

代数学ミニシンポジウム 2019 (倉敷)

報告集

高専代数学研究会編

(世話役：松田修)

2020 年 3 月

はじめに

本論文集は、2019 年 9 月に倉敷市民会館で開催した代数学ミニシンポジウム 2019(倉敷)の講演の記録と関連論文をまとめたものです。有志のご協力をいただきこのような報告集を出すことができました。記して感謝を申し上げます。なお、都合により参加できなかった稲垣佑都の「ガロア群 A_5 をもつ 5 次方程式」の論文も最後に掲載しました。

また、本シンポジウムの開催にあたり、本研究集会は、科研費基盤研究(C)、課題番号 19K02746「数理・データサイエンス教育のためのデータ分析を訓練する数学教材の開発」(代表：松田修)の援助を受けました。

2020 年 3 月 松田修

代数学ミニシンポジウム 2019 (倉敷)

日時：2019 年 9 月 5 日 (木) ～9 月 6 日 (金)

場所：倉敷市民会館，第 3 会議室

世話人：松田修

本研究集会は，科研費基盤研究(C)，課題番号 19K02746「数理・データサイエンス教育のためのデータ分析を訓練する数学教材の開発」(代表：松田修)の援助を受けて開催します。

9 月 5 日 (木)

10:30-12:00

ルーロー空間とフーリエ変換，加田紘大 (津山高専 4 年)

巡回群と同型なグラフの曲面への埋め込みについて，圓山夏生 (津山高専 4 年)

コラッツ予想から考えた新しい予想，草加 修宏 (津山高専 2 年)

SageMath と A5 の群をもつ 5 次方程式について，松田 修 (津山高専)

14:00-15:00

有理曲面の平面曲線束のモデル・ヴェイユ群，北川真也 (岐阜高専)

15:15-16:15

射影空間の直積における点のブローアップによって得られる対数的ファノ構造について，
月岡 透 (東海大学)

16:30-17:30

Litaka-Viehweg Conjecture and Riemann Conjecture，前原和寿

9 月 6 日 (金)

10:00-11:00

友愛数の平行移動，飯高茂

目次

3 項完全数と惑星間移住計画 (飯高茂)	1
Itaka-Viehweg Conjecture and Riemann Conjecture (前原和寿)	19
ルーロー模様のフーリエ変換 (加田紘大)	40
二面体群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込み (圓山夏生)	63
コラッツ問題と Λ コラッツ問題 (草加修宏)	80
ガロア群 A_5 をもつ 5 次方程式 (稲垣佑都)	93

3 項完全数 と 惑星間移住計画

飯高 茂

2020 年 3 月 17 日

1 3 項完全数の導入

与えられた e, m に対して, $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定する.

$\alpha' = 2^e q$ は $\sigma(\alpha') = 2\alpha' - m$ を満たし, 平行移動 m の狭義の完全数と呼ばれる.

それに対して, $\sigma(\alpha') = 2\alpha' - m$ を満たす数 α' を平行移動 m の広義の完全数というのが略して単に平行移動 m の完全数ともいう.

さて, $\alpha = 2^{e+1}q$ は完全数の 2 倍だが, どんな方程式を満たすことになるだろうか.

$N_0 = 2^{e+2} - 1$ とおくとき, $q = 2^{e+1} - 1 + m = \frac{N_0 - 1}{2} + m$. よって $N_0 = 2(q - m) + 1$.

$\sigma(\alpha) = N_0 * (q + 1) = N_0 q + N_0 = 2\alpha - q + N_0 = 2\alpha - q + 2(q - m) + 1$ を満たす.

よって $\sigma(\alpha) = 2\alpha + q + 1 - 2m$.

これだけでは先へ進まないで,

$2\varphi(\alpha) = 2^{e+1}(q - 1) = \alpha - 2^{e+1} = \alpha - q + m - 1$ を用いて $\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) = 3\alpha - m$.

さて $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$ を用いると $\Psi_{2,3}(\alpha) = \sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha = -m$ となる.

定義 1 与えられた m に対して, $\Psi_{2,3}(a) = -m$ を満たすとき, a を平行移動 m の $(2,3)$ 型 3 項完全数という.

1.1 例

$a = p$ が素数の場合は $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = p + 1 + 2(p - 1) - 3p = -1$ になるので素数 p は 平行移動 1 の $(2,3)$ 型 3 項完全数になる.

素数べきの場合, $a = p^e$ なら $\bar{p} = p - 1$ を用いると

$$\bar{p}\Psi_{2,3}(p^e) = (p^{e+1} - 1) + 2p^{e-1}(p - 1)^2 - 3p^e(p - 1) = (2 - p)p^{e-1} - 1 = (1 - p)p^{e-1} - 1 + p^{e-1}.$$

とくに $p = 2$ のとき, $\Psi_{2,3}(2^e) = -2^{e-1} + \sigma(2^{e-2}) = -1$.

とくに $e = 2$ のとき, $\Psi_{2,3}(p^2) = -p + 1$.

$p = 3$ のとき $\Psi_{2,3}(3^2) = -2$.

一般には $\bar{p}\Psi_{2,3}(p^e) = (1 - p)p^{e-1} + p^{e-1} - 1 = -\bar{p}p^{e-1} + \bar{p}\sigma(p^{e-2})$ になるので

$$\Psi_{2,3}(p^e) = -p^{e-1} + \sigma(p^{e-2}).$$

a が素数 p , または 2^e なら $\Psi_{2,3}(a) = -1$.

これは注目すべき結果であるが, この逆は, $\Psi_{2,3}(a) = -1$ なら a が素数, または 2^e となる.

これが成立するかどうかはわからない. 大難問と言えるだろう.

$a = pq$, (p, q が相異なる素数) の場合は $B = pq, \Delta = p + q$ とおけば

$\sigma(a) = B + \Delta + 1, 2\varphi(a) = 2(B - \Delta + 1), -3a = -3B$ により

$\Psi_{2,3}(pq) = B + \Delta + 1 + 2(B - \Delta + 1) - 3B = 3 - \Delta = -m$ とおくと $3 + m = \Delta = p + q$.

m が正の奇数なら $3 + m$ は偶数で $3 + m = p + q$. これは $3 + m$ を 2 個の奇素数 p, q の和で表すことを意味する.

8 以上の偶数を 2 個の相異なる奇素数 p, q の和で表すことが常に可能である, というのが Goldbach の予想であり成立することは確実と思われるのだが証明ができていない.

1.2 m : 奇数の計算例

表 1: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = 13$	$m + 3 = 16$
39	$3 * 13$
55	$5 * 11$
63	$3^2 * 7$
$m = 15$	$m + 3 = 18$
65	$5 * 13$
77	$7 * 11$
162	$2 * 3^4$
$m = 17$	$m + 3 = 20$
50	$2 * 5^2$
51	$3 * 17$
91	$7 * 13$

表 2: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = 19$	$m + 3 = 22$
57	$3 * 19$
85	$5 * 17$
125	5^3
$m = 21$	$m + 3 = 24$
95	$5 * 19$
119	$7 * 17$
143	$11 * 13$
75	$3 * 5^2$
99	$3^2 * 11$
135	$3^3 * 5$
196	$2^2 * 7^2$
32175	$3^2 * 5^2 * 11 * 13$
$m = 23$	$m + 3 = 26$
69	$3 * 23$
133	$7 * 19$
$m = 25$	$m + 3 = 28$
115	$5 * 23$
187	$11 * 17$
117	$3^2 * 13$
$m = 27$	$m + 3 = 30$
161	$7 * 23$
209	$11 * 19$
221	$13 * 17$
105	$3 * 5 * 7$
2178	$2 * 3^2 * 11^2$
3465	$3^2 * 5 * 7 * 11$

表 3: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = 29$	$m + 3 = 32$
87	$3 * 29$
247	$13 * 19$
968	$2^3 * 11^2$
$m = 31$	$m + 3 = 34$
93	$3 * 31$
145	$5 * 29$
253	$11 * 23$
189	$3^3 * 7$
$m = 33$	$m + 3 = 36$
155	$5 * 31$
203	$7 * 29$
299	$13 * 23$
323	$17 * 19$
153	$3^2 * 17$
315	$3^2 * 5 * 7$
2500	$2^2 * 5^4$

1.3 m : 偶数の計算例

表 4: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = -4$	
24	$2^3 * 3$
176	$2^4 * 11$
3776	$2^6 * 59$
64256	$2^8 * 251$
220	$2^2 * 5 * 11$
40528	$2^4 * 17 * 149$
$m = -2$	
40	$2^3 * 5$
208	$2^4 * 13$
928	$2^5 * 29$
3904	$2^6 * 61$
150	$2 * 3 * 5^2$

A 型解, D 型解はそこそこあるが次に示す $m = 2$ のときの解は異常に面白い.

2 $\Psi_{2,3}(a) = -2$ の解

ただし $a < 10^6$ の範囲に限りて計算し, 解を揃え直してみた.

表 5: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
9	3^2
20	$2^2 * 5$ (フェルマー完全数の 2 倍)
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
42961272832	$2^{16} * 655537$

第 3 ブロックの解は A 型解 $2^{e+1}q$, $q = 2^{e+1} + 1$ で q はフェルマ素数.

第1ブロックの解は2から始まり順次素数が掛けられた数が解になるというのはなほだ美しい解の構造を持っている.

この性質を利用して解の構造を究明したい.

数 α が $\Psi_{2,3}(\alpha) = -2$ を満たすとき, それと互いに素な素数 p との積 $\beta = \alpha p$ も $\Psi_{2,3}(\beta) = -2$ を満たすとする.

$$\begin{aligned}
\Psi_{2,3}(\beta) &= \sigma(\beta) + 2\varphi(\beta) - 3\beta \\
&= \sigma(\alpha)(p+1) + 2\varphi(\alpha)(p-1) - 3\alpha p \\
&= (\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha)p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) \\
&= -2p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

ここで $\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha = -2$ より $-2p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) = -2$.
 $\sigma(\alpha) = -2\varphi(\alpha) + 3\alpha - 2$ なのでこれを代入し

$$-2p + 3\alpha - 4\varphi(\alpha) = 0.$$

関数 $f(a) = 3 * a - 4\varphi(a)$ を導入すると

$$2p = f(\alpha).$$

2.1 計算開始

$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$ の解として $\alpha = 6$ があるのは明らかなのでこれから始める.

$\alpha = 6$ とおく. すると $2p = f(6) = 3 * 6 - 4\varphi(6) = 18 - 8 = 10$. 2 で割って, $p = 5$; これは素数. よって $\beta = 6 * 5$ は解.

次に $\alpha = 6 * 5$ とおく. $2p = f(30) = 3 * 30 - 4\varphi(30) = 90 - 4 * 8 = 58$. よって, $p = 29$; 素数. よって $\beta = 6 * 5 * 29$ は解.

$\alpha = 870 = 2 * 3 * 5 * 29$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1714 = 2 * 857$. よって, $p = 857$; これも素数.(うれしい)

$\alpha = 745590 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1469794 = 2 * 734897$. よって, $p = 734897$; 素数. よって $\beta = 6 * 5 * 29 * 857 * 734897$ は解.

$\alpha = 547931854230 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1080147968194 = 2 * 540073984097$.

$p = 540073984097$ が素数とは驚いた.

よって $\beta = 6 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$ は解

ついに来るときが来たらしいが同様に $\alpha = 295923739527652742180310 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$ とおくとき

$f(\alpha) = 583359816597376865405314 = 2 * 324589 * 898613040795247013$. よって, $f(\alpha)/2 = 324589 * 898613040795247013$ は素数ではない. したがってここで解の探求は終わる.

以上を表にまとめる.
 $\alpha = f(a)$ についての表

a	素因数分解	$\varphi(a)$	α	素因数分解
6	$2 * 3$	2	10	$2 * 5$
30	$2 * 3 * 5$	8	58	$2 * 29$
870	$2 * 3 * 5 * 29$	224	1714	$2 * 857$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$	191744	1469794	$2 * 734897$
547931854230	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$	140911898624	X	Y
A	B	C	D	E

$$X = 1080147968194$$

$$Y = 2 * 540073984097$$

$$A = 295923739527652742180310$$

$$B = 2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$$

$$C = 76102850496395340283904$$

$$D = 583359816597376865405314$$

$$E = 2 * 324589 * 898613040795247013$$

$E/2$ は素数では無いのでここで解の列は終わる.



図 1: 6 素数のシンボルキャラクター; By Jun Iitaka

$m = 2$ の解の表をまとめて眺めよう.

表 6: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
547931854230	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$
295923739527652742180310	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$

2 に続いて特殊な意味を持つ素数が 6 個も続くのは大いなる不思議というべきである. これを 6 素数の奇跡と呼んでみたい. 3 項完全数はこのような奇妙な素数列の発見につながったのだから本質的に意義のある概念と言って良いだろう.

ここに私の生年月日である 1942 年 5 月 29 日のうちの月と日が出たことに大きな感動を覚える. これを見つけたのは 2019 年の 7 月のある日のことだが, 不慮の事故に出会うことを本気に心配した. 論文や雑誌の原稿に書かないで死ぬわけにはいかないと思ったのである.

3 フェルマ素数の積

同じように特別な素数の集合があり順次掛けるとある方程式の解になることはかつて私も経験した.

注意 1 $a = 2\varphi(a) - 1$ の解に $3, 3*5, 3*5*17, 3*5*17*257, 3*5*17*257*65537$ とフェルマ素数の積で書けるものが 5 個あった.

$2\varphi(a) - a = 1$ を満たすとき $a' = ap$ とおき ($a < p$ となる素数 p) $2\varphi(a') - a' = N$ としてみる.

$2\varphi(a') = 2\varphi(a)(p-1) = a' + N$ に $2\varphi(a) = a + 1$ を代入すると

$$2\varphi(a') = (a+1)(p-1) = a' - a + p - 1 = a' + N$$

から $p = a + N + 1$.

したがって解 a に $N + 1$ を加えた $p = a + N + 1$ が素数なら $2\varphi(a') - a' = N$ を満たす解 $a' = pa$ がえられる.

$N = 1$ とする. $p = a + N + 1 = a + 2$ なので, 解 a に対し $p = a + 2$ が素数なら次なる解ができ巧くいけば次々に解がでてくる.

$2\varphi(a) - a = 1$ の一番小さい解 $a = 3$ からはじめる.

最後の $a = 3 * 5 * 17 * 257 * 65537 = 4, 294, 967, 295$ 100 万を大きく超えるので, 表には出ていない.

表 7: $2\varphi(a) - a = 1$, の解

a	$p = a + 2$	$a' = ap$
3	5	$15=3*5$
$3*5$	17	$3*5*17$
$3*5*17$	257	$3*5*17*257$
$3*5*17*257$	65537	$3*5*17*257*65537$

解 $a = 3 * 5 * 17 * 257 * 65537 = 4294967295$ に対して $a + 2 = 4294967297 = 641 * 67004174294967297$ は素数ではない. ここで, 系列は終了する.

$2\varphi(a) - a = 1$ には続きの解がある.

表 8: $2\varphi(a) - a = 1$, 表の追加

a	素因数分解
83623935	$3 * 5 * 17 * 353 * 929$
6992962672132095	$3 * 5 * 17 * 353 * 929 * 83623937$

私はこのような続きの解があることを知らされて大変驚いた.

しかし, $\Psi_{2,3}(a) = -2$ の解はこれ以上ないだろうと思っている.

意欲のある読者は新しい解を発見するか, これ以上解がないことを証明してみたらどうか.

4 惑星間移住計画

平行移動 m_1 の解 a と, それと互いに素な素数 p に対して $a' = ap$ とおきこれが平行移動 m_2 の解 a' になるとしよう.

私の頭の中は, m_1 という惑星の住人 a が素数 p を得て a' となり m_2 という惑星に移住するという空想で満ちている.

定義により $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m_1$, $\Psi_{2,3}(a') = \sigma(a') + 2\varphi(a') - 3a' = -m_2$ を満たす.

$$\begin{aligned} -m_2 &= \Psi_{2,3}(a') = \sigma(a') + 2\varphi(a') - 3a' \\ &= \sigma(a)(p+1) + 2\varphi(a)(p-1) - 3ap \\ &= (\sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a)p + \sigma(a) - 2\varphi(a) \\ &= -m_1p + \sigma(a) - 2\varphi(a). \end{aligned}$$

これより

$$-m_2 = -m_1p + \sigma(a) - 2\varphi(a).$$

$\sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m_1$ により $\sigma(a) = -2\varphi(a) + 3a - m_1$.

$-m_2 = -m_1p + \sigma(a) - 2\varphi(a)$ に代入し

$$-m_2 = -m_1p + 3a - m_1 - 4\varphi(a).$$

関数 $f(a) = 3 * a - 4\varphi(a)$ を導入すると $-m_2 = -m_1p - m_1 + f(a)$.

かくして

$$m_2 = m_1(1+p) - f(a).$$

これが 惑星間移住の方程式である.

5 $m = 2$ は母惑星

$\Psi_{2,3}(a) = -2$ の簡単な解に注目する.

表 9: $\Psi_{2,3}(a) = -2$ の簡単な解

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
9	3^2
20	$2^2 * 5$ (フェルマー完全数の 2 倍)
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
42961272832	$2^{16} * 655537$

$\Psi_{2,3}(a) = -2$ の簡単な解に注目する.

$m_1 = 2, a = 6$ から始める.

惑星間移住の方程式に代入すると, $f(6) = 10$ なので

$$m_2 = m_1(1 + p) - f(a) = 2(1 + p) - 10 = 2(p - 4).$$

1. $p = 5$ なら $m_2 = 2(p - 4) = 2, a' = 6 * 5 = 30$. $m_2 = 2$ なので 母惑星に戻ることに
なる.

2. $p = 7$ なら $m_2 = 2(7 - 4) = 6, a' = 6 * 7 = 42$. これは $m_2 = 6$.

6 $m = 6$ は準母惑星

表 10: $m = 6$ での簡単な解 (準母惑星)

a	素因数分解	$\alpha = f(a)$	$\alpha/6$
49	7^2	-21	
14	$2 * 7$	$2 * 3^2$	3
104	$2^3 * 13$	120	$2^2 * 5$
198	$2 * 3^2 * 11$	$2 * 3 * 59$	59
930	$2 * 3 * 5 * 31$	$1830=6*5*61$	$5*61$
747330	$2 * 3 * 5 * 29 * 859$	$2*3*19*12923$	$19*12923$
1184	$2^5 * 37$	$2^5 * 3 * 13$	$2^4 * 13$
42	$2 * 3 * 7$	78	13
546	$2 * 3 * 7 * 13$	1062	$3*59$
54	$2 * 3^3$	90	$3*5$
11682	$2 * 3^2 * 11 * 59$	$11682=2*3*7*503$	$7*503$

$m_1 = 6$ での 惑星間移住の方程式 $m_2 = 6(1 + p) - f(a)$.

$m_2 = 6$ と仮定する.(準母惑星に戻る場合)

$6p = f(a)$ なので, $\alpha = f(a)$ とおくと $\alpha/6$ が素数 p .

上の表においては,

- i. $a = 14 = 2 * 7$. $p = 3, a' = 2 * 7 * 3 = 42$.
- ii. $a = 198 = 2 * 3^2 * 11$. $p = 59, a' = 11682 = 2 * 3^2 * 11 * 59$.
- iii. $a = 42 = 2 * 3 * 7$. $p = 13, a' = 546 = 2 * 3 * 7 * 13$.

これらのように準母惑星に戻る場合はすでに求められていた. その意味で面白いとはいえない.

$f(a) = 3 * a - 4\varphi(a)$ を用いると $m_2 = m_1(1 + p) - f(a)$ なので $a = 42 = 2 * 3 * 7$ のとき,

$$f(42) = 3 * 42 - 4\varphi(42) = 3 * 42 - 4 * 2 * 6 = 6(3 * 7 - 8) = 78.$$

$$m_2 = 6p + 6 - 78 = 6p - 72 = 6(p - 12).$$

$p = 13$ なら $m_2 = 6(p - 12) = 6$. $m_2 = 6$ での解 $a' = 2 * 3 * 7 * 13$.

$p = 17$ なら $m_2 = 6(p - 12) = 30$. $m_2 = 30$ での解 $a' = 2 * 3 * 7 * 17$.

表 11: $\Psi_{2,3}(a) = -30$ の簡単な解

a	素因数分解
1290	$2 * 3 * 5 * 43$
114	$2 * 3 * 19$
294	$2 * 3 * 7^2$
714	$2 * 3 * 7 * 17$
98826	$2 * 3 * 7 * 13 * 181$
342	$2 * 3^2 * 19$
1026	$2 * 3^3 * 19$
3078	$2 * 3^4 * 19$
9234	$2 * 3^5 * 19$
27702	$2 * 3^6 * 19$
83106	$2 * 3^7 * 19$
249318	$2 * 3^8 * 19$
747954	$2 * 3^9 * 19$
2243862	$2 * 3^{10} * 19$

7 $m = 30$ での解: $a = 2 * 3^e * 19$

$m = 30$ の場合 $a = 2 * 3^e * 19$ という解があることを確認する.

$a = 2 * 3^e * 19$ のとき, $w = 3^{e+1}$ とおく. $\sigma(a) = 2 * 3^e * 19 = 30(w - 1)$, $2\varphi(a) = 4 * 3^{e-1} * 18 = 4w$, $3a = 38w$ により

$$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = 30(w - 1) + 4w - 38w = -30.$$

8 $m = 30$ での解 $a = 714$

$m_1 = 30$ では解 $a = 714 = 2 * 3 * 7 * 17$ がある. これを惑星間移住で $m_2 = 66$ に追いつく仕組みは次の通り.

$$f(714) = 3 * 714 - 4\varphi(714) = 1374 = 2 * 3 * 229.$$

$5 * 47 = 235$ により

$$m_2 = 30(1 + p) - 6 * 229 = 6(5 + 5p - 229) = 6(5p - 224) = 6(5(p - 47) + 11).$$

$p = 47$ とおく.

$$m_2 = 66, a' = 714 * 47 = 2 * 3 * 7 * 17 * 47 = 33558$$

表 12: $\Psi_{2,3}(a) = -66$ の簡単な解

a	素因数分解
134	$2 * 67$
182	$2 * 7 * 13$
190	$2 * 5 * 19$
222	$2 * 3 * 37$
350	$2 * 5^2 * 7$
558	$2 * 3^2 * 31$
584	$2^3 * 73$
966	$2 * 3 * 7 * 23$
1830	$2 * 3 * 5 * 61$
3104	$2^5 * 97$
4489	67^2
24704	$2^7 * 193$
29526	$2 * 3 * 7 * 19 * 37$
33558	$2 * 3 * 7 * 17 * 47$
295424	$2^9 * 577$

$m_2 = 18$ に移住させる

$m_1 = 6$ での 惑星間移住の方程式は $m_2 = 6(1+p) - f(a)$ なので $f(930) = b = 1830 = 2 * 3 * 5 * 61$ により

$$m_2 = 6(1+p - 5 * 61) = 6(p - 304).$$

$p = 307$ とくとき $m_2 = 18$ $a = 42 = 2 * 3 * 7$ について, $a' = 2 * 3 * 5 * 31 * 307 = 285510$.
 $m = 18$ という惑星で安住の地を得た.

表 13: $\Psi_{2,3}(a) = -18$ の簡単な解

a	素因数分解
38	$2 * 19$
70	$2 * 5 * 7$
78	$2 * 3 * 13$
361	19^2
918	$2 * 3^3 * 17$
1110	$2 * 3 * 5 * 37$
12078	$2 * 3^2 * 11 * 61$
60534	$2 * 3^3 * 19 * 59$
81702	$2 * 3^3 * 17 * 89$
97734	$2 * 3 * 7 * 13 * 179$
285510	$2 * 3 * 5 * 31 * 307$

9 母惑星からのエクソダス

母惑星, すなわち $m_1 = 2$ で考える.

表 14: $m_1 = 2$ すなわち母惑星

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
9	3^2
20	$2^2 * 5$ (フェルマー完全数の 2 倍)
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
42961272832	$2^{16} * 655537$

$m_1 = 2$ なので惑星間移住方程式は

$$m_2 = 2(1 + p) - f(a).$$

$a = 3^2 = 9$ のとき.

$$f(9) = 3 * 9 - 4\varphi(9) = 27 - 24 = 3$$

$$m_2 = m_1(1 + p) - f(a) = 2(1 + p) - 3 = 2p - 1.$$

$$p = 5, m_2 = 9, a' = ap = 45.$$

表 15: $\Psi_{2,3}(a) = -9$ の簡単な解

a	素因数分解
35	$5 * 7$
45	$3^2 * 5$
19845	$3^4 * 5 * 7^2$

第 1 ブロックの解は 2 から始まり順次素数が掛けられた数が解になる.

次の数表を使う.

$\alpha = f(a)$ についての表

a	素因数分解	$\varphi(a)$	$\alpha = f(a)$	素因数分解
6	$2 * 3$	2	10	$2 * 5$
30	$2 * 3 * 5$	8	58	$2 * 29$
870	$2 * 3 * 5 * 29$	224	1714	$2 * 857$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$	191744	1469794	$2 * 734897$

i. $a = 30 = 2 * 3 * 5$.

$$m_2 = 2(1 + p) - f(a) = 2p + 2 - 58 = 2(p - 28).$$

$p = 29$ なら, $m_2 = 2$. また母惑星.

$p = 31$ なら, $m_2 = 6$. 準母惑星. $a' = 30 * 31 = 2 * 3 * 5 * 31$

ii. $a = 870 = 2 * 3 * 5 * 29$, $f(a) = 1714 = 2 * 857$.

$$m_2 = 2(1 + p) - f(a) = 2p + 2 - 2 * 857 = 2(p - 856).$$

$p = 857$ なら, $m_2 = 2$. また母惑星.

$p = 859$ なら, $m_2 = 6$. 準母惑星. $a' = 2 * 3 * 5 * 29 * 859$

$p = 863$ なら, $m_2 = 14$, $a' = 2 * 3 * 5 * 29 * 863$

表 16: $\Psi_{2,3}(a) = -14$ の解

a	素因数分解
66	$2 * 3 * 11$
68	$2^2 * 17$
81	3^4
464	$2^4 * 29$
68864	$2^8 * 269$
750810	$2 * 3 * 5 * 29 * 863$

iii. $a = 745590 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857$, $f(a) = 191744 = 2 * 734897 = 2 * 3 * 5 * 29 * 856$.

$$m_2 = 2(1 + p) - f(a) = 2p + 2 - 2 * 734897 = 2(p - 734896).$$

$p = 734897 = 734896 + 1$ は素数なので, $m_2 = 2$. 母惑星に戻る.

Iitaka-Viehweg Conjecture and Riemann Conjecture

Kazuhisa Maehara at Kurashiki

March 17, 2020

Abstract

In this article we recall the theory of the absolute Galois and LGalois groups for the reader's convenience. We give some supplement to the proof of Iitaka-Viehweg conjecture, which equips a proof of extended case characteristic positive. We take an endeavour to prove Riemann conjecture.

This paper is dedicated to professor emeritus Iitaka for celebration of 77 years old. Iitaka-Viehweg Conjecture was his central theme for classification of algebraic varieties. He told the author to solve Riemann Conjecture some 30years ago.

1 LGalois Theory

Let k be a field and Ω_k^s a separably closed extension of k with infinite separant transcendent degree over k . Let K be a separable extension of k in Ω_k^s . Let Γ be the automorphism group of Ω_k^s which consists of all the automorphisms of Ω_k^s fixing k . A transcendent extension separably closed over k is said to be LGalois extension of k and its k -automorphism group LGalois group.

Let $\text{LGal}(\Omega_k^s/k)$ be LGalois group. One equips Ω_k^s with discrete topology and the set $(\Omega_k^s)^{\Omega_k^s}$ of mappings from Ω_k^s to itself with product topology, topology of simple convergence in Ω_k^s .

Let $x_1, \dots, x_n$ be separant transcendent elements over k for Ω_k^s and $k(x_1, \dots, x_n)$ a pure transcendent extension of k . Let Λ be the set of subextension of Ω_k^s such that they are extensions of finite type over k , say, $k(x_1, \dots, x_n)$. For $\sigma \in \Gamma$ and $E \in \Lambda$, $U_E(\sigma)$ denotes the set of $\tau \in \Gamma$ which has the same restriction on E that σ has. Thus $U_E(\sigma)_{E \in \Lambda}$ forms a base of filter of neighborhood of $\sigma \in \Gamma$. Let A be a part of Γ . A is open if and only if for any $\sigma \in A$ there exists an $E \in \Lambda$ such that $U_E(\sigma) \subseteq A$. The algebraic closure $\bar{A}$ of A consists of $\sigma \in \Gamma$ such that for any field $E \in \Lambda$ in the algebraic closure of the A -invariant field $((\Omega_k^s)^A)$ in Ω_k^s , there exists $\tau \in A$ such that $\tau \in U_E(\sigma)$. Hence the invariant fields of A and $\bar{A}$ are to be identified. Note that the algebraic closure of A and the maximal fixed group of $((\Omega_k^s)^A)$ are identical. Let ϵ be the unit of Γ . Let Λ' be the set of LGalois subextension of Ω_k^s of finite type over k . The set Λ' is cofinal in Λ and the family of $(U_E(\epsilon))_{E \in \Lambda'}$ is a base of filter of neighborhood of ϵ in Γ . For $E \in \Lambda'$, the set $U_E(\epsilon)$ is the kernel of the restriction homomorphism $\text{LGal}(\Omega_k^s/k) \rightarrow \text{LGal}(E/k)$:

$$1 \rightarrow U_E(\epsilon) \rightarrow \text{LGal}(\Omega_k^s/k) \rightarrow \text{LGal}(E/k) \rightarrow 1$$

One has $U_E(\sigma) = \sigma U_E(\epsilon) = U_E(\epsilon)\sigma$ for $\sigma \in \Gamma$ and $E \in \Lambda'$. Since $U_E(\epsilon)$ is a normal subgroup of Γ for every $E \in \Lambda'$ and since the family $(U_E(\epsilon))_{E \in \Lambda'}$ is a base of neighborhood of ϵ , the topology of Γ is compatible with the structure of group. In other words, $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1}$ of $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ is continuous. If $\tau \in \cap_{E \in \Lambda} U_E(\sigma)$ and if there exists $x \in \Omega_k^s$ such that $\sigma(x) \neq \tau(x)$, then there exists $E \in \Lambda$ such that $\sigma(x) \neq \tau(x)$ for $x \in E$. Note that we should have defined a concept analogous with quasi-Galois.

Proposition 1.1. $\cap_{E \in \Lambda} U_E(\sigma) = \{\sigma\}$ *The topology is separated.*

Each fibre of the projection of the graph

$$\Gamma \subset (\Omega_k^s)^{\Omega_k^s}$$

is Ω_k^s . If u is adherent to Γ , then for each couple (x, y) of Ω_k^s , there exists $\sigma \in \Gamma$ such that

$$u(x) = \sigma(x) \quad u(y) = \sigma(y) \quad u(x+y) = \sigma(x+y) \quad u(xy) = \sigma(xy)$$

Since σ is a homomorphism, one has

$$u(x+y) = u(x) + u(y), \quad u(xy) = u(x)u(y)$$

On the same argument, $u(x) = x$ for $x \in k$. Hence u is a homomorphism and Ω_k^s is separably closed over k . Thus u is a k -automorphism of Ω_k^s , so $u \in \Gamma$. Hence Γ is closed in $(\Omega_k^s)^{\Omega_k^s}$. Note that every field is the increasing filtrant union of the subfields of finite type over the prime field. Recall the following proposition.

Proposition 1.2. *Let E be an extension of a field k and B a base of transcendence of E over k . E is of finite type over k if and only if B is finite and the degree $[E : k(B)]$ is finite.*

Let L be a LGalois extension of k and L_i an increasing filtrant family of subextensions of L . Assume L_i are LGalois extensions of k and assume $L = \cup_i L_i$. For each $i \in I$ Γ_i denotes LGalois group $\text{LGal}(L_i/k)$. For $i < j$ in I one has $L_i \subset L_j$ and one has the restriction

$$\phi_{ij} : \Gamma_j \rightarrow \Gamma_i$$

which are continuous homomorphisms. The family (Γ_i, ϕ_{ij}) is a projective system of topological groups.

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \lambda_i \swarrow & & \searrow \lambda_j \\ \Gamma_i & \xleftarrow{\phi_{ij}} & \Gamma_j \end{array}$$

Here (λ_i) is a family of continuous homomorphisms. There exists a homomorphism $\lambda : \Gamma \rightarrow \lim \Gamma_i$ by definition of projective limit. Let $u = (u_i)_{i \in I}$ be an element of $\lim \Gamma_i$. For $i \in I$ u_i is a k -automorphism of L_i and u_i is the restriction of u_j to L_i for $i < j$. Since $L = \cup_i L_i$, there exists a unique element $\sigma \in \Gamma$ such that $\sigma(x) = u_i(x)$ for $x \in L_i$. Thus λ is a bijection. We say an LGal group is a pro-Cremona group.

Proposition 1.3.

$$\Gamma \simeq \lim_i \Gamma_i$$

Fundamental Theorem of LGalois theory:

Theorem 1.1. *Let L be a LGalois extension of k and Γ its LGalois group. Let $\mathcal{K}$ be the set of subextensions E of L such that L/E are separable and $\mathcal{G}$ the set of closed subgroup of Γ . For each subgroup $\Delta \in \mathcal{G}$, $k(\Delta)$ denotes the invariant field of L by Δ and for $E \in \mathcal{K}$ $g(E)$ denotes the group of E -automorphism of L . Then $\Delta \rightarrow k(\Delta)$ is a bijection of $\mathcal{G}$ to $\mathcal{K}$. $E \rightarrow g(E)$ is an inverse bijection of $\mathcal{K}$ to $\mathcal{G}$. For $E \in \mathcal{K}$, $\text{LGal}(L/E)$ is an algebraically closed subgroup of $\text{LGal}(L/k)$ with an induced topology. For a subgroup Δ of Γ , Let E be the invariant field of Δ . Then the LGalois group of E is the closure of Δ in Γ . Let $\mathcal{M}$ be the set of subextensions of L such that if $u : E \simeq E'$ then transcendental degrees of L over E and E' should be the same. Let $E, F \in \mathcal{M}$.*

$$\text{Hom}_k^{\text{sep}}(E, F) \simeq \text{Hom}^{\text{al.close inc}}_{\text{LGal}(L/k)}(\text{LGal}(L/F), \text{LGal}(L/E))$$

where the left homomorphisms are field separable injections and the right homomorphism are continuous algebraically closed inclusions. Note that we consider an fixed algebraically closed field containing all fields in the category of fields and on the other hand an fixed topological group LGalois group containing all topological group LGalois groups in the category of LGalois

groups. In $\text{Hom}_k^{\text{sep}}(E, F)$, F is to be abstract, in $\text{Hom}^{\text{al.close inc}} \text{LGal}(L/K)(\text{LGal}(L/F), \text{LGal}(L/E))$ $\text{LGal}(L/F)$ is to be abstract.

Proof. Let a field $E \in \mathcal{K}$. When $[L : E] < \infty$, it comes from usual Galois theory, we assume $[L : E] = \infty$. Let $G_E = g(E)$ be the algebraic closure of a subgroup of Γ which makes E invariant and E' the fixed field by G_E . Clearly, $E \subseteq E'$. Let L_E be the algebraic closure of E in L and $G_E^{L_E}$ the restriction of G_E on L_E . Note that $\text{rest} : G_E \rightarrow G_E^{L_E}$ is surjective. In L_E we have $E = E'|_{L_E}$ by virtue of Galois theory. If E' is algebraic over E , $E'|_{L_E} = E'$. If E' is not algebraic over E , then there exists transcendent elements in E' over E . However, they are not invariant by the definition of LGalois group. Thus $E' = E$. Next let Δ be a group in $\mathcal{G}$ and $k(\Delta)$ the fixed field by Δ . Let $G = g(k(\Delta))$ be the algebraic closure of the group which makes $k(\Delta)$ invariant. Δ is contained in G . Since Δ is closed, $\square$

The category whose objects are the subfields of a fixed separably closed field of a ground field such that it is separable over each subfield and whose morphisms are separable inclusions is equivalent to the category whose objects are algebraically closed subgroups of the automorphism group of a fixed separably closed field over a ground field and whose morphisms are algebraically closed inclusions. Let k be the ground field and K a given field in Ω_k^s . Assume that K is separable over k . Let G be the absolute LGalois group $\text{LGal}(/K)$ fixing K , which is an algebraically closed subgroup of $\Gamma = \text{LCal}(/k)$. Let a be an automorphism of K over k , which can extend to Ω_k^s . Then one has a group homomorphism $G \rightarrow aGa^{-1}$. This homomorphism corresponds to $a \in \text{Aut}_k(K)$. Conversely, let $N_\Gamma(G)$ be the normalizer of G in Γ . Let $g \in N_\Gamma(G)$. A group homomorphism $G \rightarrow gGg^{-1}$ modulo $G \rightarrow \text{Gal}(/k)$. induces an automorphism of the field K over k . One has

$$\text{Aut}(K)_k \simeq N_\Gamma(G)/(G \rightarrow \text{Gal}(/k))$$

In particular, one has

$$\mathrm{Aut}(K)_k < \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{out}(G)$$

Note that the left inclusion is strict, which is important.

Let M be an extension of K in Ω_k^s . One has a commutative square:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LGal}(/M) & \longrightarrow & \mathrm{LGal}(/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(/M) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(/K) \end{array}$$

Here the two vertical arrows are surjections and the upper horizontal arrows is injection. The lower one is a composite as a surjection before an injection.

2 Iitaka-Viehweg Conjecture

We add a supplement to a proof of Iitak-Viehweg Conjecture.

We apply this to the case:

Let S be a variety over an algebraically closed field k and X, Y S -varieties. Assume $X = X_0 \times S$ and $f; X \rightarrow Y$ a dominant rational map over S and that each fibre of Y/S is of Kodaira dimension ≥ 0 . Let Γ, E and G be topological groups the absolute Galois group, the absolute LGalois groups associated to the generic points of S, Y and the general generic fibre of Y/S . Then E has a section as groups over Γ . Then E corresponds to an extension of Γ by G , which is a member of $H^1(\Gamma, (G \rightarrow \mathrm{Aut}(G)))$. Since E has a group section, it represents a member $H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(G))$, which maps to $H^1(\Gamma, \mathrm{Out}(G))$. However one has

$$\mathrm{Aut}_k^o(K) \cong N_\Gamma(G)/G$$

Hence an argument well-known implies that the member of the section is a trivial in $H^1(\Gamma, \mathrm{Out}(G))$.

Thus the member of section in $H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(G))$ is purely in $\mathrm{Inn}(G)$. Therefore it is $\Gamma \rightarrow 1 \in$

$\text{Aut}(G)$. E is already semi-direct product Γ and G and the action of Γ on G is trivial, which implies that E is trivial.

In general, given a commutative triangle

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

$\text{Spec}k$

we see Mochizuki's theorem:

$$\text{Hom}_{\text{Spec}(k(S))}(\text{Spec}k(X), \text{Spec}k(Y)) \cong$$

$$\text{Hom}_{\text{Gal}(/k(S))}^{\text{open}}(\text{Gal}(/k(X)), \text{Gal}(/k(Y)))/\text{Ker}(\text{Gal}(/k(Y)) \rightarrow \text{Gal}(/k(S)))$$

Here $k(S)$, $k(X)$, $k(Y)$ are p-subadic fields. Restrict this diagram over the algebraic closed field $\bar{k}$.

Consider the adjoint functors between the category of the spectra of finitely generated fields over k and that of the profinite groups over the absolute Galois group of k . Mochizuki's theorem gives us the adjoint functor theorem which equips Monoids and Comonoids. The pull-back functor induced by the morphism $\text{Spec}\bar{k} \rightarrow \text{Spec}k$ gives arrows between Monads and Comonads.

The argument above is valid for the absolute Galois groups instead of the absolute LGalois groups. Let $\Gamma = \text{Gal}(/k(S))$, $G = \text{Gal}(/k(Y))$. Hence one has

$$\text{Aut}_k^o(K) \cong N_\Gamma(G)/G$$

One obtains the next proposition.

Proposition 2.1. *Let k be an algebraically closed field and S, X, Y varieties over k . Assume $f : X \rightarrow Y$ is a dominant rational map over S and that the general generic fibre of Y/S is of Kodaira dimension ≥ 0 . Then*

$$\text{var}(X/S) \geq \text{var}(Y/S)$$

Theorem 2.1. *Let k be a field and S, X proper smooth varieties over k . Assume $f : X \rightarrow S$ is a separable connected surjective morphism defined over k and that the general generic fibre of X/S is of Kodaira dimension ≥ 0 . Then for some $m > 0$*

$$\kappa(\hat{\det} f_* \omega_{X/S}^{\otimes m}) \geq \text{var}(X/S)$$

Proof. Viehweg says that the assertion with $\text{var}(X/S) = \dim S$ implies the general one. Assume $\text{var}(X/S) = \dim S$.

In case of characteristic 0;

There is a generically surjective morphism $X \rightarrow P_S$, where P_S is a pull-back of P_k which is a projective space over k . Take a general hyperplane H_{P_k} of P_k and H_{P_S} the pull-back of H_{P_k} to P_S . We get a cyclic or Kawamata cover X' of X with respect to H_X which is a pull-back of H_S to X . The general generic fibre of X'/S is of general type.

In case of characteristic $p > 0$;

Since $k(X)$ is a separable extension of finite type over $k(S)$, there exist a transcendental basis $x_1, \dots, x_n$ of $k(X)$ over $k(S)$ such that $k(X)$ is a separable finite extension of $k(S)(x_1, \dots, x_n)$.

We have a dominant rational map from X to P_S , which is defined except a locus of codimension 2. By cyclic cover X'_0 with respect to the pull-back of a hyper-plane, we get a smooth variety X' such that X'/S is of general type after an alteration generically etale over X'_0 .

In both case X'/S is of general type, the theorem is valid. Since $\text{var}(X'/S) \geq \text{var}(X/S) =$

$\dim S$, So $\kappa(\det \hat{f} \omega_{X'/S}^{\otimes m}) = \dim S$. One has for some $m > 0$

$$\omega_{X'/S}^{\otimes m} \geq A_{X'}$$

where A is an ample divisor on S and $A_{X'}$ is the pull-back of A onto X' . One has

$$\omega_{X/S}^{\otimes m}(H_X) \geq \mathcal{O}_X(A_X)$$

Since $f_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})(rA)$ has a global section, $\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA)$ has a global section. Hence

$$\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA_X + H_X) \geq \mathcal{O}_X((r+1)A_X)$$

Note that $\kappa(X_{\bar{\eta}}) \geq 0$ implies a power of $\omega_{X/S}$ does not need H_X and some power of $\omega_{X/S}$ is effective. Let $\text{LGal}(/k(S))$ denote the absolute LGalois group of $k(S)$ by G_S . Act this group birationally on the invertible sheaves $\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA_X + H_X)$ and $\mathcal{O}_X((r+1)A_X)$. Then the fixing parts implies

$$(\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA_X + H_X))^{G_S} \geq (\mathcal{O}_X((r+1)A_X))^{G_S}$$

and

$$(\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA_X + H_X))^{G_S} = (\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA_X))^{G_S}$$

$$(\mathcal{O}_X((r+1)A_X))^{G_S} = \mathcal{O}_X((r+1)A_X)$$

since H_X does not have any part at all fixed by G_S even if $H = X$ decomposes itself. Thus

$$\omega_{X/S}^{\otimes m}(rA_X) \geq \mathcal{O}_X((r+1)A_X)$$

Therefore one gets the assertion. □

Definition 2.1. Let k be a field, S, X schemes over k . Let $f : X \rightarrow S$ be a surjective connected morphism. Let the automorphism group over S denote $\text{Aut}_S(X)$. When for any generically surjective morphism $S' \rightarrow S$, $\text{Aut}_{S'}(X_{S'})$ has the structure of a group scheme locally

of finite type over k , i.e., with at most countable connected components over k , we say that X/S has geometrically locally algebraic automorphism group.

Instead of the étale morphisms we made use of the reduced morphisms and denote the topological group w.r.p reduced morphism by $\Pi(X)$ for a scheme X . We consider a presheaf of a scheme X which is equipped with the strongest topology and we denote it by $\underline{\Pi}_X$.

Proposition 2.2. *Let k be a field, S a k -scheme and X, Y reduced schemes over S . Assume $f : X \rightarrow Y$ a geometrically surjective separable morphism over S and that all fibres Y/S are of Kodaira dimension ≥ 0 or X/S has geometrically locally algebraic group.. Then*

$$\text{var}(X/S) \geq \text{var}(Y/S)$$

Itaka proved that the proper birational automorphism of an open variety of Kodaira dimension ≥ 0 is an algebraic group.

Theorem 2.2. *Let k be an algebraically closed field of characteristic 0. Let S°, X° be a smooth Itaka open varieties over k . Let $f^\circ : X^\circ \rightarrow S^\circ$ be a connected surjective morphism over k . Assume X°/S° has a general generic fibre of Kodaira dimension ≥ 0 . Then for some $m > 0$*

$$\kappa(\hat{\det} f_* (\mathcal{O}_X(m(K_X + D_X - f^*(K_S + D_S)))) \geq \text{var}(X^\circ/S^\circ)$$

where X, S are compactifications of X°, S° and where $D_X = X \setminus X^\circ, D_S = S \setminus S^\circ$.

Note that for a noetherian scheme S , a proper flat morphism X/S has a locally algebraic group scheme with at most countable number of connected components and that the automorphism group of a compact complex manifold is a Lie group.

As for non-commutative rings, it is known that a skew field which satisfies Ore condition has an algebraically closed extension. A differential field is an example.

3 F_1 -schemes

We denote by $Sets$, Ab , $CRing$ respectively the categories of sets, abelian groups and commutative unitary rings. Let Mo denote the category of commutative monoids denoted multiplicatively with an absorbing element 0. A morphism $\phi : M \rightarrow N$ in Mo is a homomorphism of monoids with $\phi(1) = 1$, $\phi(0) = 0$. Given a commutative group $H \in Ab$ we set $F_1[H] = H \cup \{0\}$. The collection of monoids like $F_1[H]$ for $H \in Ab$ forms a full subcategory of Mo isomorphic to the category of abelian groups.

Definition 3.1. *To a monoid in Mo one associates a functor from Mo to $Sets$:*

$$\text{spec } M : Mo \rightarrow Sets \qquad N \rightarrow Mo(M, N)$$

The functor $\beta : Mo \rightarrow CRing$ is defined $\beta(M) = \mathbb{Z}[M]$ where the last ring is given by the convolution ring. The right adjoint $\beta^* : CRing \rightarrow Mo$ is defined $\beta^*R = R$. Consider each monoid is a category and give Ab -richement together with the forgetful functor.. Then the argument above by Alain Conne holds. Take the category of subfields of $\Omega_{\mathbb{Q}}$ and apply the forgetful functor β^* to the category into Mo . The topological automorphism group of $\beta^*\Omega_{\mathbb{Q}}$ contains $\text{LGal}(\Omega_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ and is bigger than it. And we can define the topological group associated to every submonoid of $\beta^*\Omega_{\mathbb{Q}}$ fixing it and closed in a certain sense, which we call the absolute F_1 -LGalois group and denote it by $F_1\text{LGal}(/M)$ where M is a submonoid. and the topological groups associated to the usual absolute Galois groups can also be defined which we call the absolute F_1 -Galois group and denote by $F_1\text{Gal}(/M)$. Let X, S, F be varieties over fields k and an algebraically closed field $\overline{k(S)}$, respectively. Assume $f : X \rightarrow S$ is a surjective connected (separable) morphism and F is a general generic fibre of X/S . By forgetful functor we have three extended abelian groups in Mo R_X, R_S, R_F , respectively. Apparently, we have an exact

sequence:

$$\begin{array}{ccc}
& & R_S \rightarrow R_X \rightarrow R_F \\
& & \\
1 & & \\
\downarrow & & \\
\mathrm{F}_1\mathrm{Gal}(/ \beta^* \overline{k(S)}(F)) & \longleftarrow & \mathrm{F}_1\mathrm{LGal}(/ \beta^* \overline{k(S)}(F)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{F}_1\mathrm{Gal}(/ \beta^* k(X)) & \longleftarrow & \mathrm{F}_1\mathrm{LGal}(/ \beta^* k(X)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{F}_1\mathrm{Gal}(/ \beta^* k(S)) & \longleftarrow & \mathrm{F}_1\mathrm{LGal}(/ \beta^* k(S)) \\
\downarrow & & \\
1 & &
\end{array}$$

where the vertical arrows on the left side are exact sequence, the horizontal arrows are surjective and the vertical arrows on the right side are injective. Applying the left adjoint of the forgetful functor and another homomorphism to each group in Mo , we have three function fields $k(X)$, $k(S)$, and $\overline{k(S)}(F)$, respectively. Thus given ∞ -schemes X, S, F , we have many adjoint couples and the corresponding topological groups. The diagram just like one above appears in each stage of underlying schemes of ∞ -schemes.

4 Riemann Conjecture

In this section we work over the complex number field. Given a matrix A we have the eigen polynomial $P(X)$ of A . Then $P(X)$ has A as a root, i.e., $P(A) = 0$. Conversely, given a polynomial $P(X)$, we have a matrix A which has $P(X)$ as the eigen polynomial. Furthermore the similar matrix PAP^{-1} where P is a regular matrix has $P(X)$ as the eigen polynomial,

Definition 4.1. A C^* -algebra is a Banach algebra $(A, || - ||)$ over a topological field K (often the field $\mathbb{C}$ of the complex numbers) equipped with an involution $(-)^*$ compatible with complex

conjugation if a Banach star-algebra that satisfies the $\mathbb{C}^*$ -identity

$$||AA^*|| = ||A|| ||A^*||$$

of complex numbers) equipped with an involution $(-)^*$ or equivalently the B^* -identity

$$||AA^*|| = ||A||^2$$

A homomorphism of C^* -algebras is a map that preserves all the structure. For this it is sufficient for it to be a star-algebra homomorphisms. C^* -algebras with these homomorphisms form a category $C^* \text{ Alg.}$.

Remark 4.1. C^* -algebra is called C^* -system if it is equipped with the action of a group by automorphisms of the algebra.

Gelfant-Naimark says that every C^* -algebra is isomorphic to a C^* -algebra of bounded linear operators on a Hilbert space, Note that a bounded operator is namely a continuous operator.

The complete Riemann zeta $\hat{\zeta}$ satisfies the action $s \mapsto 1 - s$ and the complex conjugate $s \rightarrow \bar{s}$. Let $\tilde{\zeta}$ be $(s - 1)\hat{\zeta}$. It is a holomorphic function. Let A be an operator of a concrete C^* -algebra such that it is an infinite matrix whose elements are only consisted of diagonal elements where there are distinct roots of the complete Riemann zeta function. We consider a C^* -algebra generated by roots of $\tilde{\zeta}$ in the form of $\mathcal{B}(H)$.

Theorem 4.1. Let K be a commutative field. Let A and B be two K -algebras, $Z(A)$ and $Z(B)$ their centers. Suppose that the algebra B is of finite degree over K and that the algebra $Z(A) \otimes_K Z(B)$ is a field. Let f and g are K -algebra homomorphisms from B to A . Then there exists an inner automorphism θ of A such that

$$g = \theta(f).$$

Gelfant-Naimark theorem says this algebra is also a concrete C^* -algebra. The automorphism group of this C^* -algebra does not admit a center.

Example 4.1. Any algebra $M_n(\mathbb{C})$ for all integers n is C^* -algebra.

Remark 4.2. Refer to automorphism of $GL_n(\mathbb{C})$. transactions of american mathematical society volume 215 1976.

$$\Lambda(M) = \chi(M)PM^\sigma P^{-1}$$

$$\Lambda(M) = \chi(M)PM^{*\sigma}P^{-1}$$

Here σ denotes an automorphism of $\mathbb{C}$ and $*$ a transposed inverse.

[Bourbaki A VIII 250] Let K be a commutative field. Let A and B be algebras. For a homomorphism $f : B \rightarrow A$, we denote by A^f the (B, A) -module where the right A -module is A_r and the action of the left B -module is given by $(b, a) \rightarrow f(b)a$ where $a \in A$, $b \in B$.

Lemma 4.1. Let f and g be homomorphisms $B \rightarrow A$. The following are equivalent:

The (B, A) -modules A^f and A^g are isomorphic.

There exists an inner automorphism θ of A such that

$$g = \theta(f)$$

Proof. The automorphisms of the right A -module A_r are the mapping $x \rightarrow ax$ where $a \in A$. This mapping is B -linear mapping between A^f and A^g if and only if

$$g(b)ax = af(b)x$$

This relation implies

$$g(b) = af(b)a^{-1}$$

for any $b \in B$. That is $g = \theta \circ f$. □

We apply this lemma to the following situation.

Definition 4.2. *Let $\mathcal{Z}$ be a functor from the category of $\mathbb{C}$ -algebras to that of sets.*

$$\mathcal{Z} : \mathbf{Alg}/\mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

For R an object of the category of $\mathbb{C}$ -algebras

$$\mathcal{Z}(R) = \{s \in R \mid \tilde{\zeta}(s) = 0\}$$

Let M_∞ be an $\mathbb{C}$ -algebra of infinite dimension and D_∞ a subalgebra of M_∞ consisting of diagonal matrices only.

$$\mathcal{Z}(D_\infty)$$

is the set of diagonal matrices A whose elements are all the distinct roots of $\tilde{\zeta} = 0$ and the matrices in the form of PAP^{-1} where P are the invertible matrices such that PAP^{-1} is diagonal.

We consider the next

$$\mathcal{Z}(M_\infty)$$

which is the set of all matrices in the form PAP^{-1} where P are invertible, where A is diagonal matrices whose elements are all the distinct roots of $\tilde{\zeta} = 0$.

Define a subset of $\mathcal{Z}(M_\infty)$ such that PAP^{-1} where P are invertible matrices with the components of real numbers, which we denote by Z . Then

$$\tilde{\zeta}(PAP^{-1}) = 0$$

Note that we also can consider the next

$$\mathcal{Z}(\mathcal{B}(H))$$

We have the automorphisms of Z as follows:

(I) $S \mapsto PSP^{-1}$ where P is an invertible real matrix

(II) $S \mapsto 1 - S$

(III) $S \mapsto \bar{S}$ where $\bar{S}$ is the complex conjugate.

We denote the group of these automorphisms by $\text{Aut}(Z)$.

Note that $\text{Aut}(\mathcal{Z}(M_\infty))$ is a profinite group since this group consists of inner action by the profinite group M_∞ plus involution and note that there exists a subgroup $\text{Aut}(Z)$ is a profinite group since it is a closed subgroup of $\text{Aut}(\mathcal{Z}(M_\infty))$

We study the linear representation of this profinite group.

Note that $\mathcal{Z}$ is representable by $\mathbb{C}\{S\}/\tilde{\zeta}$.

Proposition 4.1. *The second automorphism type II commutes with all the first automorphisms of type I. Any first automorphism of type I cannot commute one another among them except trivial one. The third automorphism type III commutes with any one in $\text{Aut}(Z)$.*

Proposition 4.2. *Let S be quasi-compact, quasi-separated, X_α, Y_α of finite presentation over S . The limits X and Y are isomorphism if and only if there exist $\lambda \geq \alpha$ such that X_λ and Y_λ are isomorphisms. Moreover, for any S -isomorphism $f : X \rightarrow Y$, there exist $\mu \geq \lambda$ and S -isomorphism $f_\mu : X_\mu \rightarrow Y_\mu$ such that $f = f_\mu \times I_S$.*

Example 4.2. *Any algebra $M_n(\mathbb{C})$ for all integers n is C^* -algebra.*

Proposition 4.3. *Let D be a skew field, V a left D -vector space, non necessarily finite, A a ring $\text{End}_D(V)$ and f an automorphism of A . Then there exist an automorphism σ of D and a bijective σ -linear mapping $u : V \rightarrow V$ such that*

$$f(a) = u \circ a \circ u^{-1}$$

for any $a \in A$.

Proof. Let K be a skew field, V a non-zero right K -vector space, and A a subring of $\text{End}_K(V)$ which contains all the endomorphisms of finite rank of V . Then V is an A -simple module. p.41
Let A be a ring with a left minimal ideal I . Then every faithful simple A -module is isomorphic to I .

Let V^f be the A -module the underlying additive group of which is V and the action is equipped with $(a, v) \mapsto f(a)v$. Then there exists an A -isomorphism $u : V \rightarrow V^f$. $uD u^{-1}$ is equal to the bicommutant of D -module V and so it is D itself.

We have the commutative square:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{a} & V \\ u \downarrow & & \downarrow u \\ V^f & \xrightarrow{f(a)} & V^f \end{array}$$

□

Remark 4.3. *There exists a finite group $\mathbf{S}_n$ in $M_n(\mathbb{C})$ where n is a sufficiently large number such that the centralizer of $\mathbf{S}_n$ in $GL_n(\mathbb{C})$ is $\{1\}$.*

For $A, P \in GL_n(\mathbb{C})$, a map $X \mapsto A^{-1}P^{-1}XPA = P^{-1}A^{-1}XAP$ for any $X \in \mathbf{S}_n$ implies that $[A, P] = APA^{-1}P^{-1}$ commutes X for $X \in \mathbf{S}_n$. Hence $[A, P] = 1$. We can consider $\text{Aut}(\mathcal{Z}(D_\infty))$ is written by

$$S \mapsto PSP^{-1}$$

where P is any invertible complex matrix which makes $\mathcal{Z}(D_\infty)$ invariant, $S \mapsto 1 - S$ and the complex conjugate action. However the P is factored into DR where D is a diagonal matrix and R is a real matrix such that RAR^{-1} is diagonal. Hence $PAP^{-1} = DBD^{-1} = B$ where B is diagonal.

When P is an image of an automorphism of $\text{Aut}(Z)$ which forms type I, we take A to be a non identity matrix such that $[A, P] = 1$ for all P .

The automorphisms of $M_n(\mathbb{C})$ consist of the inner automorphisms and the automorphism induced by the complex conjugate action only.

The image in $\text{Aut}(M_n(\mathbb{C}))$ for sufficiently large n of representation of the automorphism type II $S \mapsto 1 - S$ should coincide with that of type III $S \mapsto \bar{S}$.

$\text{Aut}(Z(M_\infty))$ can be embeded in the $\text{Aut}(\lim_n M_n(\mathbb{C}))$. And $\text{Aut}(Z)$ can also be embeded in the $\text{Aut}(\lim_n M_n(\mathbb{C}))$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Aut}(Z) & \longrightarrow & \text{Aut}(\lim_n M_n(\mathbb{C})) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & \text{Aut}(M_n(\mathbb{C}))
 \end{array}$$

[Bourbaki A VIII 250]

Let K be a commutative field. Let A and B be algebras. For a homomorphism $f : B \rightarrow A$, we denote by A^f the (B, A) -module where the right $\text{mo}A$ -module is A_r and the action of the left B -module is given by $(b, a) \rightarrow f(b)a$ where $a \in A$, $b \in C$.

[Bourbaki A VIII 254]

Theorem 4.2. *Let A be a semi-simple ring, Z its center and u an automorphism of A . Suppose that A is a Z -module of finite type and that $u(z) = z$ for any $z \in Z$. Then u is an inner automorphism.*

Example 4.3. Let V be a vector space of finite dimension over a commutative field K . Every automorphism of the K -algebra $\text{End}_K(V)$ is inner. In particular every member of $\text{Aut}(M_n(K))$ is inner.

Lemma 4.2. Let f , and g be homomorphisms $B \rightarrow A$. The following are equivalent:

The (B, A) -modules A^f and A^g are isomorphic.

There exists an inner automorphism θ of A such that

$$g = \theta(f)$$

Proof. The automorphisms of the right A -module A_r are the mapping $x \rightarrow ax$ where $a \in A$. This mapping is B -linear mapping between A^f and A^g if and only if

$$g(b)ax = af(b)x$$

This relation implies

$$g(b) = af(b)a^{-1}$$

for any $b \in B$. That is $g = \theta \circ f$. □

There exist adjoint functors L and U between the categories **Group** and **Ring**:

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(\mathbb{C}(G), \mathbb{C}(H)) \simeq \text{Hom}_{\text{Group}}(G, H)$$

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(L(G), \mathbb{C}(H)) \simeq \text{Hom}_{\text{Group}}(G, U(\mathbb{C}(H)))$$

One can embed every finite group into some general linear group.

Note that the complex numbers can be represented by matrix and the action of complex conjugate $A \rightarrow PAP^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & M_n(\mathbb{C}) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \theta_\alpha \\ G & \xrightarrow{f} & M_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

Here θ_α is in the form $X \mapsto PXP^{-1}$.

$$w = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

The action above indicates the following first map, which means the complex conjugate automorphism on $M_n(\mathbb{C})$.

$$\text{Spec}\mathbb{C} \rightarrow \text{Spec}\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}_n$$

We conclude the following

Theorem 4.3.

$$1 - s = \bar{s}$$

We can propose another approach here.

Definition 4.3. *Let $\mathcal{Z}$ be a functor from the category of $\mathbb{C}$ -algebras to that of sets.*

$$\mathcal{Z} : \mathbf{Alg}/\mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

For R an object of the category of $\mathbb{C}$ -algebras

$$\mathcal{Z}(R) = \{s \in R \mid \tilde{\zeta}(s) = 0\}$$

Let M_∞ be an $\mathbb{C}$ -algebra of infinite dimension and D_∞ a subalgebra of M_∞ consisting of diagonal matrices only.

$$\mathcal{Z}(D_\infty)$$

is the set of diagonal matrices A whose elements are all the distinct roots of $\tilde{\zeta} = 0$ and the matrices in the form of PAP^{-1} where P are the complex invertible matrices such that PAP^{-1} is diagonal.

Then

$$\tilde{\zeta}(PAP^{-1}) = 0$$

Note that we have the automorphisms of $\mathcal{Z}(D_\infty)$ as follows:

(I) $S \mapsto PSP^{-1}$ where PSP^{-1} is diagonal.

(II) $S \mapsto 1 - S$

(III) $S \mapsto \bar{S}$

We can consider these automorphisms as a fundamental group and study the linear representation of this profinite group directly instead of detour.

Note that $\mathcal{Z}$ is representable by $\mathbb{C}\{S\}/\tilde{\zeta}$.

Recall Lefschetz principle here.

$$\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}(D_\infty)) \simeq \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}(\mathbb{C}))$$

Proposition 4.4. *The second and third automorphisms commute with all the first automorphisms. Any first automorphism cannot commute all the others.*

Definition 4.4. *A field associated to $\mathcal{Z}$ over $\mathbb{Q}$ is defined to be*

$$\mathbb{Q}(\{s \in \mathbb{C} \mid \tilde{\zeta}(s) = 0\})$$

Let K be the field defined above for $\mathcal{Z}$ over $\mathbb{Q}$ and G be $\mathrm{LGal}(/K)$.

Proposition 4.5. *K has the three type automorphisms above.*

We have the following isomorphism:

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}(\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}(D_{\infty}))$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}(\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Spec}(K))$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Spec}(K)) \simeq \mathrm{Aut}^{\mathrm{open}}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$$

$$\mathrm{Aut}^{\mathrm{open}}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma) \simeq N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$$

where $\Gamma = \mathrm{Gal}(/ \mathbb{Q})$, $L\Gamma = \mathrm{LGal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.

One can embed every finite group into some general linear group. Hence we expect to separate $\theta_g(f)$ from f for any non identity element $g \in N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$.

Proposition 4.6. *Let S be quasi-compact, quasi-separated, X_{α}, Y_{α} of finite presentation over S . The limits X and Y are isomorphism if and only if there exist $\lambda \geq \alpha$ such that X_{λ} and Y_{λ} are isomorphisms. Moreover, for any S -isomorphism $f : X \rightarrow Y$, there exist $\mu \geq \lambda$ and S -isomorphism $f_{\mu} : X_{\mu} \rightarrow Y_{\mu}$ such that $f = f_{\mu} \times I_S$.*

Example 4.4. *Any algebra $M_n(\mathbb{C})$ for all integers n is C^* -algebra.*

Note that since all matrices for commutating type II and III should have components of real numbers, the automorphisms of the complex number field should have real number field as the fixed field of the automorphisms. Hence the automorphism of the complex conjugate can be admitted only.

The following diagram contains a cocartesian sqaire.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \overline{\mathbb{Q}(\{s|\tilde{\zeta}(s)\})} \\
 & & \uparrow \\
 & & \overline{\mathbb{Q}(\{s|\tilde{\zeta}(s)\})} \\
 & \nearrow & \uparrow \\
 \overline{\mathbb{Q}} & & \mathbb{Q}(\{s|\tilde{\zeta}(s)\}) \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 \mathbb{Q} & &
 \end{array}$$

Note that an absolute Galois group $Gal(\bar{K}/K)$ is large enough to contain the absolute Galois group $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ which is monstraously big like S_∞ .

Remark 4.4. *There exists a finite group $\mathbf{S}_n$ in $ML_n(\mathbb{C})$ where n is a sufficiently large number such that the centralizer of $\mathbf{S}_n$ in $GL_n(\mathbb{C})$ is $\{1\}$.*

For $A, P \in GL_n(\mathbb{C})$, a map $X \mapsto A^{-1}P^{-1}XPA = P^{-1}A^{-1}XAP$ for any $X \in \mathbf{S}_n$ implies that

$$[A, P] = APA^{-1}P^{-1} \text{ commutes } X \text{ for } X \in \mathbf{S}_n. \text{ Hence } [A, P] = 1.$$

When P is an image of an automorphism of $\mathcal{Z}$ which forms type I, we take A to be a non identity matrix such that $[A, P] = 1$ for all P .

The image of representation of the automorphism type II should coincide with that of type III.

$Gal(\bar{K}/K)$ can be embeded in the limit $\lim_n ML_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{array}{ccc}
 Gal(\bar{K}/K) = G_0 & \longrightarrow & \lim_n ML_n(\mathbb{C}) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & ML_n(\mathbb{C})
 \end{array}$$

The image of $\ker(G_0 \rightarrow \Gamma)$ or $\ker(G \rightarrow \Gamma)$ in $ML_n(\mathbb{C})$ is written by $\mathbf{I}_n$. If τ_{1-s} is represented by A , then $P^A = A^{-1}PA$ would be in the same class P modulo $\mathbf{I}_n$ for $P \in \mathbf{S}_n$. However $\mathbf{I}_n$ is a finite subgroup of the image of G_0 . If necessary, we can use $\mathcal{Z}(M_\infty)$. Hence $P^A = A^{-1}PA$ would be in the same class P modulo $\mathbf{I}_n$ for $P \in GL = L_n$. It is impossible. Thus The τ_{1-s} cannot be represented by a conjugate by a usual matrix A in $GL_n(\mathbb{C})$.

One can embed every finite group into some general linear group. Hence we expect to separate $\theta_g(f)$ from f for any non identity element $g \in N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$. where $\Gamma = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Note that we can take

$$K = \mathbb{Q}(\{s | \bar{\zeta}(s) = 0\})$$

We have the following cartesian squares:

$$\begin{array}{ccccc} L\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) & \longleftarrow & L\text{Gal}(\mathbb{C}/K) & \longleftarrow & \ker(G \rightarrow \Gamma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) & \longleftarrow & \text{Gal}(\bar{K}/K) & \longleftarrow & \ker(G_0 \rightarrow \Gamma) \end{array}$$

where $\Gamma = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Here $G = L\text{Gal}(\mathbb{C}/K)$ and $G_0 = \text{Gal}(\bar{K}/K)$. Hence for two automorphisms the complex conjugate $s \rightarrow \bar{s}$ and $s \rightarrow 1 - s$ in $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}(\mathbb{C}))$, τ_- and τ_{1-s} are representatives in $N_{L\Gamma}(G)$ modulo $\ker(G \rightarrow \Gamma)$. $\text{Aut}^{open}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma) \simeq N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$ where $\Gamma = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ and $L\Gamma = L\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Hence we have

$$N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma) \simeq \text{Aut}^{open}(G_0)/\ker(G_0 \rightarrow \Gamma)$$

Moreover, if τ_- and τ_{1-s} are mapped on the identity in the $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ by the canonical surjective homomorphism, then $\tau_{1-s}\tau_-^{-1}$ will be in $\ker(G \rightarrow \Gamma)$, which implies that they are the same automorphism in $N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$. Therefore it is enough to consider group

representations from the absolute Galois group to general linear groups. Since the absolute Galois group is profinite group, the image of linear representation is a finite group. But when we consider all linear representations for $ML_n(\mathbb{C})$, two automorphisms induced by τ_- and τ_{1-s} are to be separated. Note that the complex numbers can be represented by matrix and the action of complex conjugate $A \rightarrow PAP^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & ML_n(\mathbb{C}) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \theta_\alpha \\ G & \xrightarrow{f} & ML_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

This map can be factored through the next

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{f_0} & ML_n(\mathbb{C}) \\ \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \theta_\alpha \\ G_0 & \xrightarrow{f_0} & ML_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

Here α is in the form $\alpha : x \mapsto gxg^{-1}$ for $g \in N_{L\Gamma}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}})$ and θ_α is in the form $X \mapsto PXP^{-1}$.

$$w = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

where $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. The action above indicates the following first map, which means the complex conjugate automorphism on $ML_n(\mathbb{C})$.

$$\text{Spec}\mathbb{C} \rightarrow \text{Spec}\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}_n$$

Proposition 4.7. $\text{Aut}^{\text{open}}(G)/\ker(G \rightarrow \Gamma)$ are consisted of the automorphism induced by the complex conjugate and $g \in G \mapsto \sigma g \sigma^{-1} \in G$ for some $\sigma \in \text{LGal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.

We conclude the following

Theorem 4.4.

$$1 - s = \bar{s}$$

References

- [S] Schaeppi, D, *The formal theory of Tannaka duality*, Astérisque 357, 2013.
- [B1] N.Bourbaki, *Éléments de Mathématique Algèbre Chapitres 4 à 7*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg pp. 422 (2007).
- [B1] N.Bourbaki, *Éléments de Mathématique Algèbre Chapitres 8*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg pp. 475 (2012).
- [G] Gelbart,S., *An elementary introduction to the Langlands program*, American Mathematical Society. Bulletin.(1984) New Series, 10(2): 177-219, ISSN 0002-9904
- [BG] Bernstein,J., Gelbart,S. *An Introduction to the Langlands Program*, Birkhäuser,(2003) Boston ISBN 3-7643-3211-5.
- [AM] Adem, A. and Milgram, R., *Cohomology of finite groups.*, Grundlehren math. Wiss. 309, p. 317 (1991).
- [BBD] Beilinson A.A., Bernstein I.N., Deligne P., *Faisceaux pervers.*, Analyse et Topologie sur les espaces singuliers(I), Conférence de Luminy, juillet 1981, Astérisque 100(1982).
- [Berth] Berthelot, P., *Altérations de variétés algébriques d'après A.J. DE JONG*, Séminaire Bourbaki 48, n° 815, pp.273-311(1997).

- [BJ] Borceux, F. and Janelidze, G. *Galois Theories.*, cambridge studies in advanced math. 72 pp.341 ISBN 0 521 80309 8 2001
- [Breen1] Breen, L., *Théorie de Schreier supérieure.*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 25, pp. 465-514(1992).
- [Breen2] Breen, L., *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, 225 Astérisque Société Mathématique p. 160 (1994).
- [Brz] Brzezinski, T., Wisbauer, R., *Corings and Comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, Cambridge University Press, 2003.
- [Cohn] Cohn, P.M., *Skew Fields*, Theory of general division rings, Encyclopedia of mathematics and applications 57.
- [Fuj] Fujita, T., *On Kähler fibre spaces over curves.*, J. Math.Soc. Japan 30, pp. 779-794(1978).
- [Gir] Giraud, J., *Cohomologie non abélienne.*, Grundlehren math. Wiss., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 467,(1971).
- [SGA] Grothendieck, A. et al., *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, SGA1, SGA4 I,II,III, SGA41/2, SGA5, SGA7 I,II, Lecture Notes in Mat., vols. 224,269-270-305,569,589,288-340, Springer-Verlag, New York, 1971-1977.
- [GG] Grothendieck, A., *Fondaments de la géométrie algébrique.*, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curis, Paris 5e, p. 236 (1962).
- [Dix] Grothendieck A., Giraud J., Kleiman S., Raynaud M., Tate J., *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, Paris, 1968, pp.386.

- [HS] Hirshowits, A. and Simpson, C., *Descente pour les n -champs.*, arXiv:math. AG/9807049v3
13 Mar 2001
- [I] Iitaka, S., *Introduction to birational geometry.*, Graduate Textbook in Mathematics,
Springer-Verlag, p. 357 (1976).
- [Laum] Laumon, G., Moret-Bailly, L., *Champs algébriques.*, Université de Paris-sud
Mathématiques, p. 94 (1992).
- [Kato] Kato, K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.*, Algebraic Analysis, Geometry
and Number Theory., The Johns-Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, pp. 191-224(1989).
- [Kaw] Kawamata, Y., *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fibre spaces.*, J.
Reine Angew. Math. 363, pp. 1-46 (1985).
- [1] KKMS Kemf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B., *Troidal embeddings I.*,
Springer Lecture Notes, 339(1973).
- [Ko1] Kollár, J., *Shafarevich maps and automorphic forms.*, Princeton university press, Prince-
ton, New Jersey pp.201 1995.
- [Ko2] Kollár, J., *Rational curves on algebraic varieties.*, Springer, Berlin-Heiderberg-Newyork-
Tokyo, (1995)
- [Kon] Kontsevich, M., Rosenberg A. *Noncommutative smooth spaces.*,
arXiv:math.AG/9812158v1 30Dec 1998.
- [Km1] Maehara, K., *Diophantine problems of algebraic varieties and Hodge theory in Inter-
national Symposium Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and related Topics in*

Honor of Professor Shoshichi Kobayashi on his 60th birthday., R.I.M.S., Kyoto University

October 26-30, Organizer: Junjiro Noguchi(T.I.T.), pp. 167-187 (1992).

[Km2] Maehara, K., *Algebraic champs and Kummer coverings.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.18, No.1, pp.1-9(1995).

[Km3] Maehara, K., *Conjectures on birational geometry.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.24, No.1, pp.1-10(2001).

[Mats] Matsuki, K., *Introduction to the Mori Program.*, Universitext p. 468 Springer 2000

[Mat] Matsumura, H., *On algebraic groups of birational transformations.*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie VIII,34, 151-155 (1963).

[MO] Matsumura, H.and Oort, F., *Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes*, Inventiones Mathematicae, 1967 - Springer.

[MP] Miyaoka, Y., Peternel T., *Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties.*, DMV Seminar Band 26 Birkhäuser p. 213 1997

[Mch] Mochizuki, S., *The local Pro- p Anabelian Geometry of Curves.*, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University RIMS-1097(1996).

[Mum] Mumford D., *Selected Papers: On the classification of varieties and moduli spaces.*, Springer p. 795 2003

[Nak] Nakayama, N., *Invariance of the plurigenera of algebraic varieties under minimal model conjectures.*, Topology 25(1986) 237-251.

[Ro] Rosenlicht, M., *Some basic theorems on algebraic groups.*, xxxxx pp.401-443

- [RBZL] Ribes, L., Zalesskii, P., Profinite Groups., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge Vol.40 Springer(1991).
- [Ws] Schmid, W., *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping.*, Inventiones math., 22., pp. 211-319(1973).
- [Se] J-P. Serre. Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics. , **5** 4th Ed. 1973.
- [S1] Simpson, C., *Algebraic (geometric) n -stacks.*, arXiv:math. AG/9609014
- [S2] Simpson, C., *A closed model structure for n -categories, internal Hom, n -stacks and generalized Seifer-Van Kampen.*, arXiv:math: AG/9704006 v2 17 Mar 2000
- [S3] Simpson, C., *Homotopy Theory of Higher Categories, From Segal Categories to n -Categories and Beyond*, Cambridge University Press, ISBN 987-0-521-51695-2, p. 634, (2012)
- [Shatz] Shatz, S., *Profinite groups, arithmetic, and geometry.*, Annals of Math. studies, N. 67, Princeton Uni. Press, p. 252,(1972).
- [Vieh] Viehweg, E. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge.Band 30, p. 320 (1991).
- [Zuo] Zuo, K., Representations of fundamental groups of algebraic varieties., Lecture Notes in Math. 1708, Springer, ISBN 3-540-66312-6.

ルーロー模様のフーリエ解析

加田紘大

津山工業高等専門学校総合理工学科（4年）

1. 研究の動機と目的

高専1年生から昨年まで、ルーロー三角形に興味をもち研究を行ってきた[1]。ルーロー三角形とは、正三角形 ABC の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一辺となる円弧を結んでできた膨らみをもった三角形 ABC のことである（図1）。私は、円 A 、円 B 、円 C の半径を1とし、 A 、 B 、 C の位置を正三角形 ABC に配置したとき、3つの円が交差してできる内側の凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ （図2）や、凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ （図3）を研究した。そして、ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の角に関するある種の公式（第2節参照）を得ることができた。

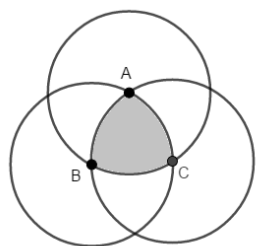


図1 ルーロー三角形

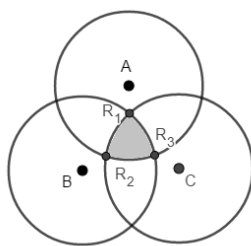


図2 凸型ルーロー正三角形

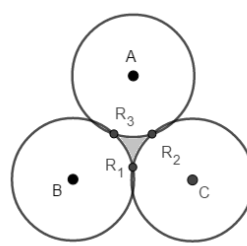


図3 凹型ルーロー正三角形

今年度は円をたくさん描いてルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ を平面全体に規則的に並べた図形全体を研究してみようと考えた。図4は、ある規則でルーロー正三角形を平面全体に規則的に並べてできた模様の異なる3つの例である。私はこれらの模様の特徴を示す尺度が定義できないかと思い、この研究を行なうことにした。また、フーリエ解析は高専で習ったばかりの数学で、これを使って研究してみたいという動機もある。

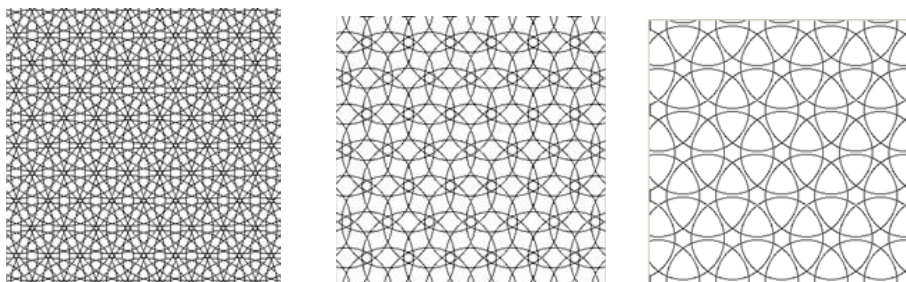


図4 多くの円を規則的に並べてできる模様の例

2. これまでの研究結果

凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ を作る 3 つの円 A, B, C の隣り合う 2 つの円の外側の交点を X, Y, Z として, それらを中心とした円 X, 円 Y, 円 Z をそれぞれ描くと, その中心に凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ ができる. 私のこれまでの結果の 1 つを述べると, 凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の接線によって作られる一つの角を α とし, 凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の一つの角を β とすると,

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$$

が成り立つというものである[1].

この研究は Geogebra というフリーソフトを用いて行なった. このソフトのおかげで, 上に述べた研究以外にも一般の 2 次曲線に関するルーロー三角形に関する掛谷問題といった研究にも取り組んだ[2].

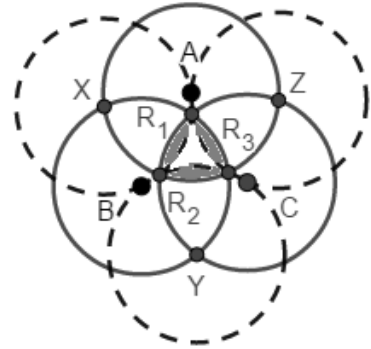


図5 ルーロー三角形の角

3. ルーロー模様 $R(d)$

研究対象であるルーロー模様 $R(d)$ を定義する.

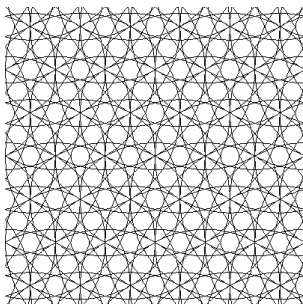
- (1) d を正の実数とする.
- (2) 実 2 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ を考え, その基底を $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とする. そして $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ から作られる格子 Λ を

$$\Lambda = \{a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbf{Z}\}$$

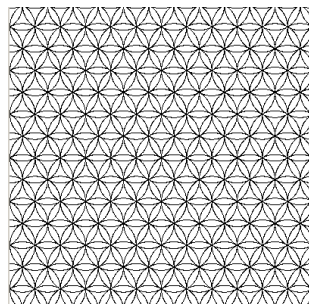
とする.

- (3) 格子 Λ の全ての格子点を中心とする半径 1 の円を描く.

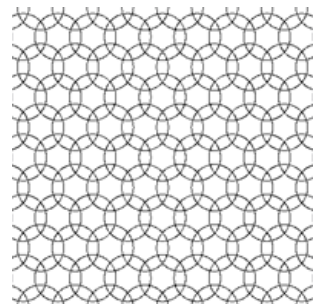
このようにして描いた無数の円で埋めつくされた平面を, ルーロー模様 $R(d)$ という.



$R(0.5)$



$R(1.0)$



$R(1.5)$

図6 ルーロー模様 $R(d)$

4. ルーロー模様 $R(d)$ と平面結晶群

平面結晶群 Γ は17種類に分類されることが分かっている．平面結晶群 Γ の17種類の名称はICU (International Union of Crystallography) による記法が広く用いられており，アルファベット (**p, c, m, g**) は，以下の頭文字である．

p: primitive **c**: centered **m**: mirror **g**: glide reflection

そして，記法で用いられる数字は，回転の位数を表す．さらに，平面結晶群 Γ は，実平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点 $\mathbf{x}$ に対し， $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ の2方向の平行移動で生成される格子群

$$\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2} = \langle \mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \rangle$$

を正規部分群にもち， $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}$ の基本領域の形で17種類の分類がなされている（ただし，基本領域の取り方は一通りには決まらない）（[3],[4]参照）．

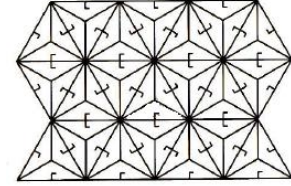
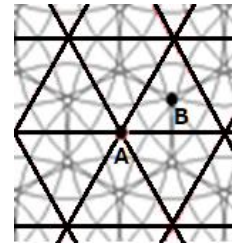
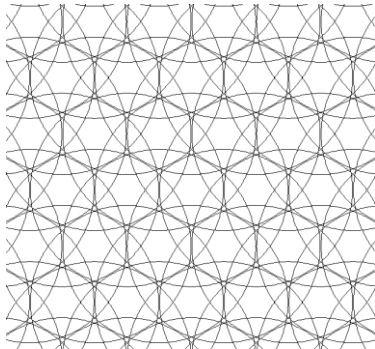


図7 p31m

さて，本研究で扱うルーロー模様 $R(d)$ は，作り方から全て六画格子になっており，位数3の回転（ $2\pi/3$ 回転），3方向の鏡映の軸，3方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心として鏡映の軸上にないものがある**p31m**六角格子と呼ばれている平面結晶群に分類される．



（2点A, Bは，どちらもルーロー模様の $2\pi/3$ 回転対称の中心である）

図8 p31m六角格子の結晶群をもつルーロー空間 $R(0.67)$

参考までに，図8の $R(0.67)$ を2次元FFTで処理した画像が図9である．これはフリーソフトImageJで行った．内側が低周波，外側にいくほど高周波となっており，白いほどその位置の周波数の振幅が大きいことを示している． $R(d)$ は六画格子になるように作ってあるので，3軸方向に対称性があることは当然である．しかし，この方法ではこれ以上の望む結果を得ることはできない．

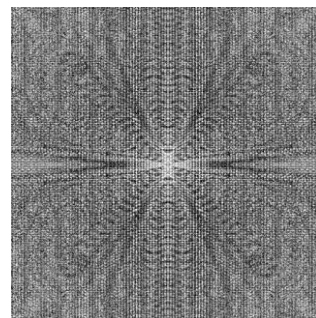


図9 $R(0.67)$ の2次元FFTの画像

今回の研究のテーマは， d によって $R(d)$ の

模様の特徴を示す尺度を発見することであり、定義した尺度から得られる数値と d にどのような関係式があるのかを研究することである。

以下の節で、今回行なった具体的な研究方法とその結果を示していく。

5. ルーロー模様 $R(d)$ の交点密度エネルギー

初等幾何学では相似という概念がある。これは拡大縮小を無視して形が同じであるということを示す概念である。そして、辺の長さや面積などの尺度を用いると、相似である形の違い（大きさという漠然とした概念）を表すことができる。前節で、ルーロー模様 $R(d)$ は一般的にp31m六角格子という文様群であることを説明した。文様群は初等幾何でいう相似という概念に対応すると考える。しかし同じ文様群p31m六角格子でも図6を見ると d によって模様（漠然とした概念）が異なる。初等幾何で辺の長さや面積などの尺度で大きさの違いを表すことができたように、この模様の違いを表す尺度を発見できないだろうか。

私は、周期的な模様が発する光の波によって、その違いが現れているのではないかと考えた。このことから、ルーロー模様 $R(d)$ から何らかのデータを取得し、それらのデータを高専で学んだフーリエ解析を行って研究してみればよいのではないかと考えた。では数学的には何のデータをとればよいのだろうか。

私は、規則的な模様を見るという行為を、瞬間的に一部の領域を捉えて、その次に視点の位置をずらして（平行移動して）、そしてそれをくり返し行なうことだと考えた。これをヒントに、視線が感知する領域を半径1の円領域とし、そこで交点の数を数えていく。そして円領域を水平方向へ微小に平行移動させ、各領域での交点の数をデータとしてとってみようと考えた。

以上の考えを10進BASICでプログラムし、以下の手順で平行移動する半径1の円領域内の交点の密度のデータをとることにし、そして得られたデータをエクセルでFFT解析することにした。

交点の密度のデータ取得の方法とFFT解析

- (1) 半径1の円領域を準備して、その領域内に交点があるかをカウントする。
- (2) 円領域の中心を x 方向に微小にずらし、その領域に交点があるかをカウントし、交点密度を交点数/ 2π としてデータをエクセルファイルに保存する。そしてこれを、交点の配置が1周期くるまでくり返す。すなわち、図10のように円領域の中心をAからBまでずらしていく。
- (3) FFT解析（Fast Fourier Transformation）を行なうため、交点密度のデータ取得回数は32回とする。
- (4) エクセルのFFT解析を使って、 $e^{i\omega t + 2\pi/32}$ の振幅スペクトル $C(\omega)$ （ $0 \leq \omega \leq 16$ ）を算出する。ここで、 ω を16個としているのは、残りの半分はFFTの対称性により意味がないからである。

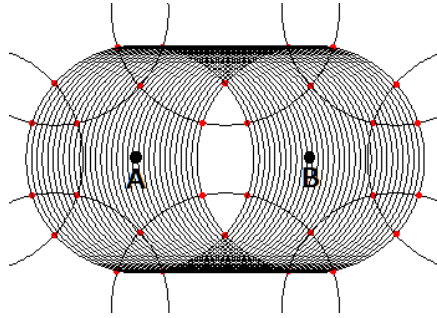


図 1 0 $R(1.5)$ 上で円領域内の交点数のデータを取得する様子

表 1 は, $R(1.5)$ の交点密度のデータであり, 図 1 1 はそのグラフである.

表 1 $R(1.5)$ の交点数と交点密度

	交 点 数	交 点 密 度		交 点 数	交 点 密 度		交 点 数	交 点 密 度		交 点 数	交 点 密 度
1	14	1.98059	9	12	1.69765	17	10	1.41471	25	11	1.55618
2	12	1.69765	10	8	1.13176	18	8	1.13176	26	12	1.69765
3	12	1.69765	11	8	1.13176	19	8	1.13176	27	12	1.69765
4	12	1.69765	12	8	1.13176	20	8	1.13176	28	12	1.69765
5	12	1.69765	13	8	1.13176	21	8	1.13176	29	12	1.69765
6	12	1.69765	14	8	1.13176	22	8	1.13176	30	12	1.69765
7	12	1.69765	15	8	1.13176	23	8	1.13176	31	12	1.69765
8	12	1.69765	16	8	1.13176	24	8	1.13176	32	11	1.55618

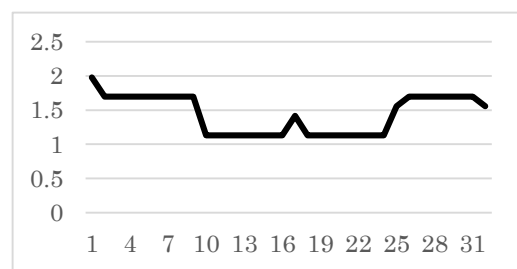


図 1 1 $R(1.5)$ の交点密度のグラフ

表 2 は周波数 ω に対する FFT の結果($a + bi$)と, 振幅スペクトル $C(\omega) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \frac{1}{32}$ である. 素直に FFT 解析した結果が, 図 1 2 のグラフである. $C(0)$ が最大になっており, 次に大きいのが $C(1)$ である. この結果はほとんどの d についていえることであった. (注意. 表 2 の $E(\omega)$ はこの後に定義する周波数 ω の交点密度エネルギーを意味する.)

表 2 $R(1.5)$ の FFT の結果

ω	FFT の結果 ($a + bi$)	$C(\omega)$	$E(\omega)$
0	46.120	0.721	0.000
1	5.61-0.169i	0.088	0.015
2	$1.077 \times 10^{-2} - 5.414 \times 10^{-2}i$	0.001	0.000
3	$1.076 \times 10^{-2} - 5.413 \times 10^{-2}i$	0.031	0.017
4	$-1.983 + 6.287 \times 10^{-2}i$	0.014	0.006
5	0.890-0.100i	0.016	0.013
6	0.980-0.259i	0.002	0.000
7	$8.733 \times 10^{-2} - 0.130i$	0.011	0.012
8	$-0.717 + 2.718 \times 10^{-3}i$	0.016	0.031
9	0.990-0.141i	0.009	0.013
10	0.492-0.280i	0.004	0.003
11	0.195-0.130i	0.004	0.003
12	$-0.223 + 2.384 \times 10^{-2}i$	0.017	0.084
13	1.090-0.100i	0.006	0.011
14	0.289-0.220i	0.004	0.007
15	$0.272 - 5.413 \times 10^{-2}i$	0.002	0.002
16	$8.301 \times 10^{-2} + 0.113i$	0.018	0.160
$E_{pt}(1.5)$			0.379

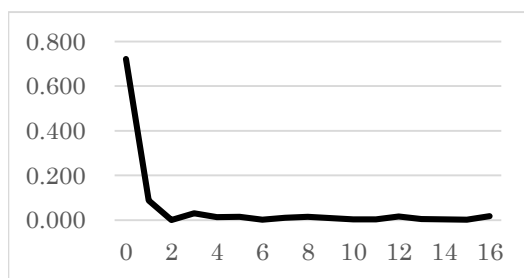


図 1.2 $\omega - C(\omega)$ のグラフ

ほとんどの d で図 1.2 のようなグラフが得られるということはどのようなことなのか. 私は模様 $R(d)$ の x 方向の周期性が周波数 $\omega = 0, 1$ に支配されていることを意味すると考えた. しかし, 周波数 $\omega = 0$ は, 視覚的な光の刺激には影響しないはずなので, 周波数 $\omega = 1$ が p31m 六角格子の平面結晶群をもつ $R(d)$ の x 方向の周期性に対応すると考えられる. それでは, 同じ p31m 六角格子の平面結晶群をもちながら, d による模様の違いを表している要因は何な

のだろうか．表2の $C(\omega)$ を詳しく見ると， $\omega \neq 0,1$ のときも $C(\omega) \neq 0$ である．それはどんな周波数も模様の違いに影響を与えていると考えることができる． $C(\omega)$ をうまく使って模様の違いに影響を与えるような $R(d)$ の尺度を定義すればよい．そこで，物理で習った角振動数 ω ，振幅 A で単振動をしている質量 m の物体がもつ力学的エネルギー E が，

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

という式で表されることから ([5]参照)，交点密度エネルギーという考えを思いついた．それは， $m = 1$ とし， ω をFFTで考える周波数 ω ， A を $2C(\omega)$ として置き換えることであった．

交点密度エネルギーの定義

各局所単位円においてその交点密度をデータとしてとり，FFT解析から得られる振幅スペクトル $C_\omega(0 \leq \omega \leq 16)$ に対し， $E(\omega) = (2\omega C(\omega))^2 / 2$ を振動数 ω の交点密度エネルギーといい， $E(\omega)$ の総和を $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ と呼ぶ．

模様 $R(1.5)$ の交点密度エネルギーは， $E_{pt}(1.5) = 0.379$ であった (表2)．

6. $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ の調査結果

交点をカウントすることを考えたとき，数式で処理するプログラムを作ることはできなかった．今回は，1つの円を描かせ，次の円を描くときに，画像において円が交わったピクセルがあったらカウントするアルゴリズムでプログラムを作った．また， $d = 1$ などの特殊なものは交点が2重点でなく3重点以上の重複度をもち，このような場合は密度エネルギーが小さく計算されるので，以下のデータでは無視した．以下に， $0.5 \leq d \leq 1.6$ の $R(d)$ に関する交点エネルギー $E_{pt}(d)$ の一般的な d のデータを挙げる．

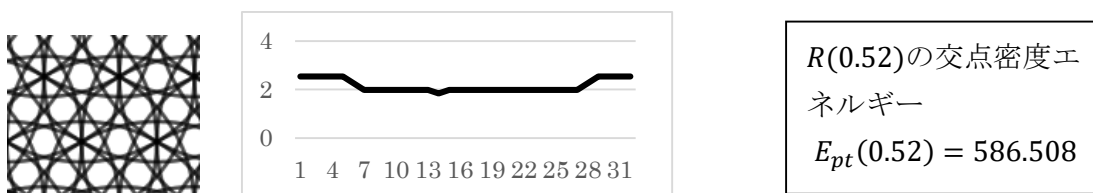


図1.3 ルーロー模様 $R(0.52)$ と交点密度のグラフ

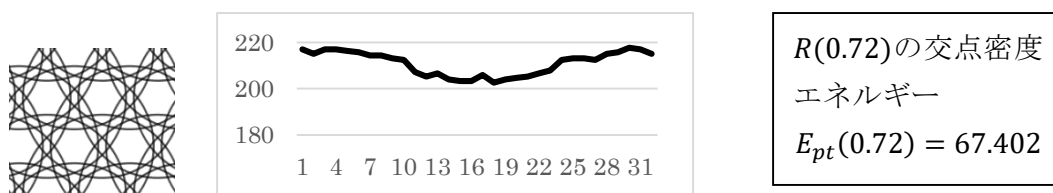
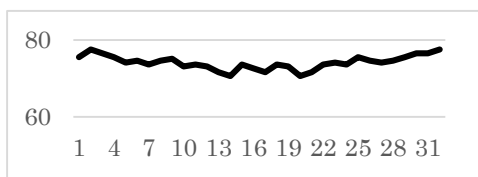
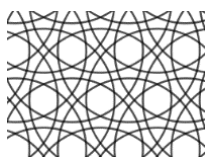


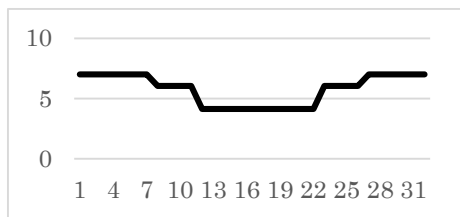
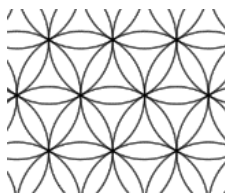
図1.4 ルーロー模様 $R(0.72)$ と交点密度のグラフ



$R(0.83)$ の交点密度
エネルギー

$$E_{pt}(0.83) = 24.118$$

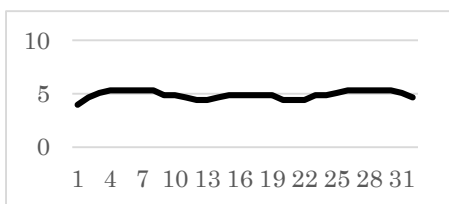
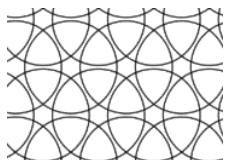
図 1 5 ルーロー模様 $R(0.83)$ と交点密度のグラフ



$R(1.03)$ の交点密度
エネルギー

$$E_{pt}(1.03) = 4.435$$

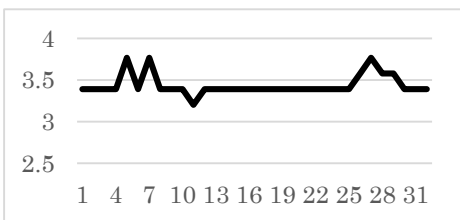
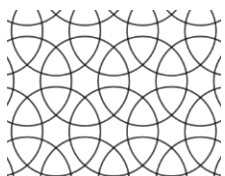
図 1 6 ルーロー模様 $R(1.03)$ と交点密度のグラフ



$R(1.23)$ の交点密度
エネルギー

$$E_{pt}(1.23) = 0.705$$

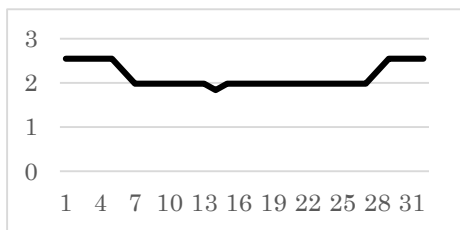
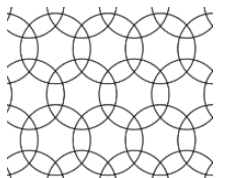
図 1 7 ルーロー模様 $R(1.23)$ と交点密度のグラフ



$R(1.32)$ の交点密度
エネルギー

$$E_{pt}(1.32) = 0.6477$$

図 1 8 ルーロー模様 $R(1.32)$ と交点密度のグラフ



$R(1.52)$ の交点密度
エネルギー

$$E_{pt}(1.5) = 0.344$$

図 1 9 ルーロー模様 $R(1.52)$ と交点密度のグラフ

7. $R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式

$R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式を求めるために、 $d - E_{pt}(d)$ のデータを整理し、そのグラフを考察することにした。このとき、前節でも述べたように、例えば、 $d = 1$ の場合、6重点だけの模様となっているが（図6）、 $E_{pt}(d)$ は2重点の個数を1としてカウントするので、6重点の場合は5としてカウントし、 $E_{pt}(1) = 8.724$ を得た。これを基準に考えた交点密度エネルギーを**相対交点密度エネルギー**と呼び、

$$E_{pt}(d)_{1.0}$$

と表すことにした。 $E_{pt}(d)_{1.0}$ はFFTのデータ数に依存しないものとして考えた量である。

一方、得られたデータの $d - E_{pt}(d)$ のグラフは指数関数のグラフのように見えた（図20）。そこで、 $d - \log(E_{pt}(d)_{1.0})$ の回帰直線を求めた（図21）。

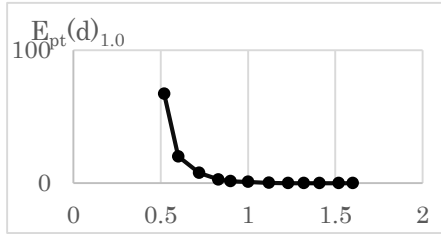


図20 $d - E_{pt}(d)$ のグラフ

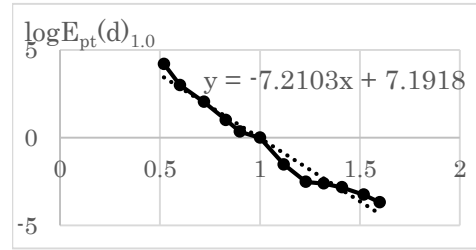


図21 $d - \log(E_{pt}(d))$ のグラフ

その結果、 $\log(E_{pt}(d)_{1.0}) = -7.2103d + 7.1918$ であり、相関係数 r は、 $r = -0.982$ で強い相関が得られた。しかし、 $0 < d < 2$ であり、 $\lim_{d \rightarrow 0} \log(E_{pt}(d)_{1.0}) = +\infty$ 、 $\lim_{d \rightarrow 2} \log(E_{pt}(d)_{1.0}) = -\infty$ であることを考慮する必要がある。そこで、 $d = 1$ のとき $\log(E_{pt}(d)_{1.0}) = 0$ であることも考慮して、

$$f(d) = \frac{6.3(d-1)}{d(d-2)}$$

という $\log(E_{pt}(d)_{1.0})$ の近似関数を考えた。まだまだ不十分ではあるが、今回はこれを使い、相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ との関係式を、 $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と書いて、

$$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}} = e^{f(d)}$$

として、相対交点密度エネルギーを表す仮の尺度とした。表3はいくつかの d に対する $E_{pt}(d)$ 、 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 、 $\log(E_{pt}(d)_{1.0})$ 、 $f(d)$ 、 $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ の数値データである。以下の予想が得られた。

予想 ルーロー模様 $R(d)$ について、 d に関する相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ は、ある単調減少な指数関数で表される。ただし、 $\lim_{d \rightarrow 0} E_{pt}(d)_{1.0} = +\infty$ 、 $\lim_{d \rightarrow 2} E_{pt}(d)_{1.0} = 0$ を満たす。

表 3 $d, E_{pt}(d)$ のデータ

d	0.52	0.60	0.72	0.83	0.90	1.00
$E_{pt}(d)$	586.508	175.850	67.402	24.118	12.396	8.724
$E_{pt}(d)_{1.0}$	67.229	20.157	7.726	2.765	1.421	1
$\log(E_{pt}(d)_{1.0})$	4.208	3.004	2.045	1.017	0.351	0
$f(d)$	4.645	3.173	1.692	0.815	0.416	0
$E_{pt}(d)_{\text{仮}}$	50.872	20.086	6.781	3.013	1.890	1

d	1.12	1.23	1.32	1.41	1.52	1.60
$E_{pt}(d)$	1.913	0.705	0.647	0.519	0.344	0.217
$E_{pt}(d)_{1.0}$	0.219	0.081	0.074	0.059	0.039	0.025
$\log(E_{pt}(d)_{1.0})$	-1.519	-2.513	-2.604	-2.830	-3.244	-3.689
$f(d)$	-0.321	-0.490	-0.560	-0.583	-0.558	-0.510
$E_{pt}(d)_{\text{仮}}$	0.464	0.217	0.106	0.045	0.011	0.003

8. ルーロー模様 $R(d)$ の交点モーメント支配因子

ルーロー模様 $R(d)$ をじっと見ていると、少し模様が振動するような錯覚を受ける。これについても模様が作る幾何学的な量が影響しているように思えた。

私はこれについて、見る視点を中心とした交点のモーメントに関係するのではないかと考えた。すなわち、見る視点を中心として単位円を考え、その単位円内にある交点を中心軸（ y 軸）より左側に多いときは左側が重く

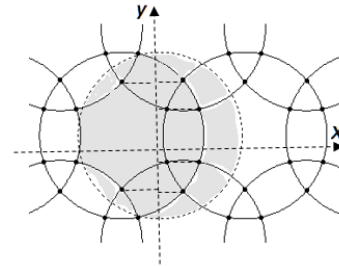


図 2.2 交点モーメント

感じ、右側に多いときは右側が重く感じる。私たちは模様を見るときに、模様のパターンのある方向へ視線をずらしながら見ていく、同時に左右のモーメントの変化を感じ取っていると考えた。そこで今回の研究では、上下に対称である軸を x 軸にとり、 x 軸上で視点を平行移動したとして、平行移動する半径 1 の円領域内の交点の（視点の縦軸となる） y 軸に関するモーメントの総和のデータを取り、得られたデータをエクセルで FFT 解析を行うことにした。

今回は、データ数 $2^6 = 64$ での FFT 解析を行ない、振動という錯覚に影響している $R(d)$ の幾何学的な量として以下を定義した。

交点モーメント支配因子の定義

平行移動しているデータ取得領域である単位円において、その y 軸に関する交点のモーメントの総和をデータとしてとり、それらの FFT 解析から得られる振幅スペクトル $C_\omega (0 \leq \omega \leq 32)$ を値の大きい順に並べる．このとき、最大な C_ω の周波数 ω_1 と、2 番目に大きい C_ω の周波数 ω_2 と、振幅比 $C_\omega(1:2) = C_{\omega_2}/C_{\omega_1}$ の 3 つの量を $R(d)$ の交点モーメント支配因子とよび、 $(\omega_1, \omega_2 | C_{2/1})$ と表す．

(例 1) $R(0.65)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (2, 1 | 0.73)$ である．

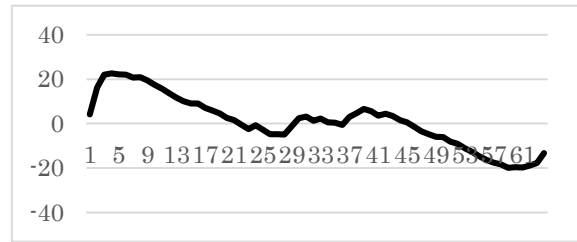
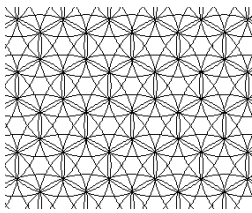


図 2 3 ルーロー模様 $R(0.65)$ と交点のモーメントのグラフ

(例 2) $R(0.81)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (4, 5 | 0.80)$ である．

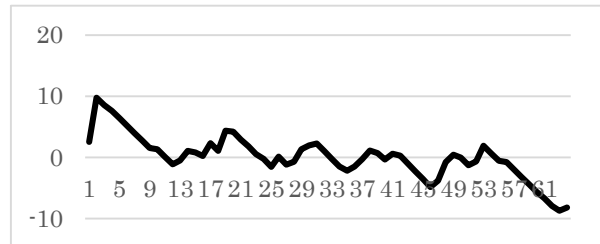
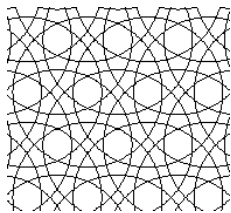


図 2 4 ルーロー模様 $R(0.81)$ と交点のモーメントのグラフ

(例 3) $R(1)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (1, 2 | 0.49)$ である．

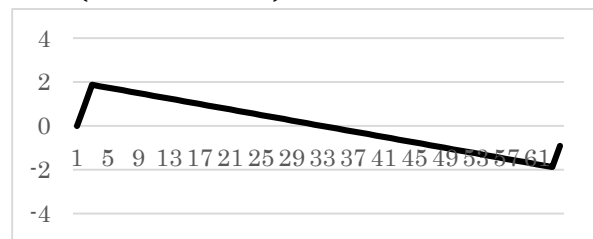
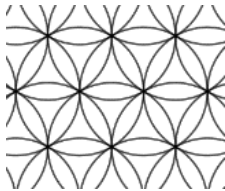


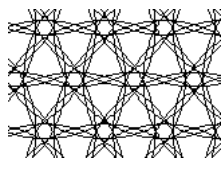
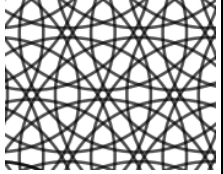
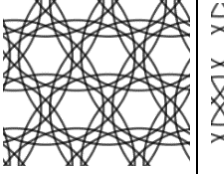
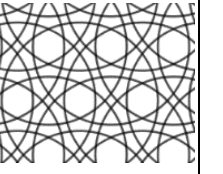
図 2 5 ルーロー模様 $R(1)$ と交点のモーメントのグラフ

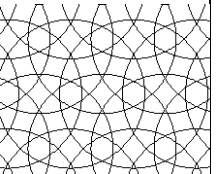
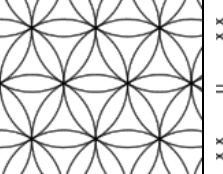
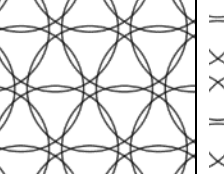
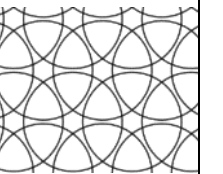
例 1 と例 2 は、どちらも交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の周波数 ω_1, ω_2 の振幅が同じくらいあるものである． $R(1)$ の場合は $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$ であるが、振幅比が 0.49 で $\omega_1 = 1$ の影響が強いものである．

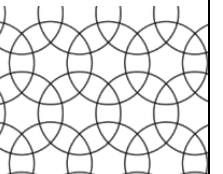
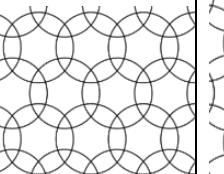
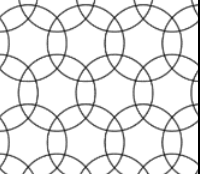
9. 交点モーメント支配因子に関する結果

表4は交点モーメント研究結果の一部で, $0.5 \leq d \leq 1.6$ の $E_{pt}(d)_{\text{仮}}$ と $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の主なデータである.

表4 主な $R(d)$ の $E_{pt}(d)_{\text{仮}}$ と $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$

d	0.54	0.6	0.7	0.8
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	39.5	20.0	7.98	3.72
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(1,3 0.28)	(1,3 0.96)	(1,4 0.20)	(1,4 0.85)
模様 $R(d)$				

d	0.85	1.0	1.1	1.2
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	2.63	1	0.53	0.27
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(3,2 0.67)	(1,2 0.49)	(1,0 0.18)	(1,3 0.39)
模様 $R(d)$				

d	1.3	1.4	1.5	1.6
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	0.13	0.049	0.015	0.003
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(2,4 0.82)	(2,3 0.93)	(4,2 0.86)	(1,2 0.52)
模様 $R(d)$				

10. 本研究で得られた成果

今回, ルーロー模様の特徴を数値的に表す研究にチャレンジした. しかし, 前節の表4をまとめるまでには, 交点密度エネルギーといった尺度や交点モーメント支配因子といった尺度を, FFT のためのデータ数に依存しないことを注意しつつ, 何度も何度も定義し直し, 尺度を決めてはデータを検討することを繰り返した. そして, 本論文で述べた交点密度エネ

ルギー $E_{pt}(d)$ と交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ を定義することができた。

さて、表4からわかるように、 $d = 1.0$ と $d = 1.6$ の交点モーメント支配因子に表れる周波数はどちらも $\omega_1 = 1$ と $\omega_2 = 2$ で $C_\omega(1:2)$ も0.5付近で、さほど変わらない。しかし、 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮の値が $R(1)$ は1であり、 $R(1.6)$ は0.003と違いを表している。それは、 $R(0.54)$ と $R(1.2)$ の比較においても同様である。 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮の値は模様の濃さを表す尺度になっていると考えられる。

$R(0.54)$ と $R(0.6)$ については、 $\omega_1 = 1$ と $\omega_2 = 3$ で $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮の値も近いが、 $C_\omega(1:2)$ の値に明確に違いが出ている。 $R(0.6)$ での $C_\omega(1:2) = 0.9$ の意味は、主因子である周波数 $\omega_1 = 1$ と $\omega_2 = 3$ の振幅が同じくらいであることを意味し、そのため $\omega_2 = 3$ の影響が強くでている模様を意味していると考えられる。 $R(0.54)$ での $C_\omega(1:2) = 0.28$ は、周波数 $\omega_2 = 3$ の振幅が周波数 $\omega_1 = 1$ の振幅に比べかなり小さいことを意味するため、 $\omega_1 = 1$ の影響が強くでている模様を意味していると考えられる。

以上のことから、今回定義した交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ は模様の濃さを表す量として捉えられ、また、交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ は、模様の複雑さを表す量として捉えられていると考えている。 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ については、 ω_1 と ω_2 の数値が1に近いほど模様は単純と判断され、 $C_\omega(1:2)$ の値は0に近いほど模様 $R(d)$ は周波数 ω_1 の影響を強く受けていると考えられる。 $C_\omega(1:2)$ の値が1に近いと周波数 ω_1 と ω_2 の振幅は等しいことを意味し、 ω_1 と ω_2 というどちらの周波数の影響も $R(d)$ は同等に受けていると考えられる。

1 1. 今後の研究の予定

今回、模様の相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ については、仮の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮を用いた。すなわち、 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮 $= e^{f(d)}$ としたとき、 $f(d)$ を

$$f(d) = \frac{6.3(d-1)}{d(d-2)}$$

という式で近似した。しかし、まだまだ実際のデータと誤差が大きく、納得できるものではない、 $f(d)$ の正確な関数を求めたい。

謝辞

本論文に対して、日本数学教育学会高専・大学部会の先生方から貴重な多くのアドバイスをいただき、とても参考になりました。ここに感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 加田紘大, 正多角形から得られるルーロー図形の研究, 代数学ミニシンポジウム 2017in 倉敷 (報告集) pp.76-85,
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2017.pdf
- [2] 加田紘大, 2次曲線で作られる凹型ルーロー三角形の掛谷問題, 代数学ミニシンポジウム 2018in 倉敷 (報告集) pp.40-50,
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2018.pdf
- [3] 河野俊丈, 結晶群, 共立出版, 2015
- [4] 澤田彩花, 平面結晶群のセル解析と行列表現, 津山高専数学クラブ活動記録, 2017
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/wallpaper_group_2017.pdf
- [5] 柴田洋一 他, 初歩から学ぶ基礎物理学 力学 I, 大日本図書, 2010

二面体群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込み

圓山夏生

津山工業高等専門学校総合理工学科（4年）

1. 研究の動機と目的

本研究は、グラフ理論の「グラフの閉曲面への埋め込み問題」という問題に取り組む。それは、現実問題として電子回路への応用も知られている。グラフとは、「ノード（頂点）とエッジ（辺）の集合で構成されたもの」である。閉曲面とは、球や一人乗りの浮き輪や二人乗りの浮き輪、一般に n 人乗りの浮き輪というものを指し、その浮き輪にある穴の数を、種数（genus）と呼び、 g という記号で表す。そして、閉曲面は g で分類できるという定理が知られている。

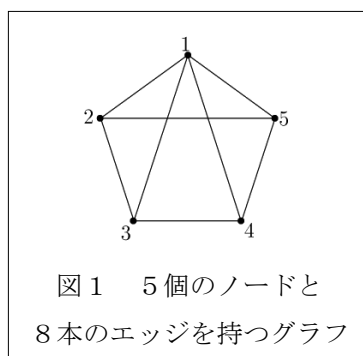
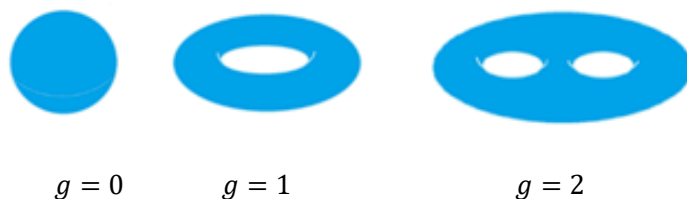


図1 5個のノードと8本のエッジを持つグラフ



$g = 0$

$g = 1$

$g = 2$

図2 閉曲面の種数 g

さて、今回の研究テーマである「グラフの閉曲面への埋め込み問題」とは、

『グラフをある閉曲面上に、どの2つのエッジも交わらないように描くとき、その閉曲面の最小種数 g を求めよ』

というものである。このとき交差しなければエッジは曲面上で自由に変形できるとする。

グラフの中には、**完全グラフ**と呼ばれる特別なものがある。それは、「任意の2個のノードを繋ぐエッジが必ず存在するグラフ」を指す。そして、完全グラフの総エッジ数は、 $n(n-1)/2$ であり、さらに、完全グラフは、

$$g = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

である閉曲面に埋め込まれ、この g が最小であるということが知られている（[2]参照）。

これを**完全グラフの最小種数公式**と呼ぶ。ここで、記号 $\lceil x \rceil$ は、 x の切り上げを表す。しかし、完全グラフでないグラフについては埋め込み公式はわかっていない。

以下、 n 個のノードを持つ完全グラフを K_n で表す。たとえば、完全グラフ K_5 を考える

と、これは完全グラフの最小種数公式より、 $g = \left\lceil \frac{(5-3)(5-4)}{12} \right\rceil = 1$ の閉曲面に埋め込まれる。

具体的な埋め込みの様子を描いたものが図3である。ここで閉曲面を上から見たとき、正面に埋め込まれたエッジを実線で、背面に埋め込まれたエッジを点線で表している。

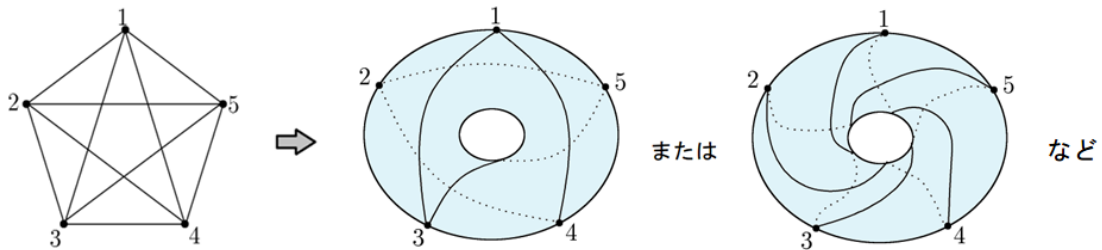


図3 完全グラフ K_5 の埋め込み

ここで、私は K_5 の $g = 1$ の閉曲面への埋め込みで回転対称をもつような埋め込みに興味をもった。対称性という視点に立つと K_5 自身も $1/5$ 回転対称と、5つの鏡映という対称性を持っている。次の節で詳細に述べるが、完全グラフの部分グラフで対称性をもったものについては、規則正しく埋め込むことができる曲面が存在するのではないかと考えた。つまり、どのような対称性を持つグラフがどのような曲面に埋め込まれるかという視点から、グラフに関する研究を行うことにした。

2. 完全グラフ K_7 と K_9 の閉曲面への埋め込み

前節で述べたように、完全グラフ K_5 については、 $g = 1$ の閉曲面へ回転対称をもつような埋め込みが存在した。では、完全グラフ K_7 や K_9 の埋め込みについてはどうだろうか。

まず、 $n = 7$ でエッジ数 $e = 21$ をもつ完全グラフ K_7 の埋め込みについて説明する。これは完全グラフの最小種数公式から $g = 1$ の閉曲面に埋め込まれる。 K_5 と同じように、私が注目した埋め込みは、以下の図4である。

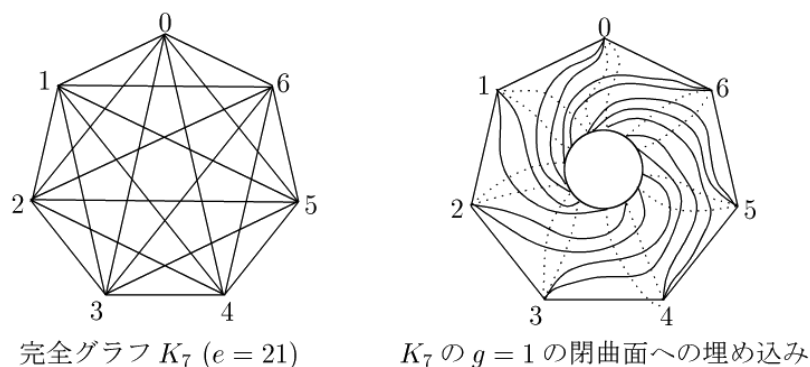


図4

完全グラフ K_7 は、それ自身で対称性を持っている。それは、 $1/7$ 回転対称と、7つの鏡

映である．そして上に描いた $g = 1$ の閉曲面への埋め込みは，穴に巻きつく形で $1/7$ 回転対称性を持っている．

次に， $n = 9$ でエッジ数 $e = 36$ をもつ完全グラフ K_9 の埋め込みは完全グラフの最小種数公式から $g = 3$ の閉曲面に埋め込まれる．やはり，私が注目した埋め込みは，以下の図 5 である．

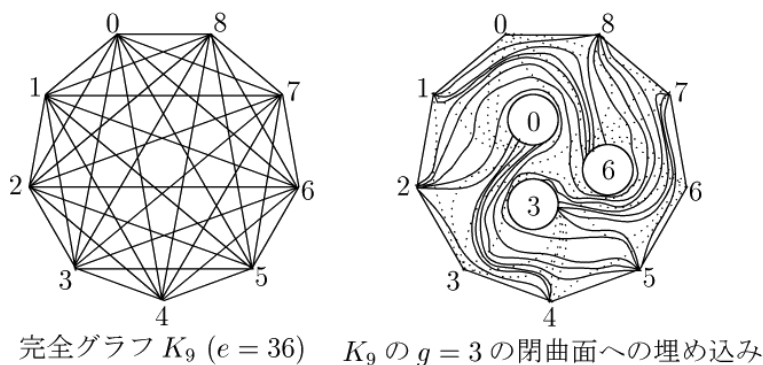


図 5

完全グラフ K_9 の対称性は， $1/9$ 回転対称と，9 つの鏡映である．そして上に描いた $g = 3$ の閉曲面への埋め込みは，穴に巻きつく形で $1/3$ 回転対称性を持っている．

以上のことから，私は，完全グラフでないものは，最低種数 g を求める公式がないのだが，しかし，ある特定の条件の下では，公式が作れるのではないかと考えた．すなわち，穴に巻きつくようにエッジを埋め込むという完全グラフの埋め込みをヒントにして対称性をもつグラフを考えれば，何らかの結果が得られるのではないかと考えた．

3. 二面体群の作用とグラフのタイプ

完全グラフ K_n は， $1/n$ 回転対称と， n 個の鏡映軸をもつ．このことは現代の数学では，二面体群や巡回群という概念を用いて表現される．まず，それらを以下に説明する．

二面体群 D_n ：例えば，正三角形は， $1/3$ 回転対称性，頂点と重心を通る直線に関する対称性（鏡映）をもつ．作用とは， $1/3$ 回転や鏡映のことを指し，作用全体を正三角形の二面体群 D_3 という．一般に，正 n 角形に作用する $1/n$ 回転や鏡映の作用全体を，正 n 角形の二面体群 D_n という．



図 6

巡回群 Z_n ：二面体群 D_n の中の鏡映を除いた $1/n$ 回転だけの作用全体のことを指す．

さて、グラフが与えられたとき、そのグラフが、 D_n 不変であるとは、 $1/n$ 回転や n 個の鏡映の作用で変化しないグラフを指す。同様に、 Z_n 不変であるとは、そのグラフが $1/n$ 回転の作用で変化しないグラフを指す。

右に示すグラフは、10個のノードと25本のエッジを持つグラフで、 D_5 不変なものである。エッジを外周とする対称性を示す図形を取り出すと、 Z_{10} 不変である正10角形が1個、 Z_5 不変である正五角形が1個(0,2,4,6,8,0)、 Z_5 不変である星型正五角形が1個(1,5,9,3,7)、残りは、 Z_5 で移り合う直線が5個((0,5), (1,6), (2,7), (3,8), (4,9))となっている。

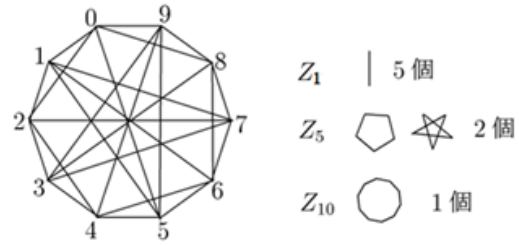


図 7

以下、本論文では、正10角形を Z_{10} で、正五角形や星型正五角形を Z_5 で、そして直線を Z_1 で表わし、このグラフを

$$G_{10}[5Z_1 \oplus 2Z_5 \oplus Z_{10}; 25] \quad (D_5 \text{不変})$$

と表すことにし、グラフ G_{10} のタイプと呼ぶ。また、以下において、 G_{10} を構成する部分グラフをそれぞれ、 $Z_1(0,5)$, $Z_1(1,6)$, $Z_1(2,7)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(4,9)$, $Z_5(0,2,4,6,8)$, $Z_5(1,5,9,3,7)$, $Z_{10}(0,1,\dots,9)$ と表す。()内は部分グラフのノードの番号を表す。

一般に、 p を素数、 q をある正の整数としたとき、

$$G_{qp}[i_1pZ_1 \oplus i_pZ_p \oplus i_{qp}Z_{qp}; e] \quad (Z_p \text{不変})$$

と書いたら、これは、その要素が、 p 個の直線 Z_1 が i_1 個、 Z_p 不変な正 p 角形が i_p 個、 Z_p 不変な正 qp 角形が i_{qp} 個で構成されていることを表し、さらに、 qp 個ノードと e 個のエッジをもつグラフであることも示すものである。ここで、 $e = i_1p + i_p \cdot p + i_{qp} \cdot (pq)$ である。そして、これをグラフ G_{qp} のタイプと呼ぶ。

この定義をもとに、改めて完全グラフ K_7 の埋め込みを考えると、 K_7 のタイプは、

$$G_7[3Z_7; 21] \quad (D_7 \text{不変})$$

であり、 $g = 1$ の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込むことができる。また、完全グラフ K_9 のタイプは、

$$G_9[4Z_9; 36] \quad (D_3 \text{不変})$$

で、 $g = 3$ の閉曲面へ Z_3 不変に埋め込むことができる。

4. ハブを経由した埋め込み

グラフの閉曲面への埋め込みを、なるべく分かりやすく行なうために、条件付きハブというものを考案した。これについて局所的な埋め込みを表した図8を使って説明する。

番号付きの点はノードの番号を表わし、番号付きの円は閉曲面の穴の番号を表す。そし

て、 h_A, h_B は閉曲面の上面に設置されたハブ（以下、**上面ハブ**という）を、 h_a, h_b は閉曲面の下面に設置されたハブ（以下、**下面ハブ**という）を表し、 h_3, h_6 は閉曲面の穴付近に設置されたハブ（以下、**両面ハブ**という）で、実線から点線に移す役割を果たすものである。さらに $\bar{h}_3, \bar{h}_6$ は閉曲面の穴付近に設置された両面ハブで、点線から実線に移す役割を果たすものである。以上のことから、ハブを使って表された局所的な図では、エッジの埋め込みをノードが並べられた直線 L の上側だけで行うものとしてもよいので、以下そのようにする。

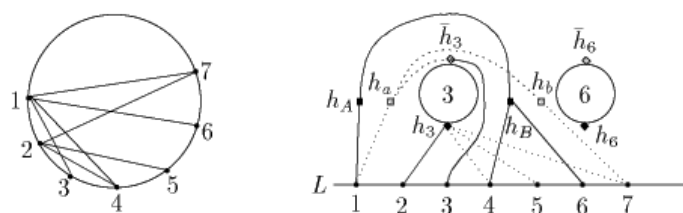


図8（グラフと条件付きハブを用いた埋め込み）

図8は左図のグラフをある閉曲面の穴3と穴6の周りに埋め込んだ様子で、ハブを用いて表したものである。具体的には、エッジ(1,4)と(1,6)はハブ h_A と h_B を経由して、エッジ(1,7)はハブ h_a と h_b を経由して、エッジ(1,3)はハブ h_a と $\bar{h}_3$ を経由して埋め込まれている。そして、エッジ(2,4), (2,5)と(2,7)はいずれもハブ h_3 経由して埋め込まれている。このようにハブを使うと、埋め込まれたエッジの中で束ねられるものは見かけ上1本のエッジとして表せるため、描くエッジの本数を少なくできるという利点がある。

定義1. エッジ (s_1, t_1) がハブ h_* を経由して埋め込まれるとき、 (s_1, t_1) は h_* 経由で埋め込み可能であるという。

定義2. 記号 $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ を、 h_* 経由の局所埋め込みという。このとき番号 i_k, j_k は[]内のノードの番号であり、左から右に並んだ順の番号で、 j_1 は i_n の右に位置する。さらに $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ がハブ h_* に入るノードを、 $[j_1, j_2, \dots, j_r]$ がハブ h_* から向かうノードを意味する。

閉曲面上の領域でその内部の任意のループを1点に収縮（可縮という）できるものを単連結領域という（図10）．ところで、グラフの埋め込みに関して、閉曲面上の閉領域内にループとして埋め込まれた曲線については、可縮を行っても閉曲面の種数は変化しない．したがって、単連結領域内での連続変形に可縮は含めてもよい

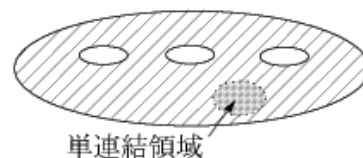


図10（種数3の閉曲面上の単連結領域）

位相幾何学におけるジョルダン曲線の定理を確認する．

ジョルダン曲線の定理． 単連結領域 D 上に置かれた自己交差をもたない閉曲線 Γ （ジョルダン曲線）は、 D を内側と外側に分ける．

次の命題は、ジョルダン曲線の定理から直ちに示される．

命題1． 単連結領域 D 内のジョルダン曲線 Γ の内側にある点 a と外側にある点 b を考える．このとき、エッジ (a, b) は Γ と交差する．

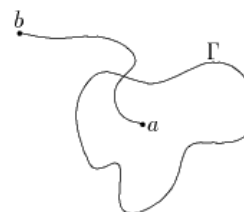


図9

命題2． 2つのエッジ (a, b) と (a, c) が曲面上の単連結領域 D 内に、自己交差しない曲線としてそれぞれ埋め込まれ、しかし2つの曲線は交差している（無限交差の場合も含む）とする．このとき、それらの交点を連続変形により全て外して自己交差しない曲線 (b, a, c) とすることができる．

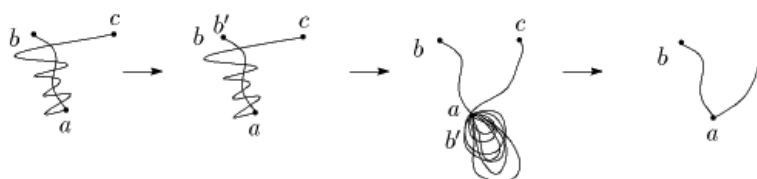


図11

（証明）まず、埋め込まれた曲線も (a, b) と (a, c) と書くことにする．単連結領域内に点 b' を考え、それを b と重ねて置く．そして b' を曲線 (a, b) に沿って a の方向へスライドさせる．このとき、もし b' が (a, b) と (a, c) の交点と出会ったなら、その交点も同時にスライドさせる． b' が a に達したら、曲線 (a, c) は単連結領域内の点 a の周りにループをもつ曲線となる．そこでそれらのループを全て a に可縮することで、自己交差しない曲線 (b, a, c) が得られる．

Q. E. D.

次に、ハブ h_* 経由の局所埋め込み $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ に関する以下の3つの命題を証明する。

命題3. ハブ h_* は上面ハブまたは下面ハブとし、 h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1], [j_1, j_2])$ とする。そしてノード s, t について以下の(1), (2)を考える。ただし、 t は s の右側にあるとする。

(1) s, t はどちらも i_1 と j_1 の間のノードである。ただし、 $s = i_1, t = j_1$ も許す。

(2) s は i_1 の左側で t は j_2 の右側にある。ただし、 $s = i_1, t = j_2$ も許す。

このとき、 s, t が(1)か(2)のどちらかを満足するならば、エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能である。

(証明) (1)の場合、エッジ (s, t) と (i_1, j_1) を考えると、命題2より (s, t) と (i_1, j_1) は交差しないように埋め込むことができ、このとき (s, t) は (i_1, j_2) とも交差しない。(2)の場合も同様に、命題2より (s, t) と (i_1, j_2) は交差しないように埋め込むことができる。このとき (s, t) は (i_1, j_1) とも交差しない。したがって、エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能である。

Q. E. D.

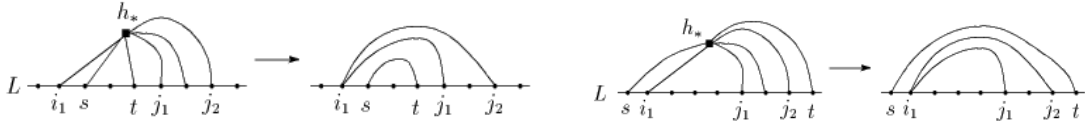


図1 2

命題4. ハブ h_* は上面ハブまたは下面ハブとし、 h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1], [j_1, j_2])$ とする。そしてノード s, t について以下の(1), (2)を考える。ただし、 t は s の右側にあるとする。

(1) s は i_1 の左側で t は i_1 と j_2 の間にある。(2) t は j_2 の右側で s は i_1 と j_2 の間にある。

このとき、 s, t が(1)か(2)のどちらかを満足するならば、エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能ではない。

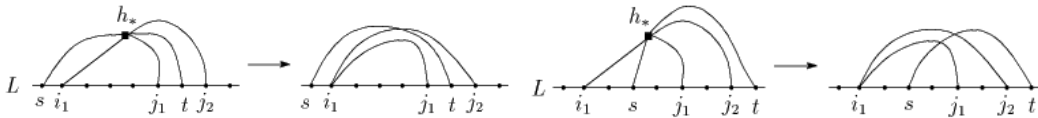


図1 3

(証明) (1)のとき、ハブを外してループするエッジ (i_1, j_1, j_2, j_1) を考えるとそれはジョルダン曲線 Γ となる。このとき、エッジ (s, t) の埋め込みは L の上側で考えているため、 (s, t) は Γ の内点を通過しなければならない。したがって、命題1より (s, t) は (i_1, j_1) またはエッジ

(i_1, j_2) と必ず交わる．(2)の場合も(1)と同じ理由からエッジ (s, t) はエッジ (i_1, j_1) またはエッジ (i_1, j_2) と必ず交わる．したがって， (s, t) は， h_* 経由で埋め込み可能ではない．Q. E. D.

命題 5. ハブ h_* は両面ハブとし， h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1], [j_1, j_2])$ とする．このときノード s, t について以下が成り立つ．ただし s は t の左側にあるとする．

(1) s は i_1 の左側で t は j_1 と j_2 の間にあるとき，エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能ではない．

(2) s は i_1 の右側にあるとき，エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能である．ただし， $s = i_1$ も許す．

(証明) (1)の場合(図 1 4)， h_* を外して穴 N を考え，ノード (i_1, j_1) の実線から点線に変わる点を j'_1 とする．同様にノード (i_1, j_2) の実線から点線に変わる点を j'_2 とする．そして，ループするエッジ $(j_1, j'_1, j'_2, j_2, j_1)$ を考えるとそれはジョルダン曲線 Γ となる．このとき，エッジ (s, t) の埋め込みは L の上側で考えているため， (s, t) は Γ の内点を通すしなければならない．したがって，命題 1 より (s, t) は (i_1, j_1) またはエッジ (i_1, j_2) と必ず交わる．よって， (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能ではない．(2)の場合が成り立つことは明らかである(図 1 5)．Q. E. D.

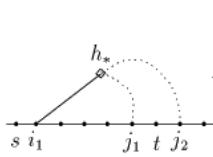


図 1 4

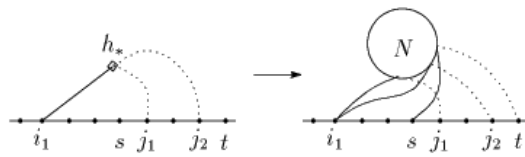


図 1 5

上の 3つの命題は，以下で挙げる定理の証明に用いる．そのために，例えば，エッジ (s, t) が，点 s からハブ h_X と h_Y を実線で経由して， h_Y から t まで点線で埋め込まれることを，

$$(s - h_X - h_Y \cdots t)$$

で表す．

定義 3. ある閉曲面上に h_* と h_o という 2つのハブがあり， h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ ， h_o 経由の局所埋め込みを $h_o([k_1, k_2, \dots, k_n], [l_1, l_2, \dots, l_r])$ とする．もし $k_1 - i_1 = \dots = k_n - i_n = l_1 - j_1 = \dots = l_r - j_r = u$ が成り立つとき，ハブ h_* と h_o は対等であるという．このとき， h_o 経由の局所埋め込みを， h_* を右方向へ u 平行移動させた埋め込みという．

命題 6. ハブ h_* の局所埋め込みを $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ とする．このとき， $k_1 = j_r$ で，さらに， $k_1 - i_1 = \dots = k_n - i_n = l_1 - j_1 = \dots = l_r - j_r = u$ となるノード $k_1, k_2, \dots, k_n$ と $l_1, l_2, \dots, l_r$ を用いると，新たにハブ h_o を置き，必要なら閉曲面に穴を空け，そして h_* を右方向へ u 平行移動させた埋め込みとなる h_o 経由の局所埋め込みを作ることができる．

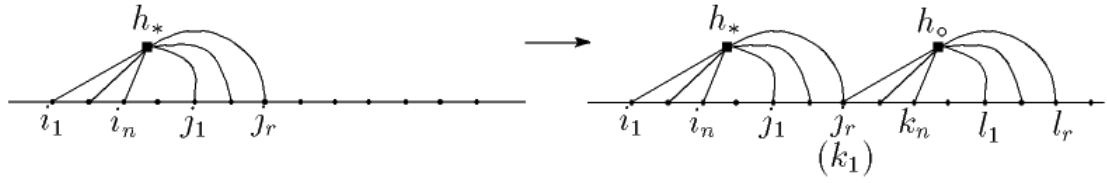
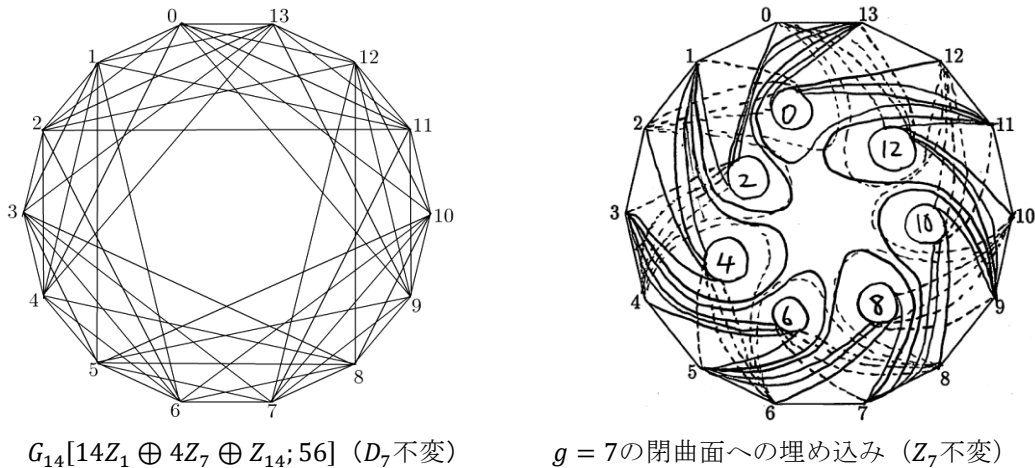


図 1 6

(証明) ハブ h_* が両面ハブであれば命題が成り立つことは明らかである. ハブ h_* は上面ハブとする. h_o と連結しているノードは全て k_1 の右側に位置するので, h_o をノードと考え, エッジ (k_1, h_o) が h_* 経由の局所埋め込みのどのエッジとも交差しないことを示せば十分である. さらに, h_* と連結しているノードは全て j_r の左側に位置するので, h_* をノードと考え, エッジ (h_*, j_r) がエッジ (k_1, h_o) と交差しないことを示せば十分となる. そして命題 2 より (h_*, j_r) と (k_1, h_o) は交差しないように埋め込むことができる. ノード $k_1, k_2, \dots, k_n$ と $l_1, l_2, \dots, l_r$ の配置の条件と定義 3 から, h_o 経由の局所埋め込みは, h_* を右へ u 平行移動させた埋め込みとなる. Q. E. D.

5. D_p 不変な G_{2p} の $g = p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

完全グラフではない場合は, 巡回群 Z_p 不変なグラフについて研究を行えばよいと考えた. K_{14} は $g = 10$ の曲面に埋め込めるが, 少しエッジを減らして, グラフ $G_{2 \times 7}$ のタイプが $G_{14}[14Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 56]$ (D_7 不変) を考えると, これが種数 7 の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込み可能であることがわかった. それが図 1 7 である.



$G_{14}[14Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 56]$ (D_7 不変)

$g = 7$ の閉曲面への埋め込み (Z_7 不変)

図 1 7

ここで, G_{14} を構成する部分グラフは, $Z_{14}(0, 1, 2, \dots, 13)$, $Z_7(0, 2, 4, \dots, 12)$, $Z_7(0, 4, 8, \dots, 10)$, $Z_7(1, 3, 5, \dots, 13)$, $Z_7(1, 5, 9, \dots, 11)$, と 7 本のエッジ $Z_1(1, 4)$, $Z_1(7, 10)$, $Z_1(13, 2)$, $Z_1(5, 8)$, $Z_1(11, 0)$, $Z_1(3, 6)$, $Z_1(9, 12)$ と 7 本のエッジ $Z_1(1, 6)$, $Z_1(7, 12)$,

$Z_1(13,4)$, $Z_1(5,10)$, $Z_1(11,2)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(9,0)$ である．そこで，これを一般化して定理を示す．

定理 1. p を7以上の素数とする．このとき， $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{2p} で，そのタイプが $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ となるものが存在する．

(証明) 球面を用意し， $2p$ 個のノードを球面上の1つの大円上に $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 2p-1$ と番号の順序に従い並べる．そして p 個の穴を開け，種数 p の閉曲面を作る．穴の番号は， $0, 2, 4, \dots, 2p$ とし，ノードと同じ番号の近くの穴に割り振る．

まず，穴2の周りの局所的な埋め込みを命題5を利用して完成させる．ハブを使った具体的な埋め込みが図18である．以下，この埋め込みを構成する．

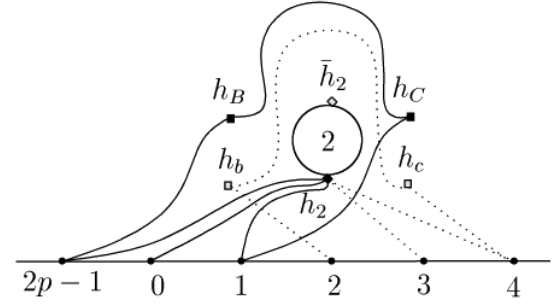


図18 (穴2の周りの埋め込み)

- (1) エッジ $(0,4)$ は $(0-h_2 \dots 4)$ として埋め込む．
- (2) 命題5より，エッジ $(2p-1,3)$ は $((2p-1)-h_2 \dots 3)$ として埋め込む．
- (3) 命題5より，エッジ $(2p-1,4)$ は $((2p-1)-h_2 \dots 4)$ として埋め込む．
- (4) 命題5より，エッジ $(1,4)$ は $(1-h_2 \dots 4)$ として埋め込む．
- (5) エッジ $(2,4)$ は $(2 \dots h_b \dots h_c \dots 4)$ として埋め込む．
- (6) エッジ $(2p-1,1)$ は $((2p-1)-h_B-h_C-1)$ として埋め込む．

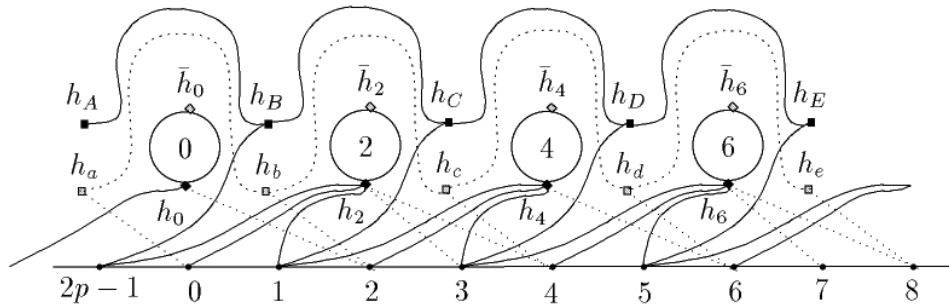


図19

(穴2の周りの各ハブを経由した埋め込みの右方向へ2平行移動させた埋め込み)

以上より，穴2の周りの埋め込みが完成する．そして命題6により，上面に埋め込まれた実線のエッジは，穴2の周りの各ハブを右方向へ2平行移動させた埋め込みとすることがで

きる．必要なら穴4を適当に移動させて穴4の周りの埋め込みとする．同様に，命題6により，下面に埋め込まれた点線のエッジも穴2の周りの各ハブを右方向へ2平行移動させた埋め込みとすることができる．したがって，この平行移動を p 回繰り返すことで，最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる．

同時に， G_{2p} を構成する部分グラフが， $Z_{2p}(0,1,2,\dots,(2p-1))$ ， $Z_p(0,2,\dots,(2p-2))$ ， $Z_p(0,4,\dots,(2p-4))$ ， $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ ， $Z_p(1,5,\dots,(2p-3))$ ， p 本のエッジ $Z_1(1,4)$ ， $Z_1(7,10)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),(2p-2))$ と， p 本のエッジ $Z_1(1,6)$ ， $Z_1(7,12)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),0)$ であることもいえた．これにより， G_{2p} のタイプが $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ であることもわかった．

最後に，このグラフ G_{2p} が D_p 不変であることを示す．ノード0と $2p-1$ の間の中点とノード $p-1$ と p の間の中点とを結んだ直線を L とする．直線を L について G_{2p} が対称であれば， G_{2p} は Z_p 対称であることは明らかであるから D_p 不変となる．

直線 L について対称な点があることを示すには $a+b=2p-1$ となる番号 a, b のノードが存在すればよい．明らかに，部分グラフ $Z_{2p}(0,1,2,\dots,(2p-1))$ は直線 L について対称である．そして $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ と $Z_p(0,2,\dots,(2p-2))$ が直線 L について対称である．実際， $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ の中のエッジ $(2k-1, 2k+1)$ とエッジ $(2(p-k), 2(p-k-1))$ は， $2k-1+2(p-k)=2k+1+2(p-k-1)=2p-1$ より対称である．同様にして， $Z_p(0,4,\dots,(2p-4))$ と $Z_p(1,5,\dots,(2p-3))$ も直線 L について対称である． p 本のエッジ $Z_1(1,4)$ ， $Z_1(7,10)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),(2p-2))$ についてもこの直線 L について対称である．実際， $Z_1(k, (k+3))$ と $Z_1((2p-k-1), (2p-k-4))$ を考えると，

$$k + (2p - k - 1) = (k + 3) + (2p - k - 4) = 2p - 1$$

より対称である．同様にして， p 本エッジ $Z_1(1,6)$ ， $Z_1(7,12)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),0)$ も $Z_1(k, (k+5))$ と $Z_1((2p-k-1), (2p-k-6))$ を考えると

$$k + (2p - k - 1) = (k + 5) + (2p - k - 6) = 2p - 1$$

より対称である．したがって， G_{2p} は D_p 不変である．Q.E.D.

定理1に関連して，以下の予想を立てている．

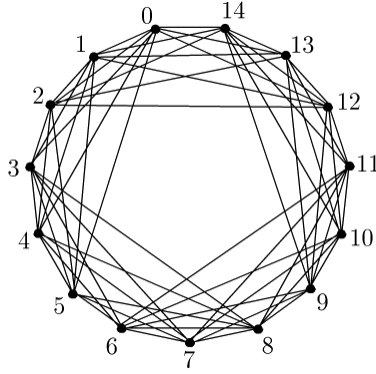
予想1. G_{2p} を $g=p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の D_p 不変な部分グラフとする($p \geq 7$)．このとき， G_{2p} の総エッジ数 e の最大値は $8p$ である．

6. D_p 不変な G_{3p} の $g=p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

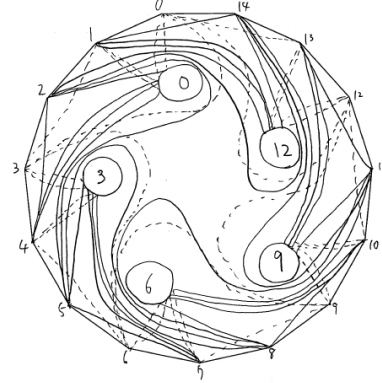
D_p 不変なグラフ G_{2p} の研究の研究に引き続き，完全グラフではない Z_p 不変なグラフ G_{3p} について研究した．

図20は，タイプが $G_{15}[15Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) であるグラフを， $g=5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込んだ図である． G_{15} を構成する部分グラフは， $Z_{15}(0,1,2,\dots,14)$ ， $Z_{15}(0,2,4,\dots,11,13)$ ， $Z_5(0,3,6,9,12)$ ， $Z_5(1,4,7,10,13)$ ， $Z_5(2,5,8,11,14)$ と5本のエッジ

$Z_1(0,4), Z_1(3,7), Z_1(6,10), Z_1(9,13), Z_1(12,1)$, 5本のエッジ $Z_1(0,5), Z_1(3,8), Z_1(6,11), Z_1(9,14), Z_1(12,2)$ と5本のエッジ $Z_1(1,5), Z_1(4,8), Z_1(7,11), Z_1(10,14), Z_1(13,2)$ である．これを以下の定理2のように一般化できる．



$G_{15}[15Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (D_5 不変)



$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

図 2 0

定理 2. p を5以上の素数とする．このとき， $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{3p} で，そのタイプが $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ となるものが存在する．

(証明) 球面を用意し， $3p$ 個のノードを球面上の1つの大円上に $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 3p-1$ と番号の順序に従い並べる．そして p 個の穴を開け，種数 p の閉曲面を作る．穴の番号は， $0, 3, 6, \dots, 3p-3$ とし，ノードと同じ番号の近くの穴に割り振る．

まず，穴0の周りの局所的な埋め込みを命題5を利用して完成させる．ハブを使った具体的な埋め込みが図21である．以下，この埋め込みを構成する．

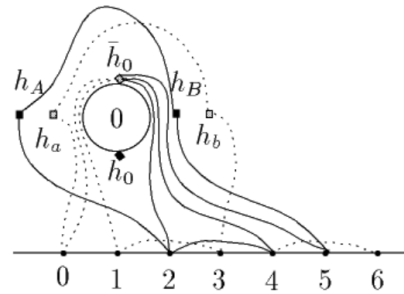


図 2 1

- (1) 4個のノード $0, 2, 4, 6$ を結んだエッジは $(0 \dots \bar{h}_0 - 2 - 4 \dots 6)$ として埋め込む．
- (2) 命題5より，エッジ $(0,4)$ は $(0 \dots \bar{h}_0 - 4)$ として埋め込める．
- (3) 命題5より，エッジ $(0,5)$ も $(0 \dots \bar{h}_0 - 5)$ として埋め込める．
- (4) 命題5より，エッジ $(1,5)$ は $(1 \dots \bar{h}_0 - 5)$ として埋め込める．
- (5) 命題5より，エッジ $(1,4)$ は $(1 \dots \bar{h}_0 \dots 4)$ として埋め込める．
- (6) エッジ $(0,3)$ は $(0 \dots h_a \dots h_b \dots 3)$ として埋め込む．
- (7) エッジ $(2,5)$ は $(2 - h_A - h_B - 5)$ として埋め込む．

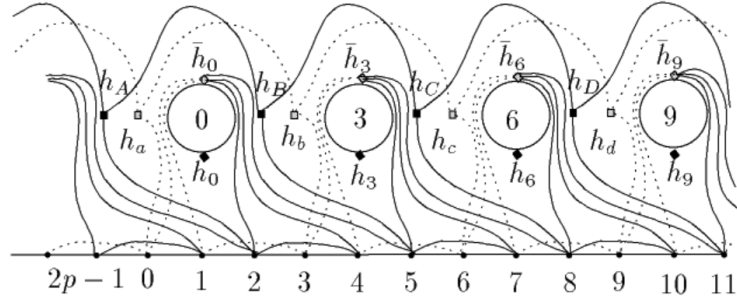


図 2 2

以上より，穴0の周りの埋め込みが完成した．そして命題6により，上面に埋め込まれた実線のエッジは，穴0の周りの各ハブを右方向へ3平行移動させた埋め込みとすることができる．必要なら穴3を適当に移動させて穴3の周りの埋め込みとする．同様に，命題6により，下面に埋め込まれた点線のエッジも穴0の周りの各ハブを右方向へ3平行移動させた埋め込みとすることができる．したがって，この平行移動を p 回繰り返すことで，最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる．

同時に， G_{3p} を構成する部分グラフが， $Z_{3p}(0,1,\dots,(3p-1))$ ， $Z_{3p}(0,2,\dots,(3p-1))$ ， $Z_p(0,3,\dots,(3p-3))$ ， $Z_p(1,4,\dots,(3p-2))$ ， $Z_p(2,5,\dots,(3p-1))$ ， p 本のエッジ $Z_1(0,4)$ ， $Z_1(3,7),\dots,Z_1((3p-3),1)$ と， p 本エッジ $Z_1(0,5)$ ， $Z_1(3,8)$ ， $Z_1(6,11),\dots,Z_1((3p-3),2)$ と， p 本エッジ $Z_1(1,5)$ ， $Z_1(4,8),\dots,Z_1((3p-2),2)$ であることもいえた．これにより， G_{3p} のタイプが $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ であることもわかった．

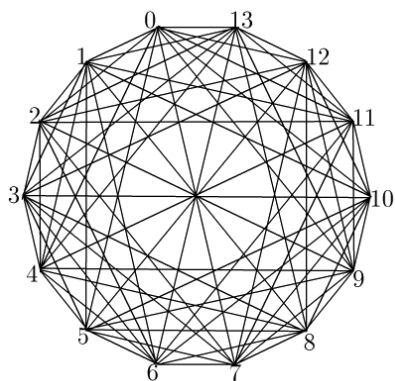
また， G_{3p} が D_p 不変である証明は，定理1と同様にして，ノード0と $3p-1$ の間の中点とノード $\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}$ とを結んだ直線を L とし， L について $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ が対称であることから示される．Q.E.D.

定理2に関連して，以下の予想も立てている．

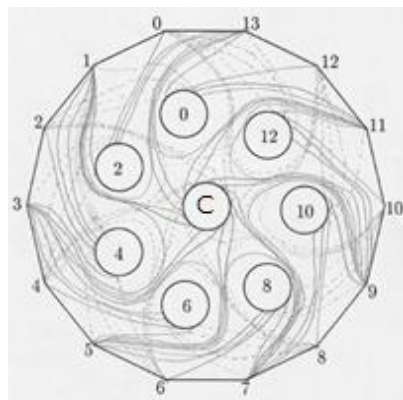
予想 2. G_{3p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{3p} の D_p 不変な部分グラフとする($p \geq 5$)．このとき， G_{3p} の総エッジ数 e の最大値は $12p$ である．

7. D_p 不変な $G_{\alpha p}$ の $g = p + 1$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

節5と節6で扱った埋め込みから，各曲面の中心に穴を増やすことで，エッジ数を増やしても Z_p 不変性を崩さないような $D_{\alpha p}$ 不変なグラフを作ることができるのではないかと考えた．図2.3は， D_7 不変なグラフ $G_{14}[28Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 70]$ の $g = 8$ の閉曲面への Z_7 不変な埋め込みの様子である．



$G_{14}[28Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 70]$ (D_7 不変)



$g = 8$ の閉曲面への埋め込み (Z_7 不変)

図 2 3

この埋め込みを一般化し定理 1 と同様な手法で、以下に挙げる定理 3 から定理 6 も証明することができた。

定理 3. p を 7 以上の素数とする. このとき, $g = p + 1$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{2p} で, そのタイプが $G_{2p}[4pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 10p]$ となるものが存在する.

定理 3 で得られる具体的な G_{2p} を構成する部分グラフは, 定理 1 の証明の中で挙げたものに p 本エッジ $Z_1(1,8), Z_1(3,10), \dots, Z_1((p-1), p+6)$ と p 本エッジ $Z_1(1,10), Z_1(3,12), \dots, Z_1(p-1, p+8)$ を追加したものである. 図 2 4 は, 証明に用いた平行移動する穴 2 と中心に開けた穴 C の周りの埋め込みであり, 各ハブを右方向へ 2 平行移動させた埋め込みとすることができ, さらに, この平行移動を p 回繰り返すことで, 最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる.

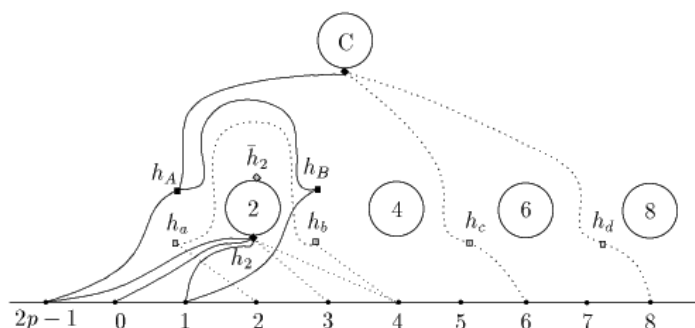
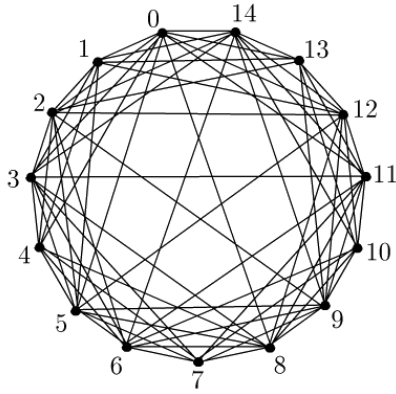
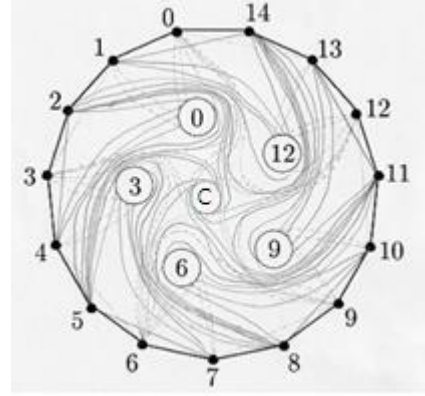


図 2 4

また、図 2 5 は、 G_{15} の形で D_5 不変なグラフ $G_{15}[25Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 70]$ の $g = 6$ の閉曲面への Z_5 不変な埋め込みの様子である．この埋め込みを一般化し定理 2 と同様な手法で、以下の定理 4 を証明することができた．



$G_{15}[25Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 70]$ (D_5 不変)



$g = 6$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

図 2 5

定理 4. p を 5 以上の素数とする．このとき、 $g = p + 1$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{3p} で、そのタイプが $G_{3p}[5pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 14p]$ となるものが存在する．

定理 4 で得られる具体的な G_{3p} を構成する部分グラフは、定理 2 の証明の中で挙げたものに p 本エッジ $Z_1(2,6), Z_1(5,9), \dots, Z_1(p-1, p+3)$ と p 本エッジ $Z_1(2,9), Z_1(5,12), \dots, Z_1(p-1, p+6)$ を追加したものである．図 2 6 は、証明に用いた平行移動する穴 0 の周りの埋め込みであり、各ハブを右方向へ 2 平行移動させた埋め込みとすることができ、さらに、この平行移動を p 回繰り返すことで、最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる．

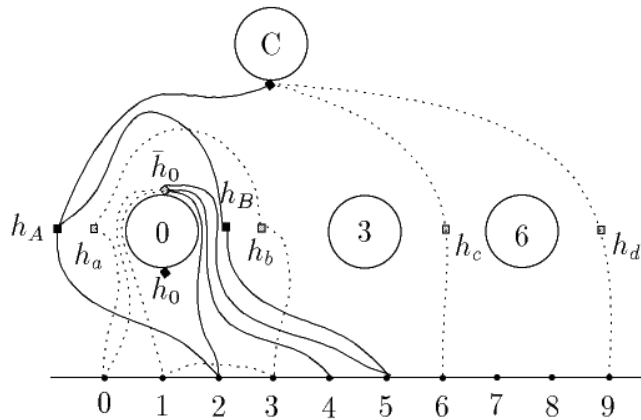


図 2 6

定理 5. p_1 を 5 以上の素数, p_2 を $p_2 \geq p_1$ なる素数とする. このとき, $g = p_2$ の閉曲面へ Z_{p_2} 不変に埋め込まれる Z_{p_2} 不変なグラフ $G_{p_1 p_2}$ で, そのタイプが $G_{p_1 p_2}[2p_2 Z_1 \oplus 2Z_{p_2} \oplus 3Z_{p_1 p_2}; (3p_1 + 4)p_2]$ となるものが存在する.

図 2 7 は, 証明に用いた平行移動する穴 0 の周りの埋め込みであり, 各ハブを右方向へ p_1 平行移動させた埋め込みとすることができ, さらに, この平行移動を p_2 回繰り返すことで, 最終的に得られた埋め込みは Z_{p_2} 不変となる. ただし, ノード 1 と D の間のノード X についても, $(X - h_0 \cdots (X + 2)), (X - h_0 \cdots (X + 3))$ という埋め込みがある.

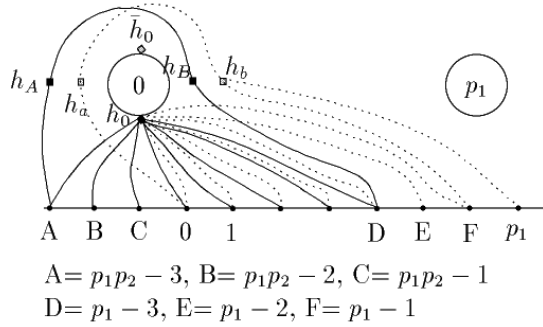


図 2 7

定理 6. p_1 を 5 以上の素数, p_2 を $p_2 \geq p_1$ なる素数とする. このとき, $g = p_2 + 1$ の閉曲面へ Z_{p_2} 不変に埋め込まれる Z_{p_2} 不変なグラフ $G_{p_1 p_2}$ で, そのタイプが $G_{p_1 p_2}[4p_2 Z_1 \oplus 2Z_{p_2} \oplus 3Z_{p_1 p_2}; (3p_1 + 6)p_2]$ となるものが存在する.

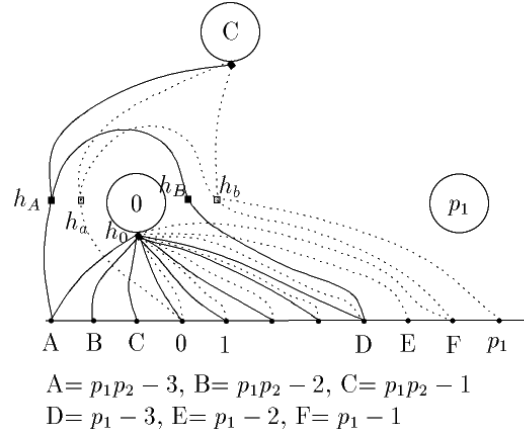


図 2 8

図 2 8 は, 証明に用いた平行移動する穴 0 の周りの埋め込みであり, 各ハブを右方向へ p_1 平行移動させた埋め込みとすることができ, さらに, この平行移動を p_2 回繰り返すことで, 最終的に得られた埋め込みは Z_{p_2} 不変となる. ただし, ノード 1 と D の間のノード X につ

いても, $(X - h_0 \cdots (X + 2)), (X - h_0 \cdots (X + 3))$ という埋め込みがある.

8. 本研究で得られた成果

本研究では, ある種の D_p 不変なグラフに関して埋め込むことができる閉曲面の種数 g を決定するだけでなく, 具体的な $\mathbb{Z}_p$ 不変に埋め込む方法を示したことが成果である. しかし, これらが最低種数であることを示すことはできなかった.

9. 今後の研究の予定

(1) 今回の研究を行なう中で, グラフ自体に表れるエッジの交点数をノードで割った量 (交点密度と呼んでいる) が埋め込む閉曲面の種数と何か関係があるのではないかと考えた. このことについて取り組みたい.

(2) グラフ理論は四色問題とも関係が深いことが知られているので, 今回示した定理を利用して, 埋め込まれたグラフによって閉曲面が何色に塗り分けられるのかについて研究しようとも考えている.

謝辞

本論文に対して, 日本数学教育学会高専・大学部会の先生方から貴重な多くのアドバイスをいただき, とても参考になりました. ここに感謝申し上げます.

参考文献

- [1] 野口健太, 平面グラフ・曲面上のグラフ, オペレーションズ・リサーチ学会, 2016 年, 12 月号, pp. 832-836
- [2] 小舘崇子, グラフの曲面への埋め込みについて, 東京女子大学紀要論集. 科学部門報告 / 東京女子大学学会 編, 第 62 巻, pp. 1931-1942, 2011 年

コラッツ問題とΛコラッツ問題

草加 修宏

津山工業高等専門学校総合理工学科（2年）

1. 研究の目的と動機

1年生の数学の授業で使われた教材の中に、コラッツ問題[1]という未解決問題があり、とても興味をもった。その問題では、任意の自然数 a について、 a が偶数であれば $a/2$ とし、奇数であれば $3a+1$ という変換を考える。これをコラッツ変換 $C(a)$ と呼ぶ。すなわち、

$$C(a) = \begin{cases} 3a+1 & (a \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{a}{2} & (a \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。コラッツ問題とは、“有限回コラッツ変換を繰り返すと、どんな自然数 a も1に変換される”というものである。コラッツ問題は、1937年にローター・コラッツが提示したことに由来し、これまで多くの人たちが興味を示してきた。しかし、コラッツ問題を解くことは難しく、数学者ポール・エルディシュさえも「数学はまだこの種の問題に対する用意ができていない」と述べている。したがって、その証明に真正面から取り組むことは私には難しく思われた。そこで、私はコラッツ問題を別な視点からとらえ、新しい類似の問題を提示できないかと考えた。

2. コラッツモデルと先行研究の要約

コラッツ操作の定義に従うと、例えば $a=5$ ならば $C(5)=16$ である。そして得られた値16にコラッツ操作を行うと、 $C(16)=8$ 、さらにこの操作を繰り返すと、 $C(8)=4$ 、 $C(4)=2$ 、 $C(2)=1$ 、 $C(1)=4$ 、 $C(4)=2$ 、 $C(2)=1$ となる。5を初期値 a_0 として、数列

$$5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$$

が得られることを意味する。以下を定義する。

定義1. n を自然数とし、初期値を a_0 とした $a_n = C(a_{n-1})$ を、初期値 a_0 のコラッツ数列といい、 $C[a_0]$ で表す。そして、 $C[a_0]$ において、 a_n が $n=k$ のとき $a_k=1$ で、その後、 $1, a_{k+1}, \dots, a_r, 1$ とループするとき、 $C[a_0]$ は安定状態 $1, a_{k+1}, \dots, a_r, 1$ に達するという。

定義1を用いると、コラッツ問題は、「どんな a_0 のコラッツ数列も $C[a_0]$ 安定状態 $1, 4, 2, 1$ に達するか」というものとなる。

T. Oliveira e Silva [2]は、2009 年までに、コンピュータにより以下の結果を示した。

Silva の解析結果. $1 \leq a_0 \leq 20 \times 2^{58}$ の任意の a_0 について、 $C[a_0]$ は安定状態 1,4,2,1に達する。

私は、研究を始めた頃、Silva の解析結果を超えるような結果を出し、さらにコラッツ問題を解いてみたいとも思った。そして a_0 の範囲を広げるために、数列からわかるいくつかの性質をもとにアルゴリズムを考え、プログラムを組んで研究してみた。しかし、得られるデータからは何もわからない状態が続く、コラッツ問題の難しさを痛感した。そこで、考え方を変えて、コラッツ問題を別な視点からとらえ、新しい類似の問題を提示しようという方針を立てた。

3. コラッツ変換を別な視点から捉える

コラッツ変換 $C(a)$ を以下のように見直した。

- (1) コラッツ変換 $C(a)$ において、 a が奇数ならば、 $C(a) = 3a + 1$ と変換されるが、これは必ず偶数である。
- (2) したがって最初から、 a が奇数のときは、以下のようにできる。

$$C(a) = \frac{3a + 1}{2} = 1.5a + 0.5$$

- (3) それならば、 a が奇数のとき

$$C(a) = \text{Int}(1.5a)$$

としてもよいのではないか。ここで $\text{Int}(x)$ は x の整数部を表す。しかし、例えば、 $a_0 = 7$ から変換 $C(a) = \text{Int}(1.5a)$ を繰り返すと7, $\text{Int}(1.5 \times 7) = 10, 5, \text{Int}(1.5 \times 5) = 7$ とループしてしまう。

- (4) $C(a) = 1.5a + 0.5$ の後半の+0.5はコラッツ問題となるための補正項だと考えられる。
- (5) 補正項なしにコラッツ問題のような問題を作ることはいかなるだろうか。

以上の議論から、以下を定義した。

定義2. (Λ コラッツ変換) Λ を正の実数とし

$$C_\Lambda(a) = \begin{cases} \text{Int}(\Lambda a) & (a \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{a}{2} & (a \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とする。これを Λ コラッツ変換と呼ぶ。

定義3. n を自然数とし、初期値を a_0 とした $a_n = C_\Lambda(a_{n-1})$ を、初期値 a_0 の Λ コラッツ数列といい、 $C_\Lambda[a_0]$ で表す。

(注意1) a が奇数のとき $C_\Lambda(a) = 2\text{Int}(\Lambda a)$ と定義することもできる. この定義を用いた初期値 a_0 のコラッツ数列から得られるグラフ上のピークの数, 定義2から得られるものより多く, 複雑な印象を与える.

4. 安定コラッツ定数 Λ

セクション3でも, 述べたように, $C_{1.5}[7]$ は7, $\text{Int}(1.5 \times 7) = 10, 5$, $\text{Int}(1.5 \times 5) = 7$ となるため, 安定状態には達しない. 常に安定状態に達する Λ を考えるために, 以下を定義した.

定義4. $1 \leq a_0 \leq N$ の任意の a_0 について $C_\Lambda[a_0]$ が安定状態に達するとき, Λ を $1 \leq a_0 \leq N$ における安定コラッツ定数と呼ぶ. Λ が $1 \leq a_0 < \infty$ における安定コラッツ定数のときは単に安定コラッツ定数という.

定義4から「どのような Λ が安定コラッツ定数になるか」という問題が提示される. これを Λ コラッツ問題と呼ぶことにした.

Λ コラッツ問題を解くために, $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で, $\Lambda = 1.41$ に関する初期値 a_0 の Λ コラッツ数列 $C_\Lambda[a_0]$ をコンピュータで調査したところ, その範囲のすべての a_0 は安定状態 1,1に達することがわかった. さらに,

$$\Lambda = 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356, \dots$$

などの Λ コラッツ数列 $C_\Lambda[a_0]$ においても, $1 \leq a_0 \leq 10^5$ のすべての a_0 は安定状態 1,1に達した. Λ の精度をより上げてコンピュータで計算し, 以下の結果を得た.

解析結果1. $\Lambda = 1.4142135623$ とする. このとき, Λ は $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における安定コラッツ定数である.

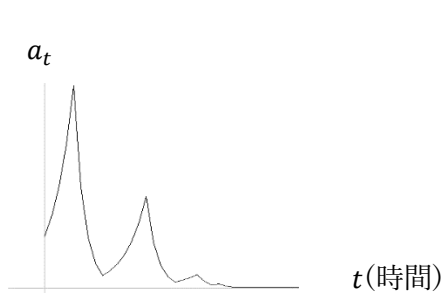


図 4

($\Lambda = 1.4142135623$, $a_0 = 45$)

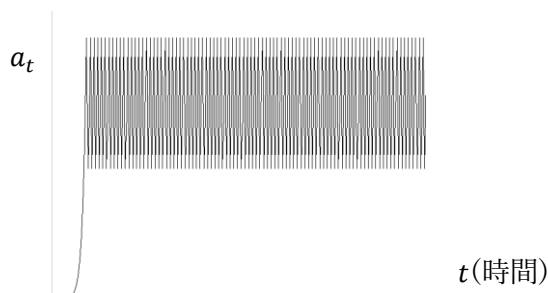


図 5

($\Lambda = 1.4142135624$, $a_0 = 27721$)

(注意2) 解析結果 1 において $\Lambda = 1.4142135623$ の末尾の数3を4に変えた 1.4142135624 は、安定コラッツ定数ではない (図 5 参照).

$\Lambda = 1.4142135623$ から $\Lambda = \sqrt{2}$ が予想され、新しいコラッツ問題を構築することができた.

予想 1. $\Lambda = \sqrt{2}$ は安定コラッツ定数である.

予想 1 を $\sqrt{2}$ コラッツ問題と呼ぶことにした.

5. 安定コラッツ定数 Λ の調査

安定コラッツ定数 Λ がどの範囲にあるのかという調査を行った. 今回の調査では, Λ を小数点以下第 3 位までの有理数とし, 初期値 a_0 を $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲とした. また, $n \leq 30000$, すなわち変換の回数は 30000 回以下とした.

表 1 はその結果であり, 例えば下限 1.333, 上限 1.335 という表記は, $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における安定コラッツ定数 Λ が $1.333 < \Lambda < 1.335$ に存在したことを意味する. 表 1 から以下の結果と予想を得た.

解析結果 2. $1.333 < \Lambda < 2.000$ のとき, $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における安定コラッツ定数 Λ が存在する.

表 1 (安定コラッツ定数 Λ が存在するの区間の下限 $< \Lambda <$ 上限のデータ)

Λ の範囲： Λ を小数点以下第 3 位までの有理数とし $0 \leq \Lambda \leq 3.000$,

初期値 a_0 範囲： $1 \leq a_0 \leq 10^6$, 変換の回数：30000回以下

	下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限
1	1.333	1.335	11	1.622	1.624	21	1.777	1.779	31	1.854	1.857	41	1.905	1.910	51	1.953	1.956
2	1.335	1.346	12	1.628	1.630	22	1.780	1.782	32	1.859	1.861	42	1.913	1.916	52	1.956	1.958
3	1.349	1.361	13	1.679	1.682	23	1.786	1.791	33	1.863	1.865	43	1.918	1.921	53	1.962	1.965
4	1.363	1.371	14	1.712	1.714	24	1.801	1.804	34	1.865	1.867	44	1.926	1.928	54	1.966	1.969
5	1.371	1.374	15	1.722	1.724	25	1.810	1.812	35	1.874	1.878	45	1.929	1.932	55	1.972	1.979
6	1.374	1.382	16	1.73	1.737	26	1.826	1.828	36	1.886	1.888	46	1.933	1.937	56	1.979	1.982
7	1.382	1.397	17	1.737	1.742	27	1.829	1.832	37	1.892	1.894	47	1.938	1.94	57	1.982	1.985
8	1.397	1.415	18	1.766	1.768	28	1.832	1.835	38	1.895	1.897	48	1.941	1.944	58	1.985	1.987
9	1.614	1.616	19	1.768	1.770	29	1.842	1.844	39	1.900	1.902	49	1.945	1.947	59	1.989	2.000
10	1.62	1.622	20	1.771	1.773	30	1.845	1.847	40	1.902	1.904	50	1.951	1.953			

$1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性定数 Λ は $1.333 < \Lambda < 2.001$ にあることが分かったが、さらに安定コラッツ定数 Λ の区間の個数を詳細に調査してみた。すなわち、前セクションでは Λ の精度を 10^{-3} としていたが、それを 10^{-5} までとし、区間の個数の変化を調べた。その結果が以下である。

Λ の調査範囲： $1.1 \leq \Lambda \leq 1.42$, a_0 の範囲： $1 \leq a_0 \leq 10^5$

表 2 (安定コラッツ定数 Λ の区間の個数)

Λ の精度	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
N	1	8	28	149

N は $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における良性定数 Λ の区間の個数を表す。

(考察) Λ の精度を上げると、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性定数 Λ の区間の個数 N が多くなったので、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性定数 Λ の各区間の幅がどんどん小さくなると考えられる。このことから、 Λ の各区間はある数に収束するかもしれないと思われる。

予想2.

- (1) Λ を安定コラッツ定数とする。このとき、 Λ は $1.333 < \Lambda < 2$ の中に、離散的に無限個存在する。
- (2) $\Lambda \geq 2$ のとき、 Λ は安定コラッツ定数ではない。

6. 2のべき乗の形をした安定コラッツ定数 Λ

予想1から「2のべき乗に関する安定コラッツ定数はどんなものがあるか」という問題に興味を持った. そして具体的な2のべき乗の形をした安定コラッツ定数 Λ を調査し, 2のべき乗の形をした安定コラッツ定数 Λ のデータから, 以下のような形の Λ の考えが浮かんだ.

$$\Lambda_n^{d,r} = 2^{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{1+r}} + \frac{1}{d^{1+2r}} + \frac{1}{d^{1+3r}} + \cdots + \frac{1}{d^{1+nr}}\right)}$$

ここで, n, d と r は正の整数である.

$\Lambda_n^{d,r}$ について, $2 \leq d \leq 5, 1 \leq r \leq 2, 1 \leq n \leq 10^2, 1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で, $\Lambda_n^{d,r}$ が安定コラッツ定数かどうかを調査した. その結果, 次の予想が立った.

予想3. (2のべき乗の形をした安定コラッツ定数 $\Lambda_n^{d,r}$)

以下の $\Lambda_n^{d,r}$ は安定コラッツ定数である.

- | | |
|--|---|
| (1) $\Lambda_n^{2,1}$ (ただし $n=4$ は除く) | (2) $\Lambda_\infty^{3,1} = \sqrt{2}$ と $\Lambda_n^{3,1}$ (ただし $n \geq 2$) |
| (3) $\Lambda_\infty^{2.5,2}$ と $\Lambda_n^{2.5,2}$ (ただし $n \geq 2$) | (4) $\Lambda_\infty^{1.724,2}$ と $\Lambda_n^{1.724,2}$ (ただし $n \geq 16$) |
| (5) $\Lambda_\infty^{1.71,2}$ と $\Lambda_n^{1.71,2}$ (ただし $n \geq 8$) | (6) $\Lambda_\infty^{1.664,2}$ と $\Lambda_n^{1.664,2}$ (ただし $n \geq 12$) |

7. コラッツ数列と Λ コラッツ数列の比較

コラッツ数列 $C(a_0)$ と Λ コラッツ数列 $C_\Lambda(a_0)$ の数列の動きに違いがあるように思えたので, このことについて研究しようと考えた.

数列の基本的な動きは, $C(a_0)$ も $C_\Lambda(a_0)$ も a_k が奇数であれば a_{k+1} の数値は a_k より上がるが, a_k が偶数であれば a_{k+1} の数値は a_k より下がることである. 特に a_k が2のべき乗であれば, a_k は上昇することなく一気に下がり1に達する. このことから, 数列の中に奇数の数が多く含まれれば含まれるほど, 数列が上昇する回数が増すため, 奇数の個数によって数列の違いが現れるのではないかと考えた. そして, 以下の量を定義し, これを**上昇回数**と呼び, 研究することにした.

$N(a_0)$: a_0 から変換された a_n が奇数となる個数

調査範囲: (1) $1 < a_0 \leq 10^5$, (2) $10^5 < a_0 \leq 2 \times 10^5$, (3) $2 \times 10^5 < a_0 \leq 3 \times 10^5$

表 2 ($1 < a_0 \leq 3 \times 10^5$ におけるコラッツ数列の場合)

ただし, コラッツ変換 $C(a)$ は, a が奇数のとき $C(a) = 1.5a + 0.5$ とした.

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	38	42.8	44.6	41.8
$N(a_0)$ の標準偏差	20.1	21.1	21.5	21.1
$N(a_0)$ の最大値	129	141	164	164

表 3 ($1 < a_0 \leq 3 \times 10^5$ における $\sqrt{2}$ コラッツ数列の場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	20.1	22.7	23.9	22.2
$N(a_0)$ の標準偏差	7.6	7.9	8.1	8
$N(a_0)$ の最大値	70	69	71	71

表 4 ($1 < a_0 \leq 3 \times 10^5$ における $\sqrt[12]{2^5}$ コラッツ数列の場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	23	26.4	27.6	25.7
$N(a_0)$ の標準偏差	9.6	10.3	10.6	10.4
$N(a_0)$ の最大値	81	87	91	91

表 5 ($1 < a_0 \leq 3 \times 10^5$ における $\sqrt[7]{2^3}$ コラッツ数列の場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	25.2	28	30.1	28
$N(a_0)$ の標準偏差	10.2	10.8	11.2	11
$N(a_0)$ の最大値	73	86	94	94

表 6 ($1 < a_0 \leq 3 \times 10^5$ における $\sqrt[9]{2^4}$ コラッツ数列の場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	25	28.6	30.2	27.9
$N(a_0)$ の標準偏差	10.4	11.2	11.7	11.3
$N(a_0)$ の最大値	83	89	97	97

(上昇回数 $N(a_0)$)に関する考察)

(1) $N(a_0)$ の平均について

コラッツ数列 $C(a_0)$ においては、 $N(a_0)$ の平均が40程度に対して、 Λ コラッツ数列 $C_\Lambda(a_0)$ はその半分くらいの値をとった。これは $1 < a_0 \leq 3 \times 10^5$ におけるコラッツ数列の平均上昇回数が、 Λ コラッツ数列の平均上昇回数より大きいことを意味する。

(2) $N(a_0)$ の標準偏差について

コラッツ数列 $C(a_0)$ は、 $N(a_0)$ の標準偏差が21程度であるのに対して、 Λ コラッツ数列 $C_\Lambda(a_0)$ は8~10程度である。これは、上昇回数のばらつきに関して、 $1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$ におけるコラッツ数列の方が、 Λ コラッツ数列に比べて、初期値 a_0 によるばらつきが大きいことを意味する。

(3) $N(a_0)$ の最大値について

コラッツ数列 $C(a_0)$ は、 $N(a_0)$ の最大値が129~164程度に対して、 Λ コラッツ数列 $C_\Lambda(a_0)$ は70~100程度である。これは、上昇回数の最大値に関して、コラッツ数列の方が、 Λ コラッツ数列より最大値が大きい初期値 a_0 が存在していることを意味する。

以上のことをコラッツ問題と Λ コラッツ問題を解くという視点から考えてみると、 Λ コラッツ問題よりコラッツ問題の方が、難易度が高い問題となっているのではないかと考えた。もしそうであれば、 Λ コラッツ問題を解決することは、従来のコラッツ問題を解決する糸口になるのではないかと思った。

8. コラッツ3問題

コラッツ問題は奇数と偶数から得られるルールであり、それを発展させた私の研究である Λ コラッツ問題は、 $\sqrt{2}$ や2のべき乗と関係があると予想している。そこで、任意の自然数 a に関する変換を3パターンに分けた場合、さらに新しいコラッツ問題を作ることができるのではないかと考えた。

改めてコラッツ変換 $C(a)$ を見直すと、自然数 a に対して $C(a)$ は、 a が奇数のときと偶数のときでそれぞれ変換式が定義されている。これは a を2で割った余りが1のときと、余りが0のときで区別しているものとする。そうすると、3で割った余りに応じて、変換式をたて、新たなコラッツ問題が作れるだろうと考えた。文献を調査すると、三室、西村、平松の論文[3]に3で割った余りに応じた変換式の研究があった。これを参考に、以下の変換式を定義した。

定義6. (コラッツ 3 変換 $C(a, 3)$)

$$C(a, 3) = \begin{cases} 2a - 1 & (a \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ 4a + 2 & (a \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \frac{a}{3} & (a \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \end{cases}$$

を, コラッツ3変換と呼ぶ.

定義7. n を自然数とし, 初期値を a_0 とした $a_n = C(a_{n-1}, 3)$ を, 初期値 a_0 のコラッツ3数列
といい, $C[a_0, 3]$ で表す.

例 $a_0 = 7$ の場合.

$$7, 4 \times 7 + 2 = 30, 10, 42, 14, 2 \times 14 - 1 = 27, 9, 3, 1, 6, 2, 3, 1$$

初期値 a_0 のコラッツ 3 数列を調べた結果, $1 \leq a_0 \leq 10^6$ のどんな a_0 も安定状態 $1, 6, 2, 3, 1$
に達した (a_0 の範囲は 1 桁広げている). このことから, 以下の結果と予想を得た.

解析結果3. $1 \leq a_0 \leq 10^6$ において $C[a_0, 3]$ は, 安定状態 $1, 6, 2, 3, 1$ に達する.

予想4. (コラッツ 3 問題)

任意の自然数 a_0 について, $C[a_0, 3]$ は安定状態 $1, 6, 2, 3, 1$ に達する.

9. Λ コラッツ3変換と Λ コラッツ3数列

コラッツ 3 変換から Λ コラッツ 3 変換を以下のように定義する.

定義8. (Λ コラッツ 3 変換) Λ を正の実数とし

$$C_\Lambda(a, 3) = \begin{cases} 2a - 1 & (a \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \text{Int}(\Lambda a) & (a \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \frac{a}{3} & (a \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \end{cases}$$

を, Λ コラッツ3変換と呼ぶ.

定義9. n を自然数とし, 初期値を a_0 とした $a_n = C_\Lambda(a_{n-1}, 3)$ を, 初期値 a_0 の Λ コラッツ3数列といい, $C_\Lambda[a_0, 3]$ で表す.

実は, Λ コラッツ3変換は, $\Lambda = \sqrt{3}$ が安定コラッツ定数となるように定義したものである. すなわち, $\Lambda = \sqrt{3}$ が安定コラッツ定数となるような定義8を得るにすするために, 定義6と定義8を何回も書き換え, コンピュータを使った多くの試行錯誤からこれらの定義を確定させた. そして, 以下の結果と予想を得た.

解析結果4. $\Lambda = 1.7320508075$ とする. このとき, Λ は $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における安定コラッツ定数である.

予想5. ($\sqrt{3}$ コラッツ3問題)

$\Lambda = \sqrt{3}$ は安定コラッツ定数である.

(注意3) 解析結果4において $\Lambda = 1.7320508075$ の末尾の数5を6に変えた1.7320508076は, 安定コラッツ定数ではない.

セクション5と同様に, 安定コラッツ定数 Λ の調査は, Λ を小数点以下第3位までの有理数とし, 初期値 a_0 を $1 \leq a_0 \leq 10^6$ の範囲で行った. ただし, $n \leq 30000$, すなわち変換の回数は30000回以下とした. 表7はその結果であり, 例えば下限 1.307, 上限 1.311 という表記は, $1 \leq a_0 \leq 10^6$ において安定コラッツ定数 Λ が $1.307 < \Lambda < 1.311$ に存在したことを意味する.

表 7 (良性定数 Λ の区間の下限 $< \Lambda <$ 上限のデータ)

Λ の範囲： Λ を小数点以下第 3 位までの有理数とし $0 \leq \Lambda \leq 3.000$,

初期値 a_0 範囲： $1 \leq a_0 \leq 10^6$, 変換の回数：30000回以下

	下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限
1	1.307	1.311	11	1.402	1.415	21	1.726	1.728	31	1.919	1.922	41	2.049	2.064	51	2.116	2.119
2	1.315	1.317	12	1.417	1.422	22	1.728	1.733	32	1.922	1.924	42	2.064	2.071	52	2.119	2.122
3	1.320	1.325	13	1.422	1.443	23	1.857	1.866	33	1.984	1.986	43	2.071	2.076	53	2.181	2.185
4	1.326	1.336	14	1.448	1.450	24	1.866	1.869	34	1.986	1.988	44	2.076	2.078	54	2.193	2.196
5	1.336	1.351	15	1.464	1.466	25	1.869	1.871	35	1.988	1.990	45	2.078	2.080	55	2.213	2.228
6	1.353	1.355	16	1.466	1.471	26	1.871	1.874	36	1.999	2.018	46	2.090	2.097	56	2.233	2.235
7	1.357	1.369	17	1.472	1.475	27	1.874	1.876	37	2.023	2.025	47	2.099	2.105	57	2.237	2.239
8	1.369	1.375	18	1.476	1.501	28	1.877	1.890	38	2.025	2.027	48	2.106	2.109	58	2.242	2.251
9	1.375	1.392	19	1.714	1.718	29	1.901	1.907	39	2.031	2.038	49	2.110	2.112	59	2.368	2.382
10	1.392	1.402	20	1.718	1.725	30	1.907	1.917	40	2.039	2.047	50	2.112	2.116	60	2.571	2.573

	下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限
61	2.573	2.576	71	2.670	2.673	81	2.796	2.798	91	2.833	2.835	101	2.884	2.888
62	2.578	2.580	72	2.677	2.679	82	2.803	2.805	92	2.841	2.843	102	2.903	2.906
63	2.580	2.589	73	2.682	2.686	83	2.805	2.811	93	2.846	2.849	103	2.908	2.911
64	2.592	2.599	74	2.689	2.695	84	2.811	2.813	94	2.849	2.852	104	2.911	2.913
65	2.647	2.653	75	2.695	2.699	85	2.813	2.816	95	2.853	2.856	105	2.923	2.925
66	2.654	2.656	76	2.699	2.702	86	2.816	2.818	96	2.856	2.860	106	2.926	2.928
67	2.658	2.661	77	2.703	2.705	87	2.818	2.822	97	2.861	2.863	107	2.976	2.978
68	2.662	2.665	78	2.706	2.708	88	2.822	2.827	98	2.863	2.866	108	2.978	2.980
69	2.665	2.667	79	2.746	2.750	89	2.827	2.831	99	2.866	2.876	109	2.980	2.983
70	2.667	2.669	80	2.788	2.792	90	2.831	2.833	100	2.881	2.883	110	2.997	2.999

表 7 のデータから以下の結果と予想が得られた。

解析結果5. $1.307 < \Lambda < 2.999$ のとき, $1 \leq a_0 \leq 10^6$ における安定コラッツ定数 Λ が存在する。

予想6. (Λ コラッツ 3 問題)

- (1) Λ を安定コラッツ定数 Λ とする。このとき, $1 < \Lambda < 3$ である。
- (2) $\Lambda \geq 3$ のとき, Λ は安定コラッツ定数ではない。

10. Λ コラッツ3変換における良性定数 Λ の区間

セクション6を元に、今度は、具体的な3のべき乗の形をした安定コラッツ定数 Λ を調査することにした。そして、3のべき乗の形をした安定コラッツ定数 Λ のデータから、2のべき乗で扱った $\Lambda_n^{d,r}$ と同様に定義して研究できるのではないかと考えた。それは、

$$\Lambda_n^{d,r} = 3^{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{1+r}} + \frac{1}{d^{1+2r}} + \frac{1}{d^{1+3r}} + \cdots + \frac{1}{d^{1+nr}}\right)}$$

である。ここで、 n, d と r は正の整数である。

そして、 $2 \leq d \leq 5, 1 \leq r \leq 2, 1 \leq n \leq 10^2, 1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で、 $\Lambda_n^{d,r}$ が安定コラッツ定数かどうかを調査した結果、次の予想が立った。

予想7. (3のべき乗の形をした安定コラッツ定数 $\Lambda_n^{d,r}$)

以下の $\Lambda_n^{d,r}$ は安定コラッツ定数である。

- | | |
|---|---|
| (1) $\Lambda_\infty^{3,1} = \sqrt{3}$ と $\Lambda_n^{3,1}$ (ただし $n = 2, 3, 5$ は除く) | (2) $\Lambda_\infty^4 = \sqrt[3]{3}$ と $\Lambda_n^{4,1}$ (ただし $n \geq 1$) |
| (3) $\Lambda_\infty^{5,1} = \sqrt[4]{3}$ と $\Lambda_n^{5,1}$ (ただし $n \geq 5$) | (4) $\Lambda_\infty^{2,0004,1}$ と $\Lambda_n^{2,0004,1}$ (ただし $n \geq 25$) |
| (5) $\Lambda_\infty^{3,2}$ と $\Lambda_n^{3,2}$ (ただし $n \geq 1$) | (6) $\Lambda_\infty^{4,2}$ と $\Lambda_n^{4,2}$ (ただし $n \geq 1$) |
| (7) $\Lambda_\infty^{4,3}$ と $\Lambda_n^{4,3}$ (ただし $n \geq 1$) | |

11. 本研究で得られた成果

本研究は、コラッツ数列を応用して、新しい、いろいろなタイプのコラッツ数列を作ることを目的としたものであった。そして、 Λ コラッツ変換を定義することに成功し、そこから様々なタイプのコラッツ数列と、コラッツ問題を量産することに成功したと考える。これにより、コラッツ問題の新たな可能性を示すことができたと考える。

12. 今後の研究の予定

- (1) コラッツ5変換 $C(a, 5)$, コラッツ7変換 $C(a, 7)$ を定義する。
- (2) Λ コラッツ5変換 $C_\Lambda(a, 5)$ や Λ コラッツ7変換 $C_\Lambda(a, 7)$ を定義し、 Λ コラッツ5数列や Λ コラッツ7数列を構築し、安定コラッツ定数 Λ を研究する
- (3) より一般の Λ コラッツ n 数列の理論を構築する。
- (4) 安定コラッツ定数でない Λ の研究を行う。すなわち、このタイプの Λ では、ある a_0 を初期値とする Λ コラッツ数列 $C_\Lambda[a_0]$ で1を含まないループに達するものが存在する。この特異点となる a_0 について研究する。
- (5) 空間的なコラッツ変換を構築する。

謝辞

本論文に対して，日本数学教育学会高専・大学部会の先生方から貴重な多くのアドバイスをいただき，とても参考になりました．ここに感謝申し上げます．

参考文献

- [1] リチャード・ガイ，数論における未解決問題集，シュプリンガー・フェアラーク東京，1990 第 2 刷，pp.174-176
- [2] T. Oliveira e Silva, Computational verification of the $3x+1$ conjecture,
http://sweet.ua.pt/tos/3x_plus_1.html
- [3] 三室智明，西村滋人，平松豊一，コラッツ予想について，法政大学計算科学研究センター研究報告 16，pp.143-147, 2003,
https://www.media.hosei.ac.jp/bulletin_archives/vol16_25.pdf

ガロア群 A_5 をもつ5次方程式

稲垣佑都

津山工業高等専門学校総合理工学科（4年）

1. はじめに

3年生の演習の授業（全系横断演習Ⅰ）において、数学の演習を受講した。内容は「ガロア理論を理解しよう」というもので、群論と体論、そして n を5以上の整数としたとき一般の n 次方程式はべき根で解くことができないという理論を学んだ。それは、一般の n 次方程式から得られる n 次対称群 S_n が、 $n \geq 5$ のとき可解群でないことに理由があった。

一般の n 次方程式の群は S_n である。そして、 $n \geq 5$ のとき S_n は可解群でないため、一般の n 次方程式はべき根で解くことができない。一方、 S_n の正規部分群で単純群でもある n 交代群 A_n も可解群でない。したがって、 A_n をもつ n 次方程式もまたべき根で解くことができない。 A_n をもつ n 次方程式は、 S_n をもつ n 次方程式に比べ、圧倒的に数は少ないはずだ。それならば、 A_n をもつ n 次方程式は何らかの特徴を持つのではないだろうか。このような興味から本研究をスタートさせ、具体的に、 A_5 をもつ5次方程式の構造に関する研究を行った。そして、コンピュータを使った研究から、 A_5 をもつ5次方程式にはリュカ数に関するものがあるという結果を得た。ここで、 n 番目のリュカ数 L_n とは、 $L_0 = 2, L_1 = 1$ で、 $n \geq 2$ のとき $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ から得られる数のことである。

2. 先行研究の要約

これまでの5次方程式の構造に関する研究では、Spearman と Williams[2], [3],あるいは、Kavanach の研究[5]による $x^5 + ax + b$ と $x^5 + ax^2 + b$ の研究がある。しかし、これらは可解な方程式、すなわち二面体群 D_5 やフロベニウス群 F_{20} などをもつ5次方程式の研究である。

$x^5 + ax + b$ の研究[2], [3]の結果をより具体的に述べると、それは、 $\varepsilon = \pm 1, c \geq 0, e \neq 0$ で、

$$a = \frac{5e^4(3 - 4\varepsilon c)}{c^2 + 1}, b = \frac{-4e^5(11\varepsilon + 2c)}{c^2 + 1}$$

ならば、方程式 $x^5 + ax + b = 0$ は、べき根で解くことができるというものである。さらに、この応用として、 $p = 4n + 3$ (n は自然数)を素数としたとき、方程式 $x^5 + 2px + 2p^2 = 0$ の群は可解群ではないことが示されている。しかし、これが S_5 か A_5 のどちらかになるかについては述べられていない。

一方、元吉文雄の研究[1]は、5次方程式の群をいかに速く決定するかというテーマを扱ったものであるため、本研究から得られた A_5 をもつ5次方程式がリュカ数と関係するという

結果については全く触れられていない。

3. 方程式の群

a_j ($1 \leq j \leq n-1$)を有理数体 $\mathbf{Q}$ の元とし, n 次方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

を考える. そして, この方程式の n 個の解が全て含まれる $\mathbf{Q}$ 上の最小の体(最小分解体)を F とする. このとき, n 個の解を互いに置換しあって入れ換えたとき, F が変化しないような置換だけを集めた集合を n 次方程式の群という.

一般の n 次方程式の場合の方程式の群は S_n であり, その位数は $n!$ である. そして S_n の偶置換がなす群が n 交代群 A_n であり, その位数は $n!/2$ である.

4. フリーソフト SageMath を用いた A_5 をもつ5次方程式の判定

本研究のテーマである A_5 をもつ5次方程式の因数分解を簡単に説明する.

まず, A_5 の位数は $5!/2 = 60$ である. ガロア理論によれば, この60という数は, 有理数体 $\mathbf{Q}$ から最小分解体 F までの拡大次数になる ([6]参照). 具体的には, $\mathbf{Q}$ と F の間の部分体が, $\mathbf{Q} \subset K \subset M \subset F$ であって, $\mathbf{Q} \subset K$ の拡大次数が 5 であり, $K \subset M$ の拡大次数が 4 であり, $M \subset F$ の拡大次数が 3 となるような部分体 K, M が存在するのである. このとき, これらの拡大次数の積が $5 \times 4 \times 3 = 60$ となる.

したがって, 5次方程式

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

の左辺を因数分解していく過程で, 体 K の中で, 左辺は

$$(x - \lambda_1)(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) = 0, \quad \lambda_1, b_j \in K, \quad \lambda_1, b_j \notin \mathbf{Q}$$

と因数分解され, 体 M の中では, 左辺は

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) = 0, \quad \lambda_2, c_j \in M, \quad \lambda_2, c_j \notin K$$

と因数分解される. そして, 体 K の中では, 左辺は

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4)(x - \lambda_5) = 0, \quad \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in F, \quad \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \notin M$$

と因数分解される. 以上のような因数分解の構造をもつ5次方程式の群が A_5 である.

今回の研究は, フリーソフト SageMath version 8.6 を使って行なった. SageMath は, そのパッケージに PARI/GP を搭載しており, 方程式の群の計算が可能となっている. SageMath は, 2005 年にアメリカワシントン大学の William Stein が主導して開発した.

SageMath を用いた最初の試みは, 5 次方程式を決め, その因数分解を試みて, その群を決定することであった. すなわち, 5 次方程式を定め, その 5 次方程式の一つの解を a とし, a を含む $\mathbf{Q}$ 上の最小な拡大体を $K = \mathbf{Q}(a)$ とし, 5 次式を K の中で SageMath に因数分解させる. もし, 5 次式が 1 次式と 4 次式に分解されたなら, 定めた 5 次方程式は A_5 の可能性がある. そこで, 次に得られた 4 次式から 4 次方程式を作り, その解を b とし, b を含む K 上の最小な拡大体を $M = K(b)$ とし, 4 次式を M の中で SageMath に因数分解させる. もし, 4 次

式が1次式と3次式に分解されたなら、定めた5次方程式は A_5 の可能性がある。そして、得られた3次式から3次方程式を作り、その解を c とし、 c を含む M 上の最小な拡大体を $F = M(c)$ とし、3次式を F の中で SageMath に因数分解させる。もし、3次式が1次式に分解されたなら、定めた5次方程式は A_5 となる。しかし、この方法は、体を拡大するたびに SageMath の因数分解にかかる計算量が増え、一つの5次方程式が A_5 であることを判定するのに、10分以上の時間を要した。

詳細は理解していないが、論文[4]などを見ると、SageMath が計算で呼び出す Magma と Gap には Transitive permutation group で、その位数が32以下のリストが組み込まれており、それを使って方程式の群の位数が計算できるアルゴリズムが開発されている。このことから、SageMath には方程式の群を高速に決定するコマンドがあるのではないかと思い、調査した結果

$G = f.galois_group(pari_group=True)$

というコマンドにたどりついた。このコマンドを用いると、一つの5次方程式が A_5 であることを判定することは一瞬であった。その後、SageMath 上で動く Python2 を使ったプログラムを書き、この結果、短時間で多くの5次方程式が扱えるようになり、それらの群のデータを得ることができるようになった。

5. 研究計画

A_5 をもつ5次方程式を決定するための SageMath 上で動く Python2 を使ったプログラムを作り、 A_5 をもつ5次方程式

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

のデータを分析することにした。ここで、 a_i は整数とした。確かに大量の A_5 をもつ5次方程式のデータを得ることはできるようになったが、得られたデータの多さから、何らかの法則を発見することは難しかった。そこで、係数のパラメータを s と t などの2個に限定し研究すれば、もう少し有用なデータが得られ、深い考察ができるのではないかと考えた。そして、今回の研究では、

$$x^5 + sx + t = 0, \quad x^5 + sx^2 + t = 0, \quad x^5 + sx^3 + t = 0, \quad x^5 + sx^4 + t = 0$$

というタイプの方方程式を扱うことにした。

6. 方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ の研究結果

方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ の群が A_5 である s と t を調査したところ、特に、 $s = 5$ のとき t について以下のデータが得られた。

$$t = 64, 320, 7744, 20480, 53824, 141120, 369664$$

$$t = -320, -1280, -3136, -8000, -54080, -141376, -369920$$

これらは全て64の倍数であり $t = 64u$ とすると、

$$u = 1, 5, 45, 121, 320, 841, 2205, 5776$$

$$u = -5, -9, -49, -125, -845, -2209, -5780$$

である.

ここで, 注目した数列は $L_0 = 2$ のリュカ数 L_n であり, $n \geq 1$ の L_n は,

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

であり, L_n^2 は,

$$1, 9, 16, 49, 121, 324, 841, 2209, 5776, \dots$$

である. そこで, 数列 u_n ($n \geq 1$) を,

$$u_1 = L_1^2 = 1, \quad u_2 = L_2^2 - 4 = 9 - 4 = 5, \quad u_3 = L_3^2 = 16,$$

$$u_4 = L_4^2 - 4 = 49 - 4 = 45, \quad u_5 = L_5^2 = 121, \quad u_6 = L_6^2 - 4 = 324 - 4 = 320,$$

$$u_7 = L_7^2 = 841, \quad u_8 = L_8^2 - 4 = 2209 - 4 = 2205, \quad u_9 = L_9^2 = 5776, \dots$$

すなわち,

$$u_{2n-1} = L_{2n-1}^2, \quad u_{2n} = L_{2n}^2 - 4$$

と置くと, $1 \leq n \leq 9$ である整数 n について, 方程式 $x^5 + 5x^4 + 64u_n = 0$ (u_3 は除く) の群は A_5 であるといえる. 実は, 方程式 $x^5 - 5x^4 - 64u_n = 0$ (u_3 は除く) の群も A_5 である.

同様に, 数列 v_n ($n \geq 1$) を,

$$v_1 = L_1^2 + 4 = 5, \quad v_2 = L_2^2 = 9, \quad v_3 = L_3^2 + 4 = 16 + 4 = 20,$$

$$v_4 = L_4^2 = 49, \quad v_5 = L_5^2 + 4 = 121 + 4 = 125, \quad v_6 = L_6^2 = 324,$$

$$v_7 = L_7^2 + 4 = 841 + 4 = 845, \quad v_8 = L_8^2 = 2209, \quad v_9 = L_9^2 + 4 = 5776 + 4 = 5780, \dots$$

すなわち,

$$v_{2n-1} = L_{2n-1}^2 + 4, \quad v_{2n} = L_{2n}^2$$

と置くと, $1 \leq n \leq 9$, である整数 n について, 方程式 $x^5 + 5x^4 - 64v_n = 0$ (v_3 は除く) と $x^5 - 5x^4 + 64v_n = 0$ (v_3 は除く) の群は A_5 である.

次の予想を得ることができた.

予想 1. L_n ($n \geq 1$) をリュカ数とする. このとき,

(1) $u_{2n-1} = L_{2n-1}^2$, $u_{2n} = L_{2n}^2 - 4$ と置いたとき, u_3 を除く方程式 $x^5 + 5x^4 + 64u_n = 0$ と $x^5 - 5x^4 - 64u_n = 0$ の群はいずれも A_5 である.

(2) $v_{2n-1} = L_{2n-1}^2 + 4$, $v_{2n} = L_{2n}^2$ と置いたとき, v_3 を除く方程式 $x^5 + 5x^4 - 64v_n = 0$ と $x^5 - 5x^4 + 64v_n = 0$ の群はいずれも A_5 である.

予想 1 は, SageMath によれば $n = 10000$ までは正しい.

7. 方程式 $x^5 + sx^3 + t = 0$ の研究結果

前節で, A_5 をもつ方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$ がリュカ数から得られることが予想された. 方程式 $x^5 + sx^3 + t = 0$ についてもこの観点から研究した. その結果, A_5 をもつ方程式につい

て以下のデータが得られ、これはとても簡単に扱えるものだった.

$$x^5 + 15x^3 \pm 81u_n = 0 \text{ が群 } A_5 \text{ をもつリスト}$$

$$u_n = 4, 11, 29, 76, 199, 521$$

$$x^5 - 15x^3 \pm 81v_n = 0 \text{ が群 } A_5 \text{ をもつリスト}$$

$$v_n = 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843$$

以下の予想が得られた.

予想 2. L_n ($n \geq 1$) をリュカ数とする. このとき,

$$u_n = L_{2n+1}, \quad v_n = L_{2n}$$

と置くと, 方程式 $x^5 + 15x^3 \pm 81u_n = 0$ と $x^5 - 15x^3 \pm 81v_n = 0$ の群はいずれも A_5 である.

予想 2 は, SageMath によれば $n = 10000$ までは正しい.

8. 方程式 $x^5 + sx^2 + t = 0$ の研究結果

方程式 $x^5 + s_n x^2 + t_n = 0$ については, $s_n = \pm 10L_n$, $t_n = \pm 24L_n$ (複号同順) を考える必要があった. 以下の表 1 がそのデータである.

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47
s_n	10	30	40	70	110	180	290	470
t_n	24	72	96	168	264	432	696	1128
群	A_5	S_5	D_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

n	9	10	11	12	13	14	15	16
L_n	76	123	199	322	521	843	1364	2207
s_n	760	1230	1990	3220	5210	8430	13640	22070
t_n	1824	2952	4776	7728	12504	20232	32736	52968
群	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

n	17	18	19	20	21	22	23	24
L_n	3571	5778	9349	15127	24476	39603	64079	103682
s_n	35710	57780	93490	151270	244760	396030	640790	103682
t_n	85704	138672	224376	363048	587424	950472	1537896	2488368
群	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5	A_5	S_5

表 1 より以下の予想が得られた.

予想 3. L_n ($n \geq 1$) をリュカ数とする. このとき, 方程式 $x^5 \pm 10x^2 \pm 24 = 0$ (複号同順) の群は A_5 であり, さらに, $n \geq 3$ で

$$s_n = \pm 10L_{2n-1}, \quad t_n = \pm 24L_{2n-1} \quad (\text{複号同順})$$

と置くと, 方程式 $x^5 + s_n x^2 + t_n = 0$ の群はいずれも A_5 である.

予想 3 は, SageMath によれば $n = 10000$ までは正しい.

9. 方程式 $x^5 + sx + t = 0$ の研究結果

方程式 $x^5 + sx^3 + t = 0$ に関する A_5 の群をもつ方程式として,

$$x^5 + 20x \pm 16 = 0, \quad x^5 + 95x \pm 76 = 0, \quad x^5 + 145x \pm 232 = 0$$

などが見つかった. そして, これらを

$$x^5 + 5nx \pm 4m = 0$$

と置くと, (n, m) のリストとして,

$$(n, m) = (4, 4), (19, 19), (19, 133), (29, 58), (44, 44), (44, 132), (64, 128), (79, 79), (124, 124), \dots$$

などが挙げられた. リュカ数に的を絞りこれらのデータを考察した. その結果,

$$n = m = 4, 4 \times 11, 11 \times 29, 29 \times 76, \dots$$

であるものを発見した. すなわち,

$$x^5 + (5 \times 4)x + (4 \times 4) = 0, \quad x^5 + (5 \times 4 \times 11)x + (4 \times 4 \times 11) = 0$$

$$x^5 + (5 \times 11 \times 29)x + (4 \times 11 \times 29) = 0, \quad x^5 + (5 \times 29 \times 76)x + (4 \times 29 \times 76) = 0$$

.....

は, A_5 の群をもつ方程式であった. これより以下の予想が得られた.

予想 4. L_n ($n \geq 1$) をリュカ数とする. このとき, $n \geq 0$ に対して

$$u_n = L_{2n+1}L_{2n+3}$$

と置くと, 方程式 $x^5 + 5u_n x \pm 4u_n = 0$ の群はいずれも A_5 である.

予想 4 は, SageMath によれば $n = 10000$ までは正しい.

10. 本研究で得られた成果

本研究では, A_5 の群をもつ 5 次方程式 $x^5 + sx^4 + t = 0$, $x^5 + sx^3 + t = 0$, $x^5 + sx^2 + t = 0$, $x^5 + sx + t = 0$ に関する研究を行なった. その結果, リュカ数に関する予想 1 から予想 4 を立てることができた. いくつかの論文を検索したが, これまで A_5 の群をもつ 5 次方

程式とリュカ数との関係を扱ったものは見つからなかった。したがって、今回の研究結果は予想とはいえ、新しい発見であることが期待される。

1 1. 今後の発展と展開の可能性, 今後の研究の予定

今後の研究の発展と展開について、次の二つを挙げることができる。一つ目は、 A_5 の群をもつ方程式 $x^5 + sx^4 + tx^3 + u = 0$, $x^5 + sx^4 + tx^2 + u = 0$, $x^5 + sx^4 + tx + u = 0$ に関する研究である。これらについては、リュカ数だけでなくフィボナッチ数列との関係性が見えてきている。二つ目は、今回挙げた4つの予想の証明についてである。論文[5]や指導教員のアドバイスなどからその方向性が徐々に見えてきている。次の機会にこのことが報告できればと考えている。

謝辞

本論文に対して、日本高専学会高専・大学部会の先生方から貴重な多くのアドバイスをいただき、とても参考になりました。ここに感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 元吉文雄, 5次方程式の可解性の高速判定法, 数理解析研究所講究録第848巻 1993年 1-5
- [2] Blair K. Spearman and Kenneth S. Williams, Characterization of solvable quintics $x^5 + ax + b$, The American Mathematical Monthly Vol. 101, No. 10 (Dec., 1994), pp. 986-992
- [3] Blair K. Spearman and Kenneth S. Williams, ON SOLVABLE QUINTICS $x^5 + ax + b$ AND $x^5 + ax^2 + b$, ROCKY MOUNTAIN JOURNAL OF MATHEMATICS Volume 28, Number 2, Spring 1998
- [4] Claus Fieker and Jürgen Klüners, Computation of Galois groups of rational polynomials, LMS J. Comput. Math. 17 (1) (2014) 141-158
- [5] Ryan Kavanach, ON IRREDUCIBLE RATIONAL QUINTICS, <https://rak.ac/files/papers/galois.pdf>
- [6] 彌永昌吉, 有馬哲, 浅枝陽, 代数入門, 東京図書, 1990