

数列に関する研究

数列に関する研究を行なうために、まず、ある程度の基礎知識を確認する。その後、いくつかの研究テーマを列挙するので、それらのテーマを参考にして、興味ある数列について研究しよう。

第1章 フィボナッチ数列 F_n

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

をフィボナッチ数列という。フィボナッチ数列を漸化式で表すと、

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

となる。

1.1 フィボナッチ数列の分数列

定理 1. フィボナッチ数列から作られる分数列

$$Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

は、 n を限りなく大きくすると、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に近づく。

(証明) n が限りなく大きいときの Q_n を Q_∞ とする。 Q_∞ の値が確定することの証明は、高専生の低学年の知識では難しいので、このことは認めることにする。 $Q_\infty = x$ とする。漸化式 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ の両辺を F_{n-1} で割ると、

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

つまり、

$$Q_n = 1 + \frac{1}{Q_{n-1}}$$

となる。 n を限りなく大きくすると、

$$Q_\infty = 1 + \frac{1}{Q_\infty} \quad \text{より} \quad x = 1 + \frac{1}{x}$$

であるので、

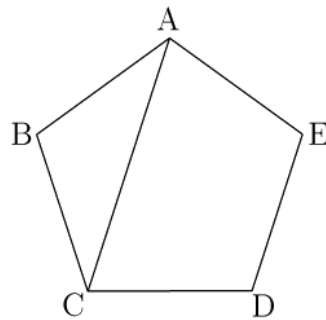
$$x^2 = x + 1$$

を得る。したがって、

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

を得る．（証明終）

（注意） $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を**黄金数**または**黄金比**という．正五角形ABCDEの一边の長さを1としたときの対角線ACの長さが黄金数である．



1.2 フィボナッチ数列の周期性

例えば，フィボナッチ数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

を，2で割ったときの余りで表示すると，

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots \pmod{2}$$

となる． $\pmod{2}$ は2で割ったときの余りで表すという意味の記号であり，上の数列は**2を法としたフィボナッチ数列**という．

3を法としたフィボナッチ数列は，

$$1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, \dots \pmod{3}$$

となる．

定理 2. m を正の整数とする．このとき， m を法としたフィボナッチ数列は周期性をもつ．

定理 1 の証明は，鳩ノ巣原理を用いる．

鳩ノ巣原理： m 個の鳩ノ巣に対して， n 羽の鳩が巣に入っているとき， $n > m$ であれば，少なくとも1つの巣に2羽以上の鳩が入っている．

(定理 1 の証明) G_n を, m を法としたフィボナッチ数列とすると,

$$G_n = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

である. そこで,

$$(G_0, G_1), (G_1, G_2), (G_2, G_3), \dots, (G_{m^2}, G_{m^2+1})$$

という $m^2 + 1$ 組を考える. (G_i, G_{i+1}) の取り得る場合の数 (鳩ノ巣の数) は, 高々 m^2 個である. したがって, 鳩ノ巣原理より, $m^2 + 1$ 組の中に, 同じ組 (鳩) が存在するので, それを

$$(G_i, G_{i+1}) = (G_j, G_{j+1})$$

とする. $G_i = G_{i-1} + G_{i-2}$ で, $G_i = G_j, G_{i+1} = G_{j+1}$ であつたので,

$$G_{i+2} = G_{j+2}$$

となる. 以後も $G_{i+3} = G_{j+3}, G_{i+4} = G_{j+4}, \dots$ となるので G_n は周期性をもつ. (証明終)

第 2 章 パスカル三角形

2.1 パスカル三角形

最初に 1 を考え, それを 0 段目とする. 次の 1 段目は 1 と 1, 2 段目は 1 段目の隣り合う数の和を, つまり, 1 と 2 と 1 を並べる. 3 段目は 2 段目の隣り合う数の和を, つまり, 1 と 3 と 3 と 1 を並べる. 同様にして 3 段目以降も前の段の隣り合う数の和を並べる. このようにして作られた数の三角形を **パスカル三角形** という.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

パスカル三角形

(注意) パスカル三角形を上から見ていくと, 4 段目までは,

$$11^0 = 1, \quad 11^1 = 11, \quad 11^2 = 121, \quad 11^3 = 1331, \quad 11^4 = 14641$$

となっている.

問題 1. $11^5 = 161051$ であり、パスカル三角形の 5 段目は

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

であるが、この表示の違いはどのように解釈できるか？

定理 3. パスカル三角形の n 段目の数列は、 $(x+1)^n$ を

$$(x+1)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

と、展開したとき、 x^k の係数 a_k は ${}_n C_k$ である。ここで、 ${}_n C_k$ は、異なる n 個のある物の中から k 個を選ぶ場合の数を表す記号で、コンビネーションと呼ばれる。

(証明) 例えば、 $(x+1)^4 = (x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$ であるが、 x と 1 が入っている袋が 4 つあると考えると、 $n = 4$ 個の袋から、 k 個の x を取り出す袋を選ぶ場合の数 ${}_4 C_k$ が、 x^k の係数 a_k となることがわかる。

一般に、 $(x+1)^n = (x+1) \cdots (x+1)$ の場合においても、 x と 1 が入っている袋が n 袋あると考えると、 n 個の袋から、 k 個の x を取り出す袋を選ぶ場合の数 ${}_n C_k$ が、 x^k の係数 a_k となることがわかる。(証明終)

(注意) 電卓を用いて、定理 3 を確認しておこう。

定理 3 によって、パスカル三角形は、コンビネーション ${}_n C_k$ を用いて、以下のように表されることがわかった。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & {}_0 C_0 & & & \\ & & & & {}_1 C_0 & {}_1 C_1 & & \\ & & & & {}_2 C_0 & {}_2 C_1 & {}_2 C_2 & \\ & & & & {}_3 C_0 & {}_3 C_1 & {}_3 C_2 & {}_3 C_3 \\ & & & & {}_4 C_0 & {}_4 C_1 & {}_4 C_2 & {}_4 C_3 & {}_4 C_4 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

コンビネーション ${}_n C_k$ を用いたパスカル三角形

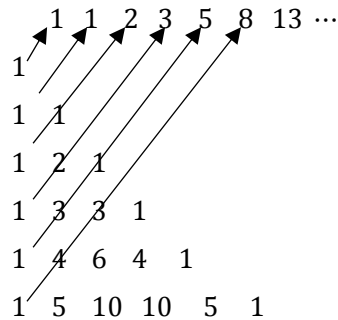
そして、パスカル三角形の作り方から、以下の公式を得る。

公式 (コンビネーション)

$${}_n C_k + {}_n C_{k+1} = {}_{n+1} C_{k+1}$$

2.3 パスカル三角形とフィボナッチ数列の関係

左側に寄せたパスカル三角形を考える．そして下の図のように，右斜めの線上にある数の合計を右方向に並べていく．



定理 4. 左側に寄せたパスカル三角形の斜めの和から作られる数列は，フィボナッチ数列である．

(証明) パスカル三角形を，上から 0 段，1 段，2 段・・・，左から 0 列，1 列，2 列，・・・と定める．そうすると，第 n 番目の斜めの和 S_n と S_{n+1} と S_{n+2} は，

$$S_n = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \cdots + {}_{n-n}C_n$$

$$S_{n+1} = {}_{n+1}C_0 + {}_nC_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-n}C_n$$

$$S_{n+2} = {}_{n+2}C_0 + {}_{n+1}C_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_{n-n}C_n$$

と表される．したがって，公式 (コンビネーション) より，

$$\begin{aligned} S_n + S_{n+1} &= ({}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \cdots + {}_{n-n}C_n) + ({}_{n+1}C_0 + {}_nC_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-n}C_{n+1}) \\ &= {}_{n+2}C_0 + ({}_nC_0 + {}_nC_1) + ({}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2) + ({}_{n-2}C_2 + {}_{n-2}C_3) + \cdots + ({}_{n-n}C_n + {}_{n-n}C_{n+1}) \\ &= {}_{n+2}C_0 + {}_{n+1}C_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_{n-n}C_n = S_{n+2} \end{aligned}$$

(証明終)

問題 2. パスカル三角形は， $(x+1)^n$ の展開係数を並べたものであった．そして，パスカル三角形を斜めに足した和から，フィボナッチ数列が表れた．では，パスカル三角形と黄金数の関係はどうなっているか．

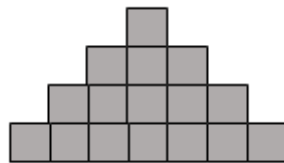
第3章 数列に関する7つの研究テーマ

【テーマ1】 パスカルの三角形は、 11^n から作られる数の三角形と考えられる．自分の好きな数 a を決めて、 a^n から作られる数の三角形を作って研究せよ．

【テーマ2】 奇数の数列を考えると、

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$$

である．これはキューブから平面的なピラミッドを作った時の数列と見ることができる．



この考え方を広げて、立体的なピラミッドを作ったときのキューブの数列を

$$a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = ?, \dots$$

とする．そこから、以下のような数の三角形を作って、その数表を研究せよ．

1						
1	1					
1	3	$a_0 = 1$				
1	5	$a_1 = 5$	$b_0 = 1$			
1	7	$a_2 = ?$	$b_1 = 7$	$c_0 = 1$		
1	9	$a_2 = ?$	$b_2 = ?$	$c_1 = 9$	1	
1	11	$a_2 = ?$	$b_3 = ?$	$c_2 = ?$	11	1

*つまり、パスカルの三角形の第1列を奇数の数列にしたときのもので、ある種の法則から左右に対称性をもつ三角形を作って、研究することになるだろう．

【テーマ3】 インドの数学者カプレカーは、以下のようなことに気がついた．

$$9^2 = 81 \rightarrow 8 + 1 = 9$$

$$99^2 = 9801 \rightarrow 98 + 1 = 99$$

$$999^2 = 998001 \rightarrow 998 + 1 = 999$$

$$9999^2 = 99980001 \rightarrow 9998 + 1 = 9999$$

これと同じような性質を持つ数をカプレカー数と呼ぶ．それらは例えば、

$$45^2 = 2025 \rightarrow 20 + 25 = 45$$

$$55^2 = 3025 \rightarrow 30 + 25 = 35$$

$$297^2 = 88209 \rightarrow 88 + 209 = 297$$

$$703^2 = 494209 \rightarrow 494 + 209 = 703$$

などがあり，カプレカー数の数列として，

$$1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 4879, 4950, 5050, 5292, \dots$$

が得られている．

それでは， a^2 を分解して，カプレカー数に似ているが少し性質が異なる数を定義して，その数の研究を行なえ．例えば，

$$4^2 = 16$$

$$34^2 = 1156$$

$$334^2 = 111556$$

$$3334^2 = 11115556$$

などは，どうだろうか．

【テーマ4】 p を2でも5でもない素数とする．このとき $\frac{1}{p}$ は循環小数に展開される．そして，たとえば $\frac{1}{7}$ は

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857 \dots$$

であり，循環節は142857である．さらにこの循環節は

$$142857 \rightarrow 142 + 857 = 999$$

という性質をもつ．これをヒントに， $\frac{1}{p}$ の循環小数の研究を行なえ．

【テーマ5】 ある正の数 n を考え，もし n が偶数なら2で割り，奇数なら $3n + 1$ とする．この操作をコラッツ操作という．コラッツ予想とは，「どんな数もコラッツ操作を繰り返すことで，必ず1にすることができる」というものである．たとえば，

$$35 \rightarrow 106 \rightarrow 53 \rightarrow 160 \rightarrow 80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

である．コラッツ操作ではない新しい操作を定義して，それに関する研究を行なえ．

[テーマ6] 2桁の数 ab を考え、 $a > b$ とする．そして、 $ab - ba$ を求める．これを反転引き算と呼ぶことにする．そこで、2桁の数の反転引き算を繰り返してみる．例えば、

$$53 - 35 = 18, \quad 81 - 18 = 63, \quad 63 - 36 = 27, \quad 72 - 27 = 45,$$

$$54 - 45 = 09, \quad 90 - 09 = 18$$

となり、途中に表れた81に戻り、ループする．果たしてどんな2桁の数も反転引き算を繰り返してループするのだろうか．このことを研究し、さらに、3桁の数の反転引き算ならどのような現象が起こるのかを研究せよ．

[テーマ7] ピタゴラス数とは、 $a^2 + b^2 = c^2$ をみたす自然数の組 (a, b, c) のことで、底辺の長さが a 、高さが b 、斜辺の長さが c をもつ直角三角形も意味する．ピタゴラス数を求めるには、 s, t ($s > t$)を好きな自然数とすると、公式

$$a = s^2 - t^2, \quad b = 2st, \quad c = s^2 + t^2$$

により、無数のピタゴラス数が得られる．例えば、 $s = 3, t = 2$ とすると、

$$a = 3^2 - 2^2 = 5, \quad b = 2 \times 3 \times 2 = 12, \quad c = 3^2 + 2^2 = 13$$

より、ピタゴラス数 $(5, 12, 13)$ が得られるのである．

ところで、 $c - b = 1$ となるピタゴラス数は、

$$3^2 = 9 = 4 + 5 \rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$5^2 = 25 = 12 + 13 \rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$7^2 = 49 = 24 + 25 \rightarrow 7^2 + 24^2 = 25^2$$

として得られることが知られている．

これに対して、

$$8^2 + 6^2 = 10^2, \quad 12^2 + 16^2 = 20^2$$

などは $c - b = 4$ となるピタゴラス数である． $c - b = 4$ となるピタゴラス数を研究せよ．

また、

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 20^2 + 21^2 = 29^2$$

などは $|a - b| = 1$ となるピタゴラス数である． $|a - b| = 1$ となるピタゴラス数を研究せよ．

その他、自分が面白いと思えた特長あるピタゴラス数を研究せよ．