)$ は、 h_x 経由で埋め込み可能である。

(証明) h_x 経由の既に埋め込まれたエッジは、ハブ h_x の中で交差することなく分離できるので、エッジ $(s - t)$ はこの閉曲面に埋め込み可能となる。

Q. E. D.

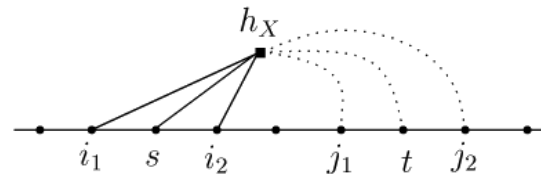


図11

命題 2. もしエッジ($s-t$)のノード s, t が $s \notin [i_1, i_2]$, $t \notin [j_1, j_2]$ ならばエッジ($s-t$)は, h_X 経由で埋め込み可能である.

(証明) 命題 1 と同じ理由により成り立つ. Q. E. D.

命題 3. もしエッジ($s-t$)のノード s, t が $s \notin [i_1, i_2]$, $t \in [j_1, j_2]$ または $s \in [i_1, i_2]$, $t \notin [j_1, j_2]$ ならば, エッジ($s-t$)は, h_X 経由で埋め込み可能と
はならない.

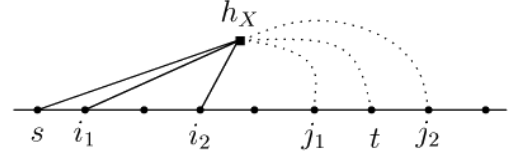


図 1 2

(証明) $s \notin [i_1, i_2]$, $t \in [j_1, j_2]$ の場合, エッジ($s-t$)は h_X のなかで, 既に埋め込まれたエッジの
どれかと必ず交差するので, h_X 経由の埋め込みはできない. $s \in [i_1, i_2]$, $t \notin [j_1, j_2]$ の場合も同様である. Q. E. D.

上の 3 つの命題は, 以下で挙げる定理の証明に用いる. そのために, 例えば, エッジ($s-t$)が, 点 s からハブ h_X と h_Y を実線で経由して, h_Y から t まで点線で埋め込まれることを,

$$(s - h_X - h_Y \cdots t)$$

で表す.

命題 4. 条件文 $h_X([i_1, i_2], [j_1, j_2])$ をもつハブ h_X は, 実線から実線に繋ぐハブ, または点線から点線に繋ぐハブとする. そして $u = i_2 - i_1$, $j_3 = j_2 + u$, $v = j_1 - i_2$, $k_1 = j_3 + v$, $w = j_2 - j_1$, $k_2 = k_1 + w$ と置く. このとき, 条件文 $h_Y([j_2, j_3], [k_1, k_2])$ をもつハブ h_Y を作ることができる.

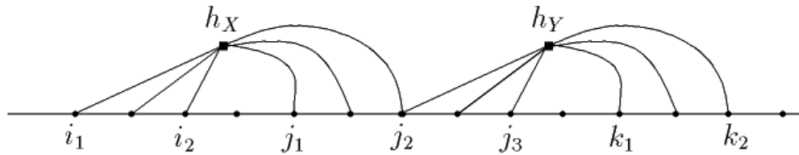


図 1 3

(証明) h_X を埋め込みから外すと, そこにある埋め込まれた曲線は, エッジ(i_1-j_2)の埋め込みとエッジ(i_2-j_3)の埋め込みの間にある (どれも交差していない). エッジ(i_1-j_2)の埋め込みをコピーして, た点 i_1 を点 j_2 にまで移動させてそのコピーエッジを埋め込むことは, 明らかに可能である. したがって, コピーしたエッジの埋め込み上に h_Y を作り, さらに残りのエッジも配置を変えずにコピーして移動させ, h_Y を経由するようにすればよい. Q. E. D

命題 4 による埋め込みを, 平行移動させた埋め込みといい, このとき, h_X と h_Y は対等であるという.

6. D_p 不変な G_{2p} の $g = p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

完全グラフではない場合は、巡回群 Z_p 不変なグラフについて研究を行えばよいと考えた。

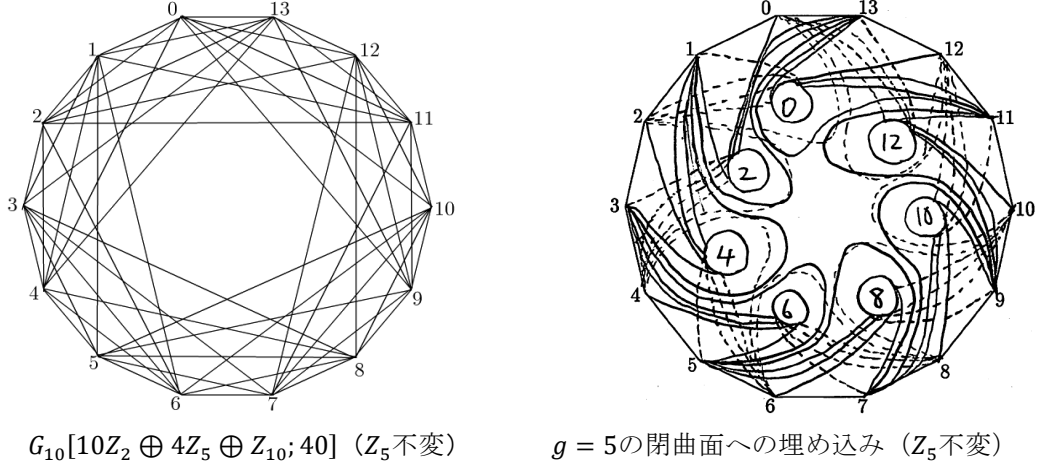


図 1 4

まず、グラフ $G_{2 \times 7}$ のタイプが $G_{14}[14Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 56]$ (D_7 不変) であるものについて、これがどのような閉曲面に埋め込むことができるかを研究し、これが種数7の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込みの可能であることがわかった。 G_{14} を構成する部分グラフは、 $Z_{14}(0,1,2,\dots,13)$, $Z_7(0,2,4,\dots,12)$, $Z_7(0,4,8,\dots,10)$, $Z_7(1,3,5,\dots,13)$, $Z_7(1,5,9,\dots,11)$, と7本のエッジ $Z_1(1,4)$, $Z_1(7,10)$, $Z_1(13,2)$, $Z_1(5,8)$, $Z_1(11,0)$, $Z_1(3,6)$, $Z_1(9,12)$ と7本のエッジ $Z_1(1,6)$, $Z_1(7,12)$, $Z_1(13,4)$, $Z_1(5,10)$, $Z_1(11,2)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(9,0)$ である。

定理 1. p を7以上の素数とする. このとき, D_p 不変なグラフ $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ は, $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込むことができる.

ここで, G_{2p} を構成する部分グラフは $Z_{2p}(0,1,2,\dots,(2p-1))$, $Z_p(0,2,\dots,(2p-2))$, $Z_p(0,4,\dots,(2p-4))$, $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$, $Z_p(1,5,\dots,(2p-3))$, p 本の $Z_1(1,4)$, $Z_1(7,10)$, $\dots$, $Z_1((2p-5),(2p-2))$ と, p 本の $Z_1(1,6)$, $Z_1(7,12)$, $\dots$, $Z_1((2p-5),0)$ である.

(証明) 球面を用意し, $2p$ 個のノードを球面上の1つの大円上に $0,1,2,3,4,5,6,7,8,\dots,2p-1$ と番号の順序に従い並べる. そして偶数番号の点の並べた円上の点の同じ方向側に, その番号と同じ番号の穴を p 個開け, 種数 p の閉曲面を作る. 証明の方針は, 穴2の周りの埋め込みを完成させ, それを平行移動させた埋め込みを作ることで示す.

まず, 穴2の周りの埋め込みを完成させるために, ハブ h_B と h_C を経由するとき, ハブ h_b と h_b を

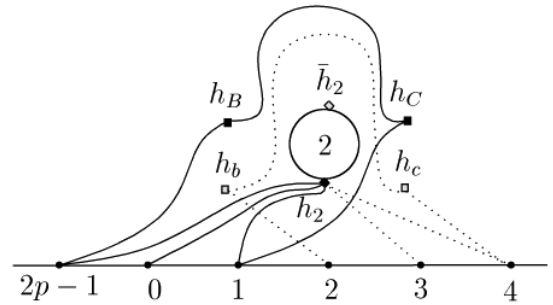


図 1 5 (穴2の周りの原子埋め込み)

経路するとき、必ず、穴2を回り込むように埋め込むことにする。このような穴の周りの埋め込みを原子埋め込みと呼ぶ。

(ステップ1) ノード0とノード2を結んだエッジを、 $(0 \cdots h_a \cdots h_b \cdots 2)$ として埋め込む。これを原子埋め込み1とする。ここで、もし原子埋め込み1を+2平行移動させた埋め込みを p 回繰り返すならば、これは部分グラフ $Z_p(0, 2, \dots, (2p-2))$ が、この閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれることを注意する。

(ステップ2) ノード0とノード4を結んだエッジを、 $(0 - h_2 \cdots 4)$ として埋め込み、原子埋め込み2とする。ここで、もし原子埋め込み2を+2平行移動させた埋め込みを p 回繰り返すならば、これは部分グラフ $Z_p(0, 4, \dots, (2p-4))$ が、この閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれることを注意する。

(ステップ3) ノード $2p-1$ とノード1を結んだエッジを、 $((2p-1) - h_B - h_C - 1)$ として埋め込み、原子埋め込み3とする。ここで、もし原子埋め込み3を+2平行移動させた埋め込みを p 回繰り返すならば、これは部分グラフ $Z_p(1, 3, \dots, (2p-1))$ がこの閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれることを注意する。

ここで、原子埋め込み1, 2, 3だけを取り出し、穴2の周りのハブの条件文をみると、それらは以下となる。

$$h_B([2p-1, 0], [1, 2]), \quad h_b([2], [4]), \quad h_2([0], [4]) \quad (6.1)$$

(ステップ4) $h_B([2p-1, 0], [1, 2])$ と命題1, $h_b([2], [4])$ と命題2より、ノード $2p-1$ とノード3を結んだエッジを、 $((2p-1) - h_2 \cdots 3)$ として埋め込むことができる。これを原子埋め込み4とし、もしこれを+6平行移動させた埋め込みを p 回繰り返すならば、これは部分グラフ $Z_p(1, 5, \dots, (2p-3))$ が、この閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれることを注意する。

さて、原子埋め込み1から4だけを取り出し、穴2の周りのハブの条件文をみると、条件文(6.1)は以下に変わる。

$$h_B([2p-1, 0], [1, 2]), \quad h_b([2], [4]), \quad h_2([2p-1, 0], [3, 4]) \quad (6.2)$$

(ステップ5) $h_2([2p-1, 0], [3, 4])$ と命題1より、ノード1とノード4を結んだエッジを、 $(1 - h_2 \cdots 4)$ として埋め込むことができる。これを原子埋め込み5とし、もしこれを+6平行移動させた埋め込みを p 回繰り返すならば、これは p 本の部分グラフ $Z_1(1, 4), Z_1(7, 10), \dots, Z_1((2p-5), (2p-2))$ が、この閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれることを注意する。

さて、原子埋め込み1から5だけを取り出し、穴2の周りのハブの条件文をみると、条件文(6.2)は以下に変わる。

$$h_B([2p-1, 0], [1, 2]), \quad h_b([2], [4]), \quad h_2([2p-1, 1], [3, 4]) \quad (6.3)$$

(ステップ6) $h_2([2p-1, 0], [3, 4])$ と命題1より、ノード $2p-1$ とノード4を、 $((2p-1) - h_2 \cdots 4)$ とし

て埋め込むことができる．これを原子埋め込み5とし、もしこれを+6平行移動させた埋め込みを p 回繰り返すならば、これはグラフの p 本の部分グラフ $Z_1(1,6)$, $Z_1(7,12)$, $\dots$, $Z_1((2p-5),0)$ が、この閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれることを注意する．

以上より、穴2の周りの埋め込みが完成した．そして命題4とステップ1からステップ6に述べた注意を考え、穴2の周りの埋め込みから平行移動させた埋め込み作り、それを p 回繰り返すことで、 $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ は、 $g = p$ の閉曲面 $\rightarrow Z_p$ 不変に埋め込まれる．

最後に、 $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ が D_p 不変であることを示す．ノード0と $2p-1$ の間の中点とノード $p-1$ と p の間の中点とを結んだ直線を L とする．直線を L について $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ が対称であれば、グラフが Z_p 対称であることから D_p 不変となる．

直線 L について対称な点があることを示すには $a + b = 2p - 1$ となる番号 a, b のノードが存在すればよい．明らかに、部分グラフ $Z_{2p}(0,1,2,\dots,(2p-1))$ は直線 L について対称である．そして $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ と $Z_p(0,2,\dots,(2p-2))$ が直線 L について対称である．実際、 $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ の $2k-1$ と $2k+1$ を結ぶエッジと $2(p-k)$ と $2(p-k-1)$ を結ぶエッジは、 $2k-1+2(p-k) = 2k+1+2(p-k-1) = 2p-1$ より対称である．同様に、 $Z_p(0,4,\dots,(2p-4))$ と $Z_p(1,5,\dots,(2p-3))$ も直線 L について対称である． p 本のエッジ $Z_1(1,4)$, $Z_1(7,10)$, $\dots$, $Z_1((2p-5),(2p-2))$ についてもこの直線 L について対称である．実際、 $Z_1(k,(k+3))$ と $Z_1((2p-k-1),(2p-k-4))$ を考えると、 $k+(2p-k-1) = (k+3)+(2p-k-4) = 2p-1$ より対称である．同様に、 p 本エッジ $Z_1(1,6)$, $Z_1(7,12)$, $\dots$, $Z_1((2p-5),0)$ も $Z_1(k,(k+5))$ と $Z_1((2p-k-1),(2p-k-6))$ を考えると $k+(2p-k-1) = (k+5)+(2p-k-6) = 2p-1$ より対称である．したがって、 $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ は D_p 不変である．Q. E. D

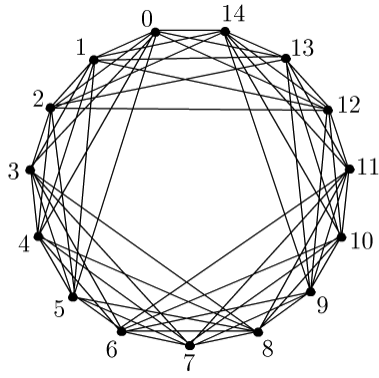
定理1に関連して、以下の予想を立てている．

予想1. G_{2p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の D_p 不変な部分グラフとする ($p \geq 7$)．このとき、 G_{2p} の総エッジ数 e の最大値は $8p$ である．

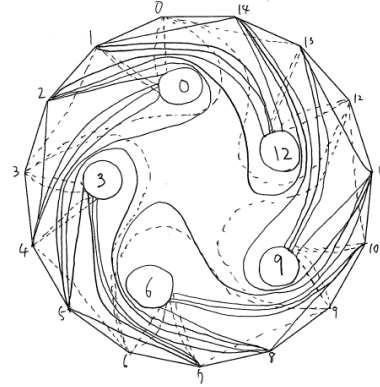
7. D_p 不変な G_{3p} の $g = p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

D_p 不変なグラフ G_{2p} の研究に引き続き、完全グラフではない Z_p 不変なグラフ G_{3p} について研究した．

下の図は、タイプが $G_{15}[15Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) であるグラフを、 $g = 5$ の閉曲面 $\rightarrow Z_5$ 不変に埋め込んだ図である． G_{15} を構成する部分グラフは、 $Z_{15}(0,1,2,\dots,14)$, $Z_{15}(0,2,4,\dots,11,13)$, $Z_5(0,3,6,9,12)$, $Z_5(1,4,7,10,13)$, $Z_5(2,5,8,11,14)$ と5本のエッジ $Z_1(0,4)$, $Z_1(3,7)$, $Z_1(6,10)$, $Z_1(9,13)$, $Z_1(12,1)$, 5本のエッジ $Z_1(0,5)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(6,11)$, $Z_1(9,14)$, $Z_1(12,2)$ と5本のエッジ $Z_1(1,5)$, $Z_1(4,8)$, $Z_1(7,11)$, $Z_1(10,15)$, $Z_1(13,2)$ である．



$G_{15}[15Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (D_5 不変)



$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

図 1 6

定理 2. p を 5 以上の素数とする. このとき, D_p 不変なグラフ $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ は, $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込むことができる.

ここで, G_{3p} を構成する部分グラフは, $Z_{3p}(0, 1, \dots, (3p-1))$, $Z_{3p}(0, 2, \dots, (3p-1))$, $Z_p(0, 3, \dots, (3p-3))$, $Z_p(1, 4, \dots, (3p-2))$, $Z_p(2, 5, \dots, (3p-1))$, p 本のエッジ $Z_1(0, 4)$, $Z_1(3, 7)$, $\dots, Z_1((3p-3), 1)$ と, p 本エッジ $Z_1(0, 5)$, $Z_1(3, 8)$, $Z_1(6, 11)$, $\dots, Z_1((3p-3), 2)$ と, p 本エッジ $Z_1(1, 5)$, $Z_1(4, 8)$, $\dots, Z_1((3p-2), 2)$ である.

(証明のスケッチ) 球面を用意し, $3p$ 個のノードを球面上の大円に $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 3p-1$ と順序よく並べる. 球面に開ける穴は, 穴 0, 穴 3, $\dots$, 穴 $(3p-3)$ とする. 証明の方針は, 穴 0 の周りの原子埋め込みを完成させ, その後, 定理 4 を使って平行移動させた埋め込みを作ることで示す.

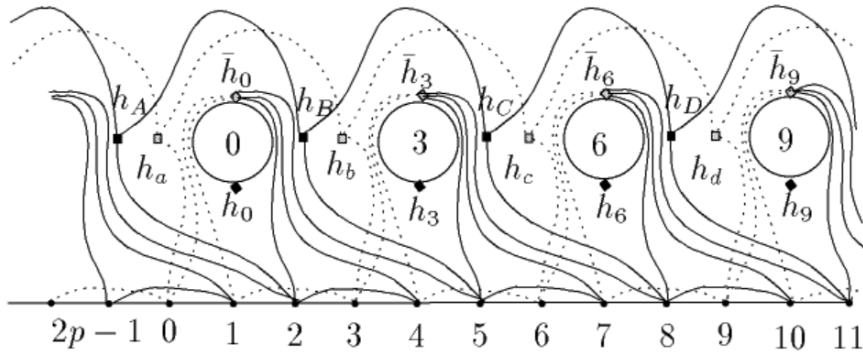


図 1 7

(ステップ 1) 4 個のノード $0, 2, 4, 6$ を結んだエッジを, $(0 \dots \bar{h}_0 - 2 - 4 \dots 6)$ として埋め込み, 原子埋め込み 1 とする. これは $+6$ の平行移動で $Z_{3p}(0, 2, \dots, (3p-1))$ の埋め込みを考えている.

(ステップ2) ノード0とノード3を結んだエッジを,
 $(0 \cdots h_a \cdots h_b \cdots 3)$ として埋め込み, 原子埋め込み2とする.
 これは+3の平行移動による $Z_p(0,3, \cdots, (3p-3))$ の埋め込みを
 考えている.

(ステップ3) ノード0とノード4を結んだエッジを,
 $(0 \cdots \bar{h}_0 - 4)$ として埋め込み, 原子埋め込み3とする. これは
 +3の平行移動による p 本の部分グラフ $Z_1(0,4), Z_1(3,7),$
 $\cdots, Z_1((3p-3), 1)$ の埋め込みを考えている.

(ステップ4) ノード0とノード5を結んだエッジを,
 $(0 \cdots \bar{h}_0 - 5)$ として埋め込み, 原子埋め込み4とする. これは
 +3の平行移動による p 本の部分グラフ $Z_1(0,5), Z_1(3,8),$
 $Z_1(6,11), \cdots, Z_1((3p-3), 2)$ の埋め込みを考えている.

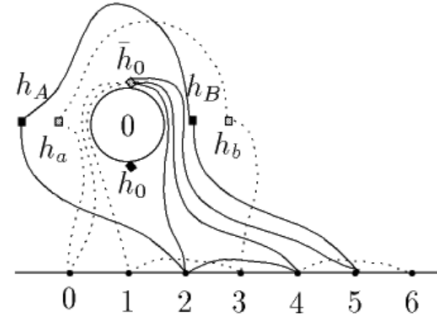


図 18

(ステップ5) 点1と点4を結んだエッジを, $(0 \cdots h_a \cdots h_b \cdots 3)$ として埋め込み, 原子埋め込み5とする.
 これは+3の平行移動による $Z_p(1,4, \cdots, (3p-2))$ の埋め込みを考えている.

(ステップ6) 点1と点5を結んだエッジを, $(1 \cdots \bar{h}_0 - 5)$ として埋め込み, 原子埋め込み6とする.
 これは+3の平行移動による p 本の部分グラフ $Z_1(0,5), Z_1(3,8), Z_1(6,11), \cdots, Z_1((3p-3), 1)$ の埋め込み
 を考えている.

(ステップ7) 点2と点5を結んだエッジを, $(2 - h_A - h_B - 5)$ として埋め込み, 原子埋め込み7とする.
 これは+3の平行移動による $Z_p(2,5, \cdots, (3p-1))$ の埋め込みを考えている.

以上より, 穴0の周りの埋め込みが完成し, そして命題4とステップ1からステップ7に述べた平行
 移動により, 穴0の周りの埋め込みから平行移動させた埋め込み作り, それを p 回繰り返すことで,
 $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ は, $g = p$ の閉曲面 $\rightarrow Z_p$ 不変に埋め込まれる.

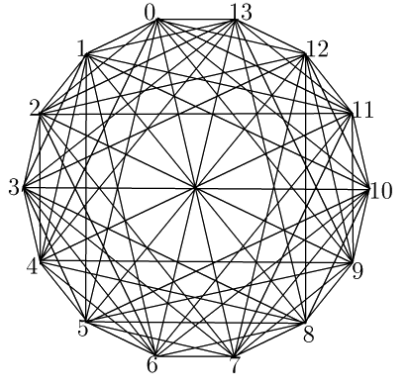
$G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ が D_p 不変であることを示すには, ノード0と $3p-1$ の間の中点とノード
 $\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}$ とを結んだ直線を L とし, L について $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ が対称であることが, 定理
 1の証明と同様な計算から示される. Q. E. D

定理2に関連して, 以下の予想も立てている.

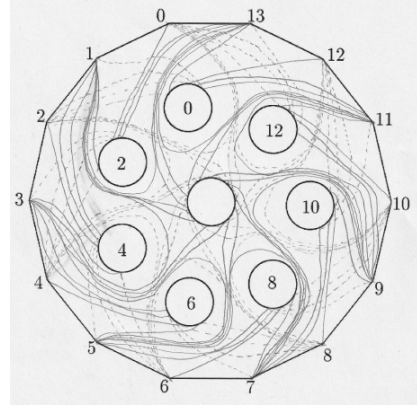
予想2. G_{3p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の D_p 不変な部分グラフとする ($p \geq 5$). この
 とき, G_{3p} の総エッジ数 e の最大値は $12p$ である.

8. D_p 不変な $G_{p_1 p_2}$ の $g = p_2$ の閉曲面への Z_{p_2} 不変な埋め込み

節7と節8で扱った埋め込みは, 上面図の中心に穴を増やすことで, 種数を+1することができ, 逆に,
 Z_p 不変性を崩さないような D_{ap} 不変なグラフを作ることができるのではないかと考えた. 以下
 は, D_7 不変なグラフ $G_{14}[28Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 70]$ の $g = 8$ の閉曲面への Z_7 不変な埋め込みの様子である.
 この埋め込みを一般化し定理1と同様な手法で, 以下の定理3を証明した.



$G_{14}[28Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 70]$ (D_7 不変)



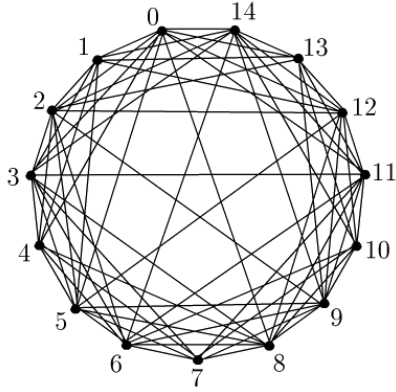
$g = 8$ の閉曲面への埋め込み (Z_7 不変)

図 1 9

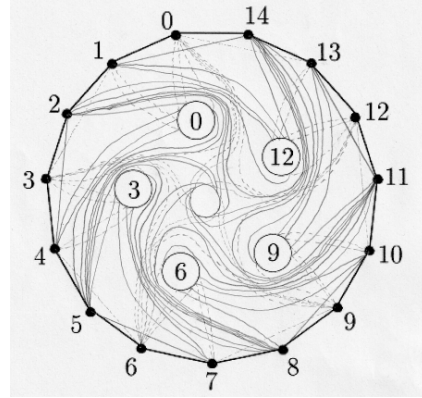
定理 3. p を 7 以上の素数とする. このとき, D_p 不変なグラフ $G_{2p}[4pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 10p]$ は, $g = p + 1$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込むことができる.

ここで, G_{2p} を構成する部分グラフは, 定理 1 のものに p 本エッジ $Z_1(0, p), Z_1(1, 1 + p), \dots, Z_1((p - 1), (p - 1) + p)$ と p 本エッジ $Z_1(0, v), Z_1(2, 2 + v), \dots, Z_1((2p - 2), (2p - 2) + v)$ を追加したものであり, $v = p - 2$ である.

次は, D_5 不変なグラフ $G_{15}[25Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 70]$ の $g = 6$ の閉曲面への Z_5 不変な埋め込みの様子である. この埋め込みを一般化し定理 2 と同様な手法で, 以下の定理 4 を証明した.



$G_{15}[25Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 70]$ (D_5 不変)



$g = 6$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

図 2 0

定理 4. p を 5 以上の素数とする. このとき, D_p 不変なグラフ $G_{3p}[5pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ は, $g = p + 1$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込むことができる.

ここで, G_{3p} を構成する部分グラフは, 定理 2 のものに p 本エッジ $Z_1(0, u), Z_1(3, 3 + u), \dots, Z_1((3p - 2), (3p - 2) + u)$ と p 本エッジ $Z_1(2, 2 + v), Z_1(5, 5 + v), \dots, Z_1((3p - 1), (3p - 1) + v)$ を追加したものであり, $u = (3p + 1)/2, v = u/2$ である.

さらに、次の2つの定理も証明した.

定理 5. p_5 を5以上の素数, p_2 を $p_2 \geq p_1$ なる素数とする. このとき, D_p 不変なグラフ $G_{p_1 p_2}[2p_2 Z_1 \oplus 2Z_{p_2} \oplus 3Z_{p_1 p_2}; (3p_1 + 4)p_2]$ は, $g = p_2$ の閉曲面 $\rightarrow Z_p$ 不変に埋め込むことができる.

定理 6. p_5 を5以上の素数, p_2 を $p_2 \geq p_1$ なる素数とする. このとき, D_p 不変なグラフ $G_{p_1 p_2}[4p_2 Z_1 \oplus 2Z_{p_2} \oplus 3Z_{p_1 p_2}; (3p_1 + 6)p_2]$ は, $g = p_2 + 1$ の閉曲面 $\rightarrow Z_p$ 不変に埋め込むことができる.

9. 本研究で得られた成果

本研究では, ある種の D_p 不変なグラフに関して埋め込むことができる閉曲面の種数 g を決定するだけでなく, 具体的な Z_p 不変に埋め込む方法を示したことが成果である. しかし, これらが最低種数であることを示すことはできなかった.

10. 今後の研究の予定

(1) 今回の研究を行なう中で, グラフ自体に表れるエッジの交点数をノードで割った量 (交点密度と呼んでいる) が埋め込む閉曲面の種数と何か関係があるのではないかと考えた. このことについて取り組みたい.

(2) グラフ理論は四色問題とも関係が深いことが知られているので, 今回示した定理を利用して, 埋め込まれたグラフによって閉曲面が何色に塗り分けられるのかについて研究しようとも考えている.

参考文献

- [1] 野口健太, 平面グラフ・曲面上のグラフ, オペレーションズ・リサーチ学会, 2016 年, 12 月号, pp.832-836
- [2] 小舘崇子, グラフの曲面への埋め込みについて, 東京女子大学紀要論集. 科学部門報告 / 東京女子大学学会 編, 第 62 巻, pp.1931-1942, 2011 年

卒業研究報告書

群 A_5 をもつ5次方程式の研究

指導教員

松田修

津山工業高等専門学校

総合理工学科

情報システム系

稲垣佑都

令和3年2月3日

Abstract

The groups of the general n th order equations are the symmetric groups S_n . When $n \geq 5$, S_n are the unsolvable groups. So, the general n th order equations are not solvable by radicals. The alternating groups A_n are the normal subgroups and simple groups of S_n , and A_n are unsolvable, too. So, the n th order equations with A_n are not solvable by radicals. The number of the n th order equations with A_n are less than the number of them with S_n . I think the n th order equations with A_n have some characteristics.

My research subject is quintic equations with A_5 . For this, I used the free soft SageMath version 8.6 which was developed by William Stein in 2005. I was able to collect many quintic equations with A_5 .

In this paper, we shall show one theorem and seven conjectures about quintic equations with A_5 . These claims are that if some coefficient of a quintic equation are related to the Lucas and Fibonacci numbers, then the group of the equation is A_5 . In particular, the theorem is about quintic equations with the type $x^5 + sx + t = 0$, and if $s = 5L_{2n+1}L_{2n+5}$ and $t = \pm 4L_{2n+1}L_{2n+5}$ then the groups of these equations are A_5 , where L_m means m th Lucas number.

目次

1	はじめに	1
2	方程式の群と最小分解体	1
3	A_5 をもつ5次方程式の例	2
4	定理の証明の準備	3
4.1	$f(x)$ の6次レゾルベント $f_{20}(x)$	3
4.2	リュカ数	4
5	定理の証明	4
6	群 A_5 をもつ5次方程式に関するその他の予想	7
6.1	方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ の群	7
6.2	方程式 $x^5 + sx^3 + t = 0$ の群	9
6.3	方程式 $x^5 + sx^2 + t = 0$ の群	9
6.4	方程式 $x^5 + sx^4 + tx^2 + u = 0$ の群	10
6.5	方程式 $x^5 + sx^3 + tx + u = 0$ の群	10
6.6	方程式 $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ の群	11
6.7	方程式 $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ の群	11
7	おわりに	11
	参考文献	12
	付録A A_5 をもつ5次方程式を求めるプログラム(Python2)	A-1

1. はじめに

本稿は、2018 年度の 3 年生の少人数型の演習授業（全系横断演習 I）で、ガロア理論に関する授業を受け、それに興味を持ち、発展させた研究である。ガロア理論からは、 n を 5 以上の整数としたとき一般の n 次方程式はべき根で解くことができないという定理が得られる。そして、この定理は方程式の群と呼ばれるものが可解群でないということと同値である。実は、 $n \geq 5$ のときの対称群とよばれる群 S_n は可解群でない。さらに、 S_n の部分群である交代群とよばれる群 A_n も可解群でない。特に、5 次方程式の群は、 S_5 または A_5 と同型であるもの以外にも、 F_{12} と書かれる位数 12 のフロベニウス群、 D_{10} と書かれる位数 10 の二面体群、 Z_5 と書かれる位数 5 の巡回群などと同型となる。そして、 F_{12} と D_{10} と Z_5 はいずれも可解群である。すなわち方程式の群がこれらの可解群と同型となる 5 次方程式はべき根で解くことができる。そのため、これらのタイプの群をもつ方程式に対して、どのような解の公式が得られるかといったことは自然な研究テーマであり、Spearman と Williams¹⁾²⁾、あるいは、Kavanagh³⁾ などはその方向の研究を行った。すると、ほとんどの 5 次方程式の群は S_5 と同型であり、方程式の範囲を限定してコンピュータで調べてみると、 S_5 以外の同型な群をもつ 5 次方程式は極少数である。このことから、我々は、方程式の群が A_5 と同型である 5 次方程式は特別であるとみて、研究によってべき根で解けないという性質以外の何らかの特徴を見出すことができるのではないかと考えた。これが本研究の動機である。

そして、以下の定理を証明した。

定理. n を自然数、 L_n を n 番目のリュカ数、さらに $u_n = L_{2n+1}L_{2n+3}$ とする。このとき 5 次方程式 $x^5 + 5u_nx \pm 4u_n = 0$ の群は A_5 と同型である。

2. 方程式の群と最小分解体

a_j ($1 \leq j \leq n-1$) を有理数体 $\mathbb{Q}$ の元とし、 n 次方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

を考える。そして、この方程式の n 個の解 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が全て含まれる $\mathbb{Q}$ 上の最小の体（最小分解体）を F とする。このとき、 n 個の解を互いに置換しあって入れ換えたとき、 $\mathbb{Q}$ 上では固定されて F の自己同型写像を引き起こすような置換だけを集めた集合を n 次方程式の群という。一般の n 次方程式の場合の方程式の群は S_n に同型であり、その位数（置換の個数） $\#S_n$ は $n!$ である。そして S_n の偶置換がなす部分群が n 次交代群 A_n であり、その位数 $\#A_n$ は $n!/2$ である。

方程式の群がある群 G に同型である 5 次方程式を考えよう。以下、これを単に、 G をもつ 5 次方程式ということにする。 $G = S_5$ のとき、 $x_1 \notin \mathbb{Q}$ であり、 $\mathbb{Q}$ に x_1 を含む最小の体（ $\mathbb{Q}$ に x_1 を添加した体という） $K_1 = \mathbb{Q}(x_1)$ 上で、方程式の左辺は因数分解され

$$(x - x_1)(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) = 0$$

となる。ここで、 $b_j \in K_1$ である。 K_1 を $\mathbb{Q}$ 上の 5 次拡大体という。さらに、 $x_2 \notin K_1$ であり、 K_1

に x_2 を添加した体 $K_2 = K_1(x_2)$ 上で, 方程式の左辺は因数分解され

$$(x - x_1)(x - x_2)(x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) = 0$$

となる。ここで, $c_j \in K_2$ である。 K_2 を K_1 上の 4 次拡大体という。さらに, $x_3 \notin K_2$ であり, K_2 に x_3 を添加した体 $K_3 = K_2(x_3)$ 上で, 方程式の左辺は因数分解され

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x^2 + d_1x + d_0) = 0$$

となる。ここで, $d_j \in K_3$ である。 K_3 を K_2 上の 3 次拡大体という。そして, $x_4 \notin K_3$ であり, K_3 に x_4 を添加した体 $K_4 = K_3(x_4)$ 上で, 方程式の左辺は因数分解され

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = 0$$

となる。 K_4 を K_3 上の 2 次拡大体という。この K_4 が, S_5 をもつ 5 次方程式の最小分解体となっている。さらに, S_5 の位数と $\mathbb{Q}$ から K_4 に至るまでの拡大次数の積は一致する。すなわち,

$$\#S_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

である。

$G = A_5$ の場合は, $K_3 = K_2(x_3)$ 上で, 方程式の左辺が因数分解され

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = 0$$

となる。すなわち, K_3 が, A_5 をもつ 5 次方程式の最小分解体となっている。さらに, A_5 の位数と $\mathbb{Q}$ から K_3 に至るまでの拡大次数の積は一致する。すなわち,

$$\#A_5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

である。

3. A_5 をもつ 5 次方程式の例

フリーソフト SageMath は, そのパッケージに PARI/GP を搭載しており, 方程式の群の計算が可能となっている。SageMath は, 2005 年にアメリカワシントン大学の William Stein が主導して開発した。

今回の研究は, SageMath version 8.6 を使って行なった。たとえば, 群 A_5 をもつ 5 次方程式は,

$$x^5 - 55x - 88 = 0$$

である。

前節と同じで, 有理数体 $\mathbb{Q}$ から最小分解体 K_3 までの中間体を $\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3$ とすると, 体 K_1 上では,

$$(x - x_1)(x^4 + x_1x^3 + x_1^2x^2 + x_1^3x + x_1^4 - 55) = 0, \quad x_1 \in K_1, \quad x_1 \notin \mathbb{Q}$$

と因数分解される。体 K_2 上では,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x^3 + (x_2 + x_1)x^2 + (x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)x + x_2^3 + x_2^2x_1 + x_2x_1^2 + x_1^3) = 0,$$

$$x_2 \in K_2, \quad x_2 \notin K_1$$

と因数分解される。そして, 体 K_3 上では,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x + c_1)(x + c_2) = 0, \quad x_3, c_1, c_2 \in K_3, \quad x_3, c_1, c_2 \notin K_2$$

と因数分解される。ここで,

$$c_1 = \left(\left(-\frac{x_1^2}{220} - \frac{x_1}{110} \right) x_2^3 + \left(-\frac{x_1^4}{220} + \frac{x_1^3}{110} + \frac{1}{10} \right) x_2 - \frac{x_1}{10} - \frac{1}{5} \right) x_3^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\frac{x_1^3}{220} + \frac{x_1^2}{110} \right) x_2^3 + \left(\frac{x_1^4}{110} - \frac{1}{10} \right) x_2^2 + \left(\frac{x_1^4}{110} + \frac{x_1}{4} + \frac{2}{5} \right) x_2 + \frac{x_1^2}{10} + \frac{2x_1}{5} + \frac{9}{10} \right) x_3 \\
& + \left(\frac{x_1}{10} + \frac{1}{5} \right) x_2^2 + \left(-\frac{x_1^2}{10} + \frac{9}{10} \right) x_2 - \frac{x_1^2}{5} + \frac{x_1}{10} \\
c_2 = & \left(\left(\frac{x_1^2}{220} + \frac{x_1}{110} \right) x_2^3 + \left(\frac{x_1^4}{220} - \frac{x_1^3}{110} + \frac{1}{10} \right) x_2 + \frac{x_1}{10} + \frac{1}{5} \right) x_3^2 \\
& + \left(\left(-\frac{x_1^3}{220} - \frac{x_1^2}{110} \right) x_2^3 + \left(-\frac{x_1^4}{110} + \frac{1}{10} \right) x_2^2 + \left(-\frac{x_1^4}{110} - \frac{x_1}{4} - \frac{2}{5} \right) x_2 - \frac{x_1^2}{10} - \frac{2x_1}{5} + \frac{1}{10} \right) x_3 \\
& + \left(-\frac{x_1}{10} - \frac{1}{5} \right) x_2^2 + \left(\frac{x_1^2}{10} + \frac{1}{10} \right) x_2 + \frac{x_1^2}{5} + \frac{x_1}{10}
\end{aligned}$$

である。

4. 定理の証明の準備

4.1 $f(x)$ の 6 次レゾルベント $f_{20}(x)$

$f(x)$ を $\mathbb{Q}$ 係数の 5 次式とする。そして、 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を

$$f(x) = x^5 - s_1 x^4 + s_2 x^3 - s_3 x^2 + s_4 x - s_5$$

の根とする。ここで、 s_i は 5 つの根を使った基本対称式である。さらに、

$$F_{20} = \{\sigma, \tau \mid \sigma^5 = \tau^4 = id, \sigma\tau = \tau\sigma^2\} \subset S_5$$

は、位数 20 のフロベニウス群で、その生成元を $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$ と $\tau = (2 \ 3 \ 5 \ 4)$ とできる。

そこで、

$$\begin{aligned}
\theta = \theta_1 = & x_1^2(x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^2(x_3 x_1 + x_4 x_5) + x_3^2(x_4 x_2 + x_5 x_1) + x_4^2(x_5 x_3 + x_1 x_2) \\
& + x_5^2(x_1 x_4 + x_2 x_3)
\end{aligned}$$

を考えると、 θ の S_5 での不変な置換の集合は F_{20} となる (Dummit⁴⁾ を参照)。

さらに、

$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = (123)\theta_1, \quad \theta_3 = (132)\theta_1, \quad \theta_4 = (12)\theta_1, \quad \theta_5 = (23)\theta_1, \quad \theta_6 = (13)\theta_1$$

とし、そして

$$f_{20}(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x - \theta_3)(x - \theta_4)(x - \theta_5)(x - \theta_6)$$

とする。 $f_{20}(x)$ は $f(x)$ の 6 次レゾルベントと呼ばれる。

$f_{20}(x)$ の係数は、 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 の対称式となるため、 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 の対称式でもある。そして、Dummit⁴⁾ の Theorem 1 で以下が示されている。

命題 1. $\mathbb{Q}$ 係数の 5 次方程式 $f(x) = 0$ がべき根で解けることと、 $f_{20}(x)$ が有理数根を持つことは同値である。

Δ を差積、すなわち $\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ とし、そして、 $D = \Delta^2$ とする。ここで x_i は $f(x)$ の根であり、 D は $f(x)$ の判別式と呼ばれる。 D について以下がいえる。

命題 2. $D \in \mathbb{Q}$ であることと $f(x)$ の群が Z_5 , D_{10} , または A_5 のいずれかと同型であることは同値である。

$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ とする。ここで, a_i は整数とする。以下の命題はよく知られている。

命題 3. r が $f(x)$ の根であることと, $r|a_0$ であることは同値である。

命題 4. $f_{20}(x)$ は整数根をもち, $\sqrt{D}$ が整数であることは, $f(x)$ の群が Z_5 または D_{10} とどちらかと同型であることと同値である。

(証明) 命題 1, 命題 2, 命題 3 より得られる。

4.2 リュカ数

n 番目のフィボナッチ数 F_n は, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ で $n \geq 0$ に対して漸化式

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

で定義される。また, n 番目のリュカ数 L_n は, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ で $n \geq 0$ に対して漸化式

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

で定義される。

命題 5. $u_n = L_{2n+1}L_{2n+3}$ とする。このとき, $u_n \geq 4$ であり, $u_n + 1 = 5F_{2n+2}^2$ である。

(証明) $L_{2n+1}L_{2n+3} = L_{2n+2}^2 - 5$ と $L_{2n+2}^2 = 5F_{2n+2}^2 + 4$ はよく知られた結果⁵⁾である。これより $u_n + 1 = 5F_{2n+2}^2$ が得られる。

命題 6. $u_n \not\equiv 0 \pmod{3}$

(証明) $L_n \pmod{3}$ は鳩ノ巣原理から周期的である。そして, $L_n \pmod{3}$ の 1 周期の数列は 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2 である。これより $u_n \pmod{3}$ は周期的で, その 1 周期の数列は 1, 2 である。よって

$u_n \not\equiv 0 \pmod{3}$ 。

5. 定理の証明

改めて, 定理を述べておく。

定理. n を自然数, L_n を n 番目のリュカ数, さらに $u_n = L_{2n+1}L_{2n+3}$ とする。このとき 5 次方程式 $x^5 + 5u_nx \pm 4u_n = 0$ の群は A_5 と同型である。

(証明) a と b は 0 でない整数とする。5 次式 $f(x) = x^5 + ax + b$ を考える。このとき,

$$\begin{aligned} f_{20}(x) = & x^6 + 8ax^5 + 40a^2x^4 + 160a^3x^3 + 400a^4x^2 + (512a^5 - 3125b^4)x \\ & + (256a^6 - 9375ab^4) \end{aligned} \quad (1)$$

であり (Dummit⁴)を参照), また, $f(x)$ の判別式 D は, 簡単な計算から

$$D = 4^4 a^5 + 5^5 b^4 \quad (2)$$

となる。 $a = 5u_n$, $b = \pm 4u_n$ より,

$$D_n = 4^4 5^5 u_n^5 + 5^5 \cdot 4^4 u_n^4 = (4 \times 5u_n)^4 \cdot 5 \cdot (u_n + 1) \quad (2')$$

を得る。命題5より, $u_n + 1 = 5F_{2n+2}^2$ だったので,

$$D_n = (4 \times 5u_n)^4 \cdot 5^2 \cdot F_{2n+2}^2$$

となり, D_n は平方数なので, $\sqrt{D_n}$ は整数となる。よって命題2より, $x^5 + 5u_n x \pm 4u_n = 0$ の群は, Z_5, D_{10} または A_5 と同値となる。

以下, $x^5 + 5u_n x \pm 4u_n$ の群は Z_5 か D_{10} と同型であると仮定し矛盾を導く。

(1) より,

$$\begin{aligned} f_{20}(x) = & x^6 + 2^3 5 u_n x^5 + 2^3 5^3 u_n^2 x^4 + 2^5 5^4 u_n^3 x^3 + 2^4 5^6 u_n^4 x^2 + 2^8 5^5 u_n^4 (2u_n - 1)x \\ & + 2^8 5^6 u_n^5 (u_n - 3) \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。そして r を $f_{20}(x)$ の根とすると, 命題4より r は整数である。命題3より

$$r | 2^8 5^6 u_n^5 (u_n - 3) \quad (4)$$

が得られる。これより, ある正の整数 α と β が存在し

$$r = 2^\alpha 5^\beta \zeta$$

と仮定できる。ただし, ζ は $2 \nmid \zeta$ であり $5 \nmid \zeta$ とする。さらに

$$G = r^5 + 5^2 u_n r^4 + 2^2 5^3 u_n^2 r^3 + 2 \cdot 5^5 u_n^3 r^2 + 2^5 5^4 u_n^3 (2u_n - 1)r + 2^5 5^5 u_n^4 (u_n - 3) \quad (5)$$

と置くと, $f_{20}(r) = 0$ より

$$r^6 = -2^3 5 u_n G \quad (6)$$

を得る。

(a) $b \geq 2$ の場合を考える。(6)より

$$0 \equiv 2^{6a} 5^{6b} \zeta^6 = -2^3 5 u_n G \pmod{5^7} \quad (7)$$

であるので, $G \equiv 0 \pmod{5^6}$ である。しかし(6)より

$$G \equiv 2^5 5^5 u_n^4 (u_n - 3) \pmod{5^6}$$

であり, 命題5より $5^6 \nmid G$ である。よって, $2^3 5 u_n G \not\equiv 0 \pmod{5^7}$ となり(7)に矛盾する。

(b) $b = 0, 1$ の場合を考える。このとき,

$$\begin{aligned} H = \frac{G}{5^{5b}} = & 2^{5a} \zeta^5 + 2^{4a} 5 \zeta^4 u_n + 2^{2+3a} 5 \zeta^3 u_n^2 + 2^{1+2a} 5^2 u_n^3 \zeta^2 + 2^{5+a} u_n^3 (2u_n - 1) \zeta \\ & + 2^5 u_n^4 (u_n - 3) \end{aligned} \quad (8)$$

とする。 $f_{20}(r) = 0$ より等式(6)は $2^{6a} 5^{6b} \zeta^6 = -2^3 5^{5b+1} u_n H$ となる。これを整理して,

$$2^{6a-3} \zeta^6 = -5^{1-b} u_n H \quad (9)$$

を得る。もし, $b = 0$ なら $5 \nmid \zeta$ より(9)は成り立たない。したがって, 以下 $b = 1$ とする。

(b-1) $a \geq 3$ としよう。(8)と(9)より,

$$2^{6a-3} \zeta^6 \equiv -2^{5a} \zeta^5 u_n \pmod{2^5 u_n^2} \Rightarrow 2^{a-3} \zeta \equiv -u_n \pmod{2^5 u_n^2}$$

である。よって, W をある正の整数として,

$$2^{a-3}\zeta = u_n(2^5u_nW - 1) \quad (10)$$

と書ける。 $u_n = 2^\beta u'_n$, $2 \nmid u'_n$ とする。 $2 \nmid 2^5u_nW - 1$ より, $a - 3 = \beta \geq 0$ である。したがって, (10) は

$$\zeta = u'_n(2^5u_nW - 1) \quad (11)$$

となる。さらに, (4) より $2^a \cdot 5\zeta | 2^8 5^6 u_n^5 (u_n - 3)$ である。これはある正の整数 Z を用いて

$$u_n^5(u_n - 3) = \zeta Z \implies 2^{5\beta} u_n'^5(u_n - 3) = u'_n(2^5u_nW - 1)Z$$

と書けることを意味する。やはり, $2 \nmid u'_n$, $2 \nmid 2^5u_nW - 1$, $u'_n \nmid u_n - 3$, $u'_n \nmid 2^5u_nW - 1$ より, ある正の整数 Z' により,

$$u_n - 3 = (2^5u_nW - 1)Z'$$

となる。よって,

$$u_n = \frac{1 - 3/Z'}{2^5W - 1/Z'} < 1$$

となり, これは $u_n \geq 4$ に矛盾する。

(b-2) $a \leq 2$ の場合を考える。

$$H_1 = \frac{H}{2^{1+2a}} = 2^{3a-1}\zeta^5 + 2^{2a-1}5\zeta^4u_n + 2^{a+1}5\zeta^3u_n^2 + 5^2u_n^3\zeta^2 + 2^{4-a}u_n^3(2u_n - 1)\zeta + 2^{4-2a}u_n^4(u_n - 3) \quad (12)$$

と置く。このとき, (9) は $2^{6a-3}\zeta^6 = -2^{1+2a}u_nH_1$ となり, これを整理して

$$2^{4a-4}\zeta^6 = -u_nH_1 \quad (13)$$

を得る。もし $a = 0$ ならば, (13) は $\zeta^6 = -2^4u_nH_1$ となるが, これは $2 \nmid \zeta$ に矛盾する。したがって, $a = 1, 2$ である。

(b-2a) $a = 2$ としよう。この場合, (13) は

$$2^4\zeta^6 = -u_nH_1 \quad (14)$$

となる。(12) と (14) より,

$$2^4\zeta^6 = -2^5\zeta^5u_n \pmod{u_n^2} \implies \zeta = -2u_n \pmod{u_n^2}$$

となる。これより, ある整数 T を用いて

$$\zeta = u_n(u_nT - 2)$$

と書ける。 $2 \nmid \zeta$ より $2 \nmid u_n$ であり $2 \nmid (u_nT - 2)$ である。

$$H_2 = \frac{H_1}{u_n^4} = 2^7u_n(u_nT - 2)^5 + 2^35u_n^4(u_nT - 2)^4 + 2^35u_n(u_nT - 2)^3 + 5^2u_n(u_nT - 2)^2 + 2^2(2u_n - 1)(u_nT - 2) + (u_n - 3) \quad (15)$$

と置く。(14) より,

$$2^4u_n^6(u_nT - 2)^6 = -u_n^5H_2 \implies 2^4u_n(u_nT - 2)^6 = -H_2$$

を得るので, $2|H_2$ となる。 $2 \nmid u_n$ and $3 \nmid u_n$ だったので, $2|(u_n - 3)$ である。(15) より,

$$H_2 \equiv 5^2u_n(u_nT - 2)^2 \pmod{2}$$

である。 $2 \nmid u_n$ and $2 \nmid (u_nT - 2)$ より $2 \nmid H_2$ となるが, これは $2|H_2$ に矛盾する。

(b-2b) $a = 1$ の場合を考えよう。(13) より $\zeta \equiv 0 \pmod{u_n}$ である。よって, ある整数 T' を用いて

$$\zeta = u_n T'$$

と書ける。 $2 \nmid \zeta$ より $2 \nmid u_n$ と $2 \nmid T'$ がいえる。(13) に $\zeta = u_n T'$ を代入して、

$$u_n^6 T'^6 = -u_n H_1 = -u_n^5 H_2$$

なるが、これを整理して

$$u_n T'^6 = -H_2 \quad (16)$$

を得る。したがって、 $u_n | H_2$, $T' | H_2$ である。(15) より、

$$-2T' + 3 \equiv 0 \pmod{u_n}, \quad u_n - 3 \equiv 0 \pmod{T'}$$

を得る。したがって、ある整数 A と B を用いて

$$2T' = u_n A + 3, \quad u_n = T' B + 3 \quad (17)$$

と書ける。 $2 \nmid u_n$ と $2 \nmid T'$ より、 $2 \nmid A$ と $2 \nmid B$ がいえる。(17) より、

$$(2 - AB)T' = 3(A + 1), \quad (2 - AB)u_n = 3(B + 2)$$

よって、

$$T' = \frac{A + 1}{B + 2} u_n, \quad u_n = \frac{B + 2}{A + 1} T'$$

を得る。 T' は整数で、 u_n は正の整数より $A + 1 = \pm(B + 2)$ となる。ただし $A \neq -1, B \neq -2$ である。

(b-2b-i) $A + 1 = B + 2$ とする。このとき $B = A - 1$ で、(17) より

$$T' A^2 - (T' - 3)A + 3 - 2T' = 0 \quad (18)$$

である。(18) を A に関する 2 次方程式として解くと

$$A = \frac{2T' - 3}{T'}$$

である。 T' も A も整数であることと(17)より $(T', A, u_n) = (-1, 5, -1), (1, -1, 1), (3, 1, 3), (-3, 3, -3)$ であるが、いずれも $u_n \geq 4$ に矛盾する。

(b-2b-ii) $A + 1 = -(B + 2)$ としよう。このとき $B = -A - 3$ で、(18) より

$$T' A^2 + (T' - 3)A - (3 - 2T') = 0 \quad (19)$$

である。 A に関する 2 次方程式(19)と A が整数であることから $T' = 0$ でなければならない。したがって、(17) より $u_n = 3$ であるが、これは $u_n \geq 4$ に矛盾する。

以上により、 $x^5 + 5u_n x \pm 4u_n = 0$ の群は A_5 に同型であることが証明された。

6. 群 A_5 をもつ 5 次方程式に関するその他の予想

6.1 方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ の群

方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ の群が A_5 と同型となる s と t を調査したところ、 $s = 5$ のとき t について以下のデータが得られた。これらのデータは付録 A の付図 1 のプログラムから得られた。

$$t = 64, 320, 7744, 20480, 53824, 141120, 369664$$

$$t = -320, -1280, -3136, -8000, -54080, -141376, -369920$$

これらは全て 64 の倍数であり $t = 64u$ とすると、

$$u = 1, 5, 45, 121, 320, 841, 2205, 5776$$

$$u = -5, -9, -49, -125, -845, -2209, -5780$$

である。

ここで、リュカ数 L_n に注目した。 $n \geq 1$ の L_n は、

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

であり、 L_n^2 は、

$$1, 9, 16, 49, 121, 324, 841, 2209, 5776, \dots$$

である。そこで、数列 u_n ($n \geq 1$)を、

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1^2 = 1, & u_2 &= L_2^2 - 4 = 9 - 4 = 5, & u_3 &= L_3^2 = 16, \\ u_4 &= L_4^2 - 4 = 49 - 4 = 45, & u_5 &= L_5^2 = 121, & u_6 &= L_6^2 - 4 = 324 - 4 = 320, \\ u_7 &= L_7^2 = 841, & u_8 &= L_8^2 - 4 = 2209 - 4 = 2205, & u_9 &= L_9^2 = 5776, \dots \end{aligned}$$

すなわち、

$$u_{2n-1} = L_{2n-1}^2, \quad u_{2n} = L_{2n}^2 - 4$$

と置くと、 $1 \leq n \leq 9$ である整数 n について、方程式 $x^5 + 5x^4 + 64u_n = 0$ (u_3 は除く) の群は

A_5 と同型であるといえる。実は、方程式 $x^5 - 5x^4 - 64u_n = 0$ (u_3 は除く)の群も A_5 と同型であ

る。同様に、数列 v_n ($n \geq 1$)を、

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1^2 + 4 = 5, & v_2 &= L_2^2 = 9, & v_3 &= L_3^2 + 4 = 16 + 4 = 20, & v_4 &= L_4^2 = 49, \\ v_5 &= L_5^2 + 4 = 121 + 4 = 125, & v_6 &= L_6^2 = 324, & v_7 &= L_7^2 + 4 = 841 + 4 = 845, \\ v_8 &= L_8^2 = 2209, & v_9 &= L_9^2 + 4 = 5776 + 4 = 5780, \dots \end{aligned}$$

すなわち、

$$v_{2n-1} = L_{2n-1}^2 + 4, \quad v_{2n} = L_{2n}^2$$

と置くと、 $1 \leq n \leq 9$, である整数 n について、方程式 $x^5 + 5x^4 - 64v_n = 0$ (v_3 は除く)と $x^5 -$

$5x^4 + 64v_n = 0$ (v_3 は除く)の群は A_5 と同型である。 $n = 10000$ まで調査し、以下の予想が得られた。

予想 1. L_n を n 番目のリュカ数とする。このとき、

(i) $u_{2n-1} = L_{2n-1}^2$, $u_{2n} = L_{2n}^2 - 4$ と置いたとき、 u_3 を除く方程式 $x^5 + 5x^4 + 64u_n = 0$ と $x^5 - 5x^4 - 64u_n = 0$ の群はいずれも A_5 と同型である。

(ii) $v_{2n-1} = L_{2n-1}^2 + 4$, $v_{2n} = L_{2n}^2$ と置いたとき、 v_3 を除く方程式 $x^5 + 5x^4 - 64v_n = 0$ と $x^5 - 5x^4 + 64v_n = 0$ の群はいずれも A_5 と同型である。

6.2 方程式 $x^5 + sx^3 + t = 0$ の群

前節で、 A_5 をもつ方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ がリュカ数から得られることが予想された。方程

式 $x^5 + sx^3 + t = 0$ についてもこの観点から研究した。その結果, A_5 をもつ方程式について以下のデータが得られ, これはとても簡単に扱えるものだった。

$$x^5 + 15x^3 \pm 81u_n = 0 \text{ のリスト}$$

$$u_n = 4, 11, 29, 76, 199, 521$$

$$x^5 - 15x^3 \pm 81v_n = 0 \text{ のリスト}$$

$$v_n = 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843$$

$n = 10000$ まで調査し, 以下の予想が得られた。

予想 2. L_n を n 番目のリュカ数とする。このとき,

$$u_n = L_{2n+1}, \quad v_n = L_{2n}$$

と置くと, 方程式 $x^5 + 15x^3 \pm 81u_n = 0$ と $x^5 - 15x^3 \pm 81v_n = 0$ の群はいずれも A_5 と同型である。

6.3 方程式 $x^5 + sx^2 + t = 0$ の群

方程式 $x^5 + s_nx^2 + t_n = 0$ については, $s_n = \pm 10L_n$, $t_n = \pm 24L_n$ (複号同順) を考える必要があった。以下の表 1 がそのデータであり, さらに, $n = 10000$ まで調査し, 以下の予想を得た。

予想 3. L_n を n 番目のリュカ数とする。このとき, 方程式 $x^5 \pm 10x^2 \pm 24 = 0$ (複合同順) の群は A_5 と同型であり, さらに, $n \geq 3$ で

$$s_n = \pm 10L_{2n-1}, \quad t_n = \pm 24L_{2n-1} \quad (\text{複号同順})$$

と置くと, 方程式 $x^5 + s_nx^2 + t_n = 0$ の群はいずれも A_5 と同型である。

表 1 $x^5 + s_nx^2 + t_n = 0$ の s_n と t_n のデータ

n	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47
s_n	10	30	40	70	110	180	290	470
t_n	24	72	96	168	264	432	696	1128
群	A_5	S_5	D_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

n	9	10	11	12	13	14	15	16
L_n	76	123	199	322	521	843	1364	2207
s_n	760	1230	1990	3220	5210	8430	13640	22070
t_n	1824	2952	4776	7728	12504	20232	32736	52968
群	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

n	17	18	19	20	21	22	23	24
L_n	3571	5778	9349	15127	24476	39603	64079	103682
s_n	35710	57780	93490	151270	244760	396030	640790	103682
t_n	85704	138672	224376	363048	587424	950472	1537896	2488368
群	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

6.4 方程式 $x^5 + sx^4 + tx^2 + u = 0$ の群

方程式 $x^5 + sx^4 + tx^2 + u = 0$ については, $s = 5, t = -20, u = -8(L_n - 2)$ で調査した。

$$x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 8(L_n - 2) = 0$$

以下の表 2 がそのデータである。

表 2 $x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 8(L_n - 2) = 0$ の群

L_n	3	7	47	123	322	843	2207	5778
群	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5

さらに, $n = 10000$ まで調査し, 以下の予想を得た。

予想 4. L_n を n 番目のリュカ数とする。このとき, 方程式

$$x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 8(L_{2n} - 2) = 0$$

の群は A_5 と同型である。ただし $n = 3$ は除く。

6.5 方程式 $x^5 + sx^3 + tx + u = 0$ の群

方程式 $x^5 + sx^3 + tx + u = 0$ については, $s = 10, t = 25, u = \pm 8L_n$ で調査した。

$$x^5 + 10x^3 + 25x \pm 8L_n = 0$$

以下の表 3 がそのデータである。

表 3 $x^5 + 10x^3 + 25x \pm 8L_n = 0$ の群

L_n	1	4	11	29	76
群	A_5	S_5	A_5	A_5	A_5

L_n	199	521	1364	28568	9349
群	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5

さらに, $n = 10000$ まで調査し, 以下の予想を得た。

予想 5. L_n を n 番目のリュカ数とする。このとき, 方程式

$$x^5 + 10x^3 + 25x \pm 8L_{n+1} = 0$$

の群は A_5 と同型である。

6.6 方程式 $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ の群

方程式 $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ については, $s = n, t = 25, u = 9n$ で調査した。

$$x^5 + nx^4 + 25x + 9n = 0$$

以下の表 4 がそのデータである。

表 4 $x^5 + nx^4 + 25x + 9n = 0$ の群

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
群	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5

n	10	...	10000
群	A_5	...	A_5

さらに $n = 10000$ まで調査し, 以下の結果を得た。

予想 6. n 番目の数とする。このとき, 方程式

$$x^5 + nx^4 + 25x + 9n = 0$$

の群は A_5 と同型である。

6.7 方程式 $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ の群

方程式 $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ については, $s = 5, t = 15, u = 125F_{2n+1} - 53$ で調査した。

$$x^5 + 5x^4 + 15x^3 + (125F_{2n+1} - 53) = 0$$

表 5 $x^5 + 5x^4 + 15x^3 + (125F_{2n+1} - 53) = 0$ の群

F_{2n+1}	0	3	8	21	55	144	377	987	2584
群	A_5	S_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5

さらに $n = 10000$ まで調査し, 以下の結果を得た。

予想 7. n 番目の数とする。このとき, 方程式

$$x^5 + 5x^4 + 15x + (125F_{2n+1} - 53) = 0$$

の群は A_5 と同型である。

7. おわりに

本研究では群 A_5 をもつ 5 次方程式の研究を目的として, 群論の基礎知識について学び, SageMath を用いて群 A_5 をもつ 5 次方程式の調査を行ってきた。結果として群 A_5 をもつ 5 次方程式について 7 つの予想と一つの定義をたてることができた。

今後の課題として, 群 A_3 をもつ 3 次方程式, 群 A_4 をもつ 4 次方程式を群 A_5 から得た予想をも

とに見直し, そこから得られた結果をヒントに, 群 A_6 をもつ6次方程式や群 A_7 をもつ7次方程式へと研究を広げ, 一般の群 A_n をもつ n 次方程式に関する予想を得たいと考えている。

参考文献

- 1) Blair K. Spearman and Kenneth S. Williams, Characterization of solvable quintics $x^5 + ax + b$, The American Mathematical Monthly Vol. 101, No. 10, pp. 986-992 (1994).
- 2) Blair K. Spearman and Kenneth S. Williams, ON SOLVABLE QUINTICS $x^5 + ax + b$ AND $x^5 + ax^2 + b$, ROCKY MOUNTAIN JOURNAL OF MATHEMATICS Vol.28, No.2 (1998).
- 3) Ryan KAVANAGH, ON IRREDUCIBLE RATIONAL QUINTICS,
<https://rak.ac/files/papers/galois.pdf>
- 4) D. S. Dummit, Solving solvable quintics, Mathematics of computation volume 57, number 195, pp.387-195 (1991).
- 5) 中村滋, フィボナッチ数の小宇宙, 日本評論社 (2002).

付録A A_5 をもつ5次方程式を求めるプログラム(Python2)

```
with open('galois_file','w') as o:
    for j in range(0,100):
        for k in range(0,100):
            s=j
            t=k
            R.<x>=PolynomialRing(00)
            f=x^5+s*x^4+t
            l=list(factor(f))
            u=[x[1] for x in l]
            s=sum(u)
            if s<2:
                G=f.galois_group(pari_group=True)
                u=G.order()
                if 50<u<120:
                    print(f,G)
                    o.write(str(f)+";"+str(G)+'\n')
o.close
```

付図1 A_5 をもつ5次方程式を求めるプログラム(Python2)