

二次無理数の連分数展開の研究

二次無理数の連分数展開の研究を行なうために、まず、ある程度の基礎知識を確認する。その後、いくつかの研究テーマを列挙するので、それらのテーマを参考にして、二次無理数の連分数展開を研究しよう。

第1章 有理数と連分数

有理数とは、整数および分数のことをさす。既約分数とは、分子と分母の最大公約数が1である分数のことをいう。

1. 連分数

例えば、 $\frac{3}{8}$ は、

$$\frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

と書くことができる。これを $\frac{3}{8}$ の**正則連分数展開**という。一般に

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots}}}$$

と書かれたものを**連分数**といい、特に、 $b_0 = b_1 = \dots = 1$ であるものが、**正則連分数**である。

正則連分数を

$$[a_0, a_1, a_2, \dots]$$

と略記する。この記号を使うと、

$$\frac{3}{8} = [0, 2, 1, 1, 1]$$

となる。

ある実 ω を任意の実数とし、 ω が整数でないときには、 ω よりも小さい整数のうち最大のものを、 a_0 として($a_0 < \omega < a_0 + 1$),

$$\omega = a_0 + \frac{1}{\omega_1}$$

と置けば、 $\omega_1 > 1$ となる。 ω_1 が整数でなければ、 ω_1 よりも小さい整数のうち最大のものを、

a_1 として($a_1 < \omega_1 < a_1 + 1$),

$$\omega_1 = a_1 + \frac{1}{\omega_2}$$

と置けば, $\omega_2 > 1$ となる. これを繰り返すことで,

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

という ω の正則連分数展開が得られる.

定理 1 ある数 q が有理数であることの必要十分条件は, q が有限正則連分数展開できることである. 特に $q = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, 1]$ とできる.

例題 1 $\frac{2}{5}$ の正則連分数展開を求めよ.

解答 $\frac{2}{5} = 0.4$ であるので, $a_0 = 0$ である. $\frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$ より, $a_1 = 2$ である. $\frac{1}{2.5-2} = 2$ より,

$a_2 = 2$ である. したがって,

$$\frac{2}{5} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [0, 2, 2], \quad \text{または} \quad \frac{2}{5} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = [0, 2, 1, 1]$$

となる. (解答終)

関数電卓の使い方 $\frac{2}{5}$ の正則連分数展開を, 関数電卓を使って確かめよう!

関数電卓のボタン $\boxed{a/b}$ を押して $\frac{2}{5}$ を入力すると, “ $\frac{2}{5}$ ” が表示されるので, さらにボタン $\boxed{\text{chang}}$ を押すことで, 0.4 が表示される. つまり, $\frac{2}{5}$ の正則連分数の最初の数字は0を意味する. つぎに, 0.4の逆数を求めるには, ボタン $\boxed{x^2}$ のうえに x^{-1} の機能があるので, それを実行するために, ボタン $\boxed{2\text{ndF}}$ の後に $\boxed{x^2}$ 押して $\boxed{=}$ を押すと, “ $2\frac{1}{2}$ ” が表示されるのでボタン $\boxed{\text{chang}}$ を押して, “2.5” を表示させる. これで, $\frac{2}{5}$ の正則連分数が $[0, 2, \dots]$ となることがわかった. つぎに $\boxed{-} \ 2 \ \boxed{=}$ とすると, “ $\frac{1}{2}$ ” が表示されるので, これの逆数を求めるために, ボタン $\boxed{2\text{ndF}}$ の後に $\boxed{x^2}$ 押して $\boxed{=}$ を押すと, “2” が表示される. 以上によって, $\frac{2}{5}$ の正則連分数が $[0, 2, 2]$ であることがわかった.

定理 2 有理数は二通りの正則連分数展開をもつ.

問題 3 以下の分数

$$\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$$

の正則連分数展開を全て求めよ.

問題 4 次の正則連分数展開となる有理数を求めよ.

- (1) $[1, 1, 1]$ (2) $[1, 1, 1, 1]$ (3) $[1, 1, 1, 1, 1]$ (4) $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$ (5) $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$

第 2 章 二次無理数と連分数

整数係数の二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) は $D = b^2 - 4ac$ が $D > 0$ かつ D は平方数でないとする. このとき, $ax^2 + bx + c = 0$ の根を **二次無理数** という.

さらに, $ax^2 + bx + c = 0$ の一つの解を ω とし, もう一つの解を ω' とするとき, ω' を ω の共役解という.

定理 3 無理数はただ一通りの正則連分数展開をもつ.

定理 4 (ラグランジュ) ω が二次無理数であることの必要十分条件は, ω の正則連分数展開が途中から循環することである.

例題 2 $\sqrt{2}$ の正則連分数展開を求めよ.

解答 $\sqrt{2} = 1.414 \dots$ より, $a_0 = 1$ である. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2.414 \dots$ より, $a_1 = 2$ である.

$\frac{1}{x_1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2.414 \dots$ より, $a_2 = 2$ である. したがって,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}} = [1, \bar{2}]$$

である. (解答終)

定理 5 (ガロア) ω の正則連分数展開が初項から巡回することの必要十分条件は, ω が二次無理数で $\omega > 1$ かつ $-1 < \omega' < 0$ が成り立つことである.

例題 3 $x^2 + x + 1 = 0$ の正の解 ω の正則連分数展開を求めよ.

解答 $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり,

$$\omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} = [\bar{1}]$$

(解答終)

定理 6 (ガロア) $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_r}]$ が二次無理数で $\omega > 1$ かつ $-1 < \omega' < 0$ が成り立つとき,

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_r, a_{r-1}, \dots, a_1}]$$

となる.

例題 4 $7x^2 - 8x - 3 = 0$ の正の解 ω の正則連分数展開と $-\frac{1}{\omega'}$ の正則連分数展開を求めよ.

解答 $\omega = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$ であり,

$$\omega = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}} = [\overline{1, 2, 3}]$$

$\omega' = \frac{4-\sqrt{37}}{7}$ であり,

$$-\frac{1}{\omega'} = \frac{7}{-4 + \sqrt{37}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} = [\overline{3, 2, 1}]$$

(解答終)

問題 5 $2x^2 - 5x - 2 = 0$ の正の解 ω の正則連分数展開を求めよ.

問題 6 次の二次無理数の正則連分数展開を求めよ.

(1) $\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{31}$ (3) $\sqrt{58}$

第3章 二次無理数に関する10個の研究テーマ

以下から，自分が行ないたい研究テーマを決めて研究し，面白いことを発見せよ．

[テーマ1] D を決め， $k = 1, 2, 3, \dots$ として，

$$\frac{1 + \sqrt{D}}{k}$$

の正則連分数の研究

[テーマ2] D を決め， $k = 1, 2, 3, \dots$ として， $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{k}}$ の正則連分数の研究

[テーマ3] $k = 1, 2, 3, \dots$ として，

$$\frac{1}{1 + \sqrt{k}}$$

の正則連分数の研究

[テーマ4] $k = 2, 3, \dots$ として， $\omega = [n, \overline{kn}]$ となる ω の研究

[テーマ5] $k = 1, 2, 3, \dots$ として， $\omega = [\overline{1, 2, 3, \dots, k}]$ となる ω の研究

[テーマ6] $k = 2, 4, 6, \dots$ として， $\omega = [\overline{2, 4, 6, \dots, k}]$ となる ω の研究

[テーマ7] $k = 1, 3, 5, \dots$ として， $\omega = [\overline{1, 3, 5, \dots, k}]$ となる ω の研究

[テーマ8] $k = 1, 2, 3, \dots$ として， $\omega = [\overline{k, -k}]$ となる ω の研究

[テーマ9] $k = 1, -2, 3, -4, \dots$ として， $\omega = [\overline{1, -2, 3, -4, \dots, k}]$ となる ω の研究

[テーマ10]

$$a_0 + \frac{n}{a_1 + \frac{n}{a_2 + \frac{n}{\ddots}}} = [a_0, a_1, a_2, \dots]^n$$

とする． $n > 1$ を決め， $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ として， $\omega = [\overline{k}]^n$ となる ω の研究

＜参考＞ ガロアについて

エヴァリスト・ガロアは、1811 年 10 月 25 日パリの郊外のブル・ラ・レーヌで生まれ、1832 年 5 月 31 日にパリで亡くなった。20 年の生涯であった。1832 年 5 月 30 日午前、ガロアは、グラシエールの池の端に倒れており、そこを通りかかった農民（一説によれば退役軍人）によって、コシャン病院に運ばれ、銃創の治療を受けたが翌日なくなったのである。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解の公式は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

である。これは古代バビロニアで得られていたという。3 次、4 次の方程式の解の公式は、16 世紀のイタリアで、カルダノやフェラーリといった数学者達によって発見されたといわれている。そして「5 次方程式には解の公式が存在しない」という定理がアーベルによって証明され、さらに「5 次以上の方程式には解の公式が存在しない」という定理を証明したのが、ガロアであった。彼は群論と体論という新しい理論を構築し、それを使ってこの定理を証明したのである。

このテキストで紹介したガロアの名前がついた定理は、1829 年 4 月、ガロア 17 歳のときの処女作「循環連分数に関する一定理の証明」という研究から得られたものである。