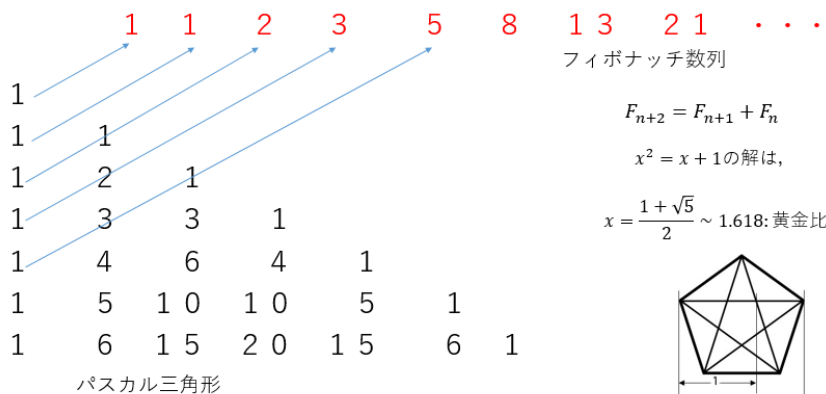


n 次方程式の解と係数から作る数の三角形の研究

1. パスカル三角形とフィボナッチ数列



2. 2次方程式の解と係数から作るの三角形

2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0$$

の解を α, β とすると, 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

である.

そこで, $F_n = \alpha^n + \beta^n$ と置く. 明らかに, $F_0 = 2, F_1 = \alpha^1 + \beta^1 = a$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} aF_{n-1} &= (\alpha + \beta)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\ &= \alpha^n + \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) + \beta^n \\ &= F_n + bF_{n-2} \end{aligned}$$

よって,

$$F_n = aF_{n-1} - bF_{n-2}, \quad F_0 = 2, \quad F_1 = a$$

を得た. これより,

$$F_2 = aF_1 - bF_0 = a^2 - 2b$$

$$F_3 = aF_2 - bF_1 = a(a^2 - 2b) - ab = a^3 - 3ab$$

これを続けると・・・

$$F_1 = a$$

$$F_2 = a^2 - 2b$$

$$F_3 = a^3 - 3ab$$

$$F_4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$$

$$F_5 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$$

$$F_6 = a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3$$

$$F_7 = a^7 - 7a^5b + 14a^2b^2 - 7ab^3$$

$$F_8 = a^8 - 8a^6b + 20a^3b^2 - 16a^2b^3 + 2b^4$$

2 次方程式の解と係数から作る三角形の構造を研究しよう！

3. 3 次方程式の解と係数から作るの三角形

3 次方程式

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

の解を α, β, γ とすると, 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = a, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \quad \alpha\beta\gamma = c$$

である.

そこで, $F_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ と置く.

明らかに, $F_0 = 3, F_1 = \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1 = a$. さらに,

$$F_{-1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{b}{c}$$

$n \geq 2$ のとき

$$aF_{n-1} = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \gamma^{n-1})$$

$$= F_n + bF_{n-2} - cF_{n-3}$$

よって,

$$F_n = aF_{n-1} - bF_{n-2} + cF_{n-3}, \quad F_{-1} = \frac{b}{c}, \quad F_0 = 3, \quad F_1 = a$$

を得た. これより,

$$F_2 = aF_1 - bF_0 + cF_{-1} = a^2 - 2b$$

$$F_3 = aF_2 - bF_1 + cF_0 = a(a^2 - 2b) - ab + 3c = a^3 - 3ab + 3c$$

これを続けると・・・

$$F_1 = a$$

$$F_2 = a^2 - 2b$$

$$F_3 = a^3 - 3ab + 3c$$

$$F_4 = a^4 - 4a^2b + 4ca + 2b^2$$

$$F_5 = a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5bc$$

$$F_6 = a^6 - 6a^4b + 6a^3c + 9a^2b^2 - 12abc - 2b^3 + 3c^2$$

$$F_7 = a^7 - 7a^5b + 7a^4c + 14a^3b^2 - 21a^2bc - 7ab^3 + 7ac^2 + 7b^2c$$

$$F_8 = a^8 - 8a^6b + 8a^5c + 20a^4b^2 - 32a^3bc - 16a^2b^3 + 12a^2c^2 + 24ab^2c + 2b^4 - 8bc^2$$

3 次方程式の解と係数から作る三角形の構造を研究しよう！