

チャレンジゼミナール基礎の話題(数学)

テーマ：ハノイの塔



ハノイの塔はフランスの数学者リュカ (Francois Édouard Anatole Lucas : 1842–1891) が考案したパズルである。3本の杭と、中央に穴の空いた大きさの異なる円盤があり、最初は左端の杭にすべての円盤が下から大きいもの順に積み重ねられている。この円盤を1枚ずついずれかの杭に移動させ、最終的に右端の杭にすべての円盤が下から大きい順に積み重ねられればクリアである。ただし、円盤の上にそれ自身より大きな円盤を乗せることは許されない。

ハノイの塔のクリアまでの最短手数について、次のことが知られている。

公式： n 段のハノイの塔のクリアまでの最短手数を H_n とすると、 $H_n = 2^n - 1$ である。

[証明] 簡単のため、円盤の小さいものから順に $1, 2, 3, \dots$ と番号をつけておく。 n に関する数学的帰納法で $H_n = 2^n - 1$ を示す。まず $n = 1$ のときは $H_1 = 1$ かつ $2^1 - 1 = 1$ より成り立つ。次に $n = k$ のとき成り立つと仮定する。すなわち、 $H_k = 2^k - 1$ とする。ここで $n = k + 1$ のときのクリアまでの最短手数は、

- (1) まず、 $1 \sim k$ 番までの円盤を真ん中の杭に移動する (手数は H_k)。
- (2) 次に $k + 1$ 番の円盤を右端の杭に移動する (手数は 1)。
- (3) 最後に (1) と同様の手順で、 $1 \sim k$ 番までの円盤を右端の杭に移動する (手数は H_k)。

だから、 $H_{k+1} = H_k + 1 + H_k = 2H_k + 1$ が成り立つ。仮定より $H_k = 2^k - 1$ だから、

$$H_{k+1} = 2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2 \cdot 2^k - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$$

を得る。したがって、 $n = k + 1$ のときも $H_n = 2^n - 1$ が成り立つ。

以上より、任意の自然数 n について $H_n = 2^n - 1$ が成り立つ。(Q.E.D.)

n 段のハノイの塔について, 円盤に小さいもの順に $1, 2, \dots, n$ と番号をつける. また, 3 本の杭を左から順に L, C, R と表し, 「 $L \rightarrow C$ 」で左端の杭から真ん中の杭への移動を表すこととする (その他の移動も同様). さらに, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3, 1, 0 \end{pmatrix}$ と書いたとき, 左端の杭に円盤 2 と 3, 真ん中の杭に円盤 1, 右端の杭には円盤がひとつもない状態を表すとする (その他の状態も同様).

1~3 段のハノイの塔クリアまでの最短手数について, 円盤の動く順番や動き方は以下のようになる.

1 段のとき (クリアまでの最短手数: $H_1 = 1$)

手順	動く円盤	動き方	全体の状況
初期状態			$(1, 0, 0)$
①	1	$L \rightarrow R$	$(0, 0, 1)$

2 段のとき (クリアまでの最短手数: $H_2 = 3$)

手順	動く円盤	動き方	全体の状況
初期状態			$\begin{pmatrix} 1 \\ 2, 0, 0 \end{pmatrix}$
①	1	$L \rightarrow C$	$(2, 1, 0)$
②	2	$L \rightarrow R$	$(0, 1, 2)$
③	1	$C \rightarrow R$	$\begin{pmatrix} 0, 0, 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

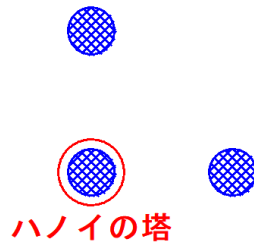
3 段のとき (クリアまでの最短手数: $H_3 = 7$)

手順	動く円盤	動き方	全体の状況
初期状態			$\begin{pmatrix} 1 \\ 2, 0, 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
①	1	$L \rightarrow R$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3, 0, 1 \end{pmatrix}$
②	2	$L \rightarrow C$	$(3, 2, 1)$
③	1	$R \rightarrow C$	$\begin{pmatrix} 3, 1, 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
④	3	$L \rightarrow R$	$\begin{pmatrix} 0, 1, 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
⑤	1	$C \rightarrow L$	$(1, 2, 3)$
⑥	2	$C \rightarrow R$	$\begin{pmatrix} 1, 0, 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
⑦	1	$L \rightarrow R$	$\begin{pmatrix} 0, 0, 2 \\ 3, 1 \end{pmatrix}$

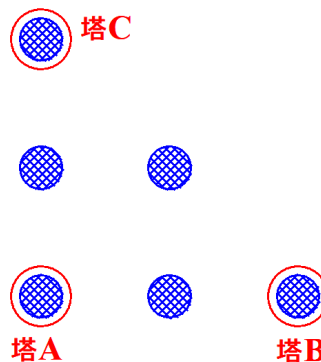
ハノイの塔を基礎として、オリジナル問題を考え、研究を行う。

例えば、次のような問題はどうだろう。

- (1) 通常のハノイの塔は3つの点からなる三角形の各点を杭としたものとする。



これを発展させ、6つの点からなる三角形を考え、各点に杭が置かれているとする。また、三角形の頂点にあたる杭にそれぞれ n 段のハノイの塔 (以下、塔 A、塔 B、塔 C とする) が置かれている状況を考える。



このとき、通常のハノイの塔のルールを用い、空いている3つの杭に塔 A、B、C を移動させる最短の手数はいくつだろうか?? ただし、同じ大きさの円盤は重ねてもよいとし、塔 A、B、C の円盤は区別しないこととする。

補足 実際に実物を作ってみよう!!

- (2) $2n$ 個の円盤を用意し、小さいもの順に $1, 2, 3, \dots, 2n$ と番号をつける。通常のハノイの塔のように3本の杭を考え、 $1 \sim n$ までの円盤を右端の杭に、 $n+1 \sim 2n$ までの円盤を左端の杭に、それぞれ下から大きいもの順に重ねる。簡単のため、右端の塔 ($1 \sim n$ までの円盤を重ねた塔) を塔 A、左端の塔 ($n+1 \sim 2n$ までの円盤を重ねた塔) を塔 B とする。このとき、通常のハノイの塔のルールを用いて塔 A と塔 B の位置を交換する (つまり、塔 A を左端の杭に、塔 B を左端の杭に移動させる) 最短の手数はいくつだろうか??

紹介 以下の web サイトで 1～9 段のハノイの塔に挑戦できます.

<https://hanoi.aimary.com/>

この他にも色々な web サイトやスマートフォンのアプリでハノイの塔をプレイすることができるようです. 検索してみてください (「ハノイの塔」や「Tower of Hanoi」で検索すると色々なサイトがヒットします).