

代数学ミニシンポジウム 2018 (倉敷)

報告集

高専代数学研究会編

(世話役：松田修)

2019 年 3 月

はじめに

本論文集は、2018 年 9 月に倉敷市民会館で開催した代数学ミニシンポジウム 2018(倉敷)の講演の記録と関連論文をまとめたものです。有志のご協力をいただきこのような報告集を出すことができました。記して感謝を申し上げます。なお、都合により参加できなかった桐山翔伍の「素数 p を基礎にした完全数の研究」の論文も最後に掲載しました。

また、本シンポジウムの開催にあたり、平成 27 年度津山高専校長裁量経費（教育研究活動経費）「空間認知と解読という視点を基礎として、より抽象的概念の理解に向かわせる高等数学教育へのニューアプローチ」（代表：松田修）の援助を受けました。

2019 年 3 月 松田修

代数学ミニシンポジウム 2018 (倉敷)

日時：2018 年 9 月 2 日 (日) ～9 月 3 日 (月)

場所：倉敷市民会館，第 1 会議室

世話人：松田修

本シンポジウムは，平成 30 年度校長裁量経費(教育研究活動支援経費)「空間認知と解読という視点を基礎として，より抽象的概念の理解に向かわせる高等数学教育へのニューアプローチ」(代表：松田修) の援助を受けています。

2 日 (日)

10:00－11:15

加田紘大 (津山高専 3 年)，松田修 (津山高専)

「2 次曲線で作られる凹型ルーロー三角形における掛谷問題の研究」

圓山夏生 (津山高専 3 年)，松田修 (津山高専)

「二面体群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込みの研究」

草加修宏 (津山高専 1 年)，松田修 (津山高専)

「一般コラッツ予想に関する研究」

11:15-12:00

松田修 (津山高専)「ファレイ数列と真珠曲線」

13:30-14:30

前原和寿「Deformation of categories by group stacks」

14:45-15:45

月岡透 (東海大)「射影空間の直積のブローアップによって得られる対数的ファノ多様体について」

16:00－17:00

北川真也 (岐阜高専)「A note on extremal trigonal fibrations on rational surfaces」

17:15-18:15

飯高茂 「スーパー双子素数予想とウルトラ完全数」

19:00－21:00

情報交換会

3 日 (月)

10:00-11:00

小島秀雄 (新潟大)「Normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one」

11:15-11:45

数学教育に関する意見交換会

目次

スーパー双子素数とスーパー完全数, ウルトラ完全数 (飯高茂)	1
Deformation of Categories by Group preStacks (前原和寿)	23
2 次曲線で作られる凹型ルーロー三角形の掛谷問題 (加田紘大)	40
群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込みの研究 (圓山夏生)	51
ファレイ数列と真珠曲線 (松田修)	62
素数 p を基礎にした完全数の研究 (桐山翔伍)	77

スーパー双子素数とスーパー完全数, ウルト ラ 完全数

飯高 茂

2018 年 9 月 2 日

目 次

1	スーパー双子素数	2
1.1	ウルトラ 3 つ子素数	2
2	完全数の m だけ平行移動	4
3	スーパー完全数の m だけ平行移動	4
3.1	スーパー完全数の場合	4
3.2	$m = -18$ のとき	7
4	$m = -28$ の スーパー完全数	10
4.1	素数解	12
5	m だけ平行移動したウルトラ完全数	13
6	ウルトラ完全数 II 型	14
7	ウルトラ完全数 II 型の基本定理	15
7.1	$m = -18$ のときウルトラ完全数 ニュータイプ	16
8	$m = -28$ のスーパー完全数	17
9	$m = -28$ のウルトラ完全数 ニュータイプ	18
9.1	逆定理	19
10	$m = -14$ のスーパー 完全数	20
11	$m = -14$ のウルトラ完全数 ニュータイプ	20
12	$m = -2 - 2\mu, \mu : \text{完全数}$	21
12.1	逆定理	22

1 スーパー双子素数

平成 30 年 3 月 8 日 (木) に行われた『完全数の新しい世界』の出版記念会で提出した問題は次の 2 つであった.

与えられた 整数 $(a > 0, b)$ に対して, $p = aq + b$ とおくと p, q がともに素数なら (p, q) を a, b に関しての 超 (スーパー) 双子素数という.

1. 超双子素数が無限にある a, b はどんな条件を満たすか
2. 超双子素数が有限個の a, b は存在するか
3. 与えられた $(a > 0, b)$ に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a), \varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

1.1 ウルトラ 3 つ子素数

与えられた 整数 $(a > 0, b, c > 0, d)$ に対して $p = aq + b, r = cq + d$ とおくと p, q, r がともに素数なら (p, q, r) を a, b, c, d に関してのウルトラ 3 つ子素数という.

- ウルトラ 3 つ子素数が無限にある a, b, c, d はどんな条件を満たすか
- ウルトラ 3 つ子素数が有限個の a, b, c, d は存在するか
- 与えられた (a, b, c, d) に対して超双子素数を無限に生成する方程式 ($\sigma(a), \varphi(a)$ を用いてよい) を作れ

高橋洋翔は数日後次の解答を寄せた.

スーパー双子素数 について

(i) $a + b \equiv 1 \pmod{2}$, (ii) a, b は互いに素
 p, q はどちらも 2 でないとする.

ウルトラ 3 つ子素数 について

(i) $a + b \equiv 1 \pmod{2}$,
(ii) a, b は互いに素,
(iii) $c + d \equiv 1 \pmod{2}$,
(iv) c, d は互いに素.

ただし $b \not\equiv 0 \pmod{3}$: (水谷一による修正)

水谷一さんはウルトラ 3 つ子素数の除外条件をより精密にすることを提案した

注意 1 (水谷一, 除外条件の精密化). $ac \equiv -bd \not\equiv 0 \pmod{3}$ を満たすときウルトラ 3 つ子素数は有限個 (ただ 1 つ) を証明.

以前から双子素数の問題 (無限にあるという予想) に関心のあった高橋はこれらの条件を満たすときスーパー双子素数やウルトラ三つ子素数は無限にあるのではないか, という予想を述べた.

これを スーパー双子素数やウルトラ三つ子素数についての高橋の予想と呼ぶことを提案する.

2018 年 8 月 2 日, お台場の TFT ホールで開かれた日本数学教育学会 100 周年記念企画の研究発表会でこの結果はポスター発表として一般向けに公表された.



図 1: ウルトラ完全数 (胸に多面体をつけている, 襟にはゼータ関数の値), By Jun Iitaka

2 完全数の m だけ平行移動

さて完全数の話題に移り, 誰でも分かるように最初から説明する.

a の約数の和を $\sigma(a)$ で示す.

$\sigma(a) = 2a$ のとき a を完全数という. $a = 6, 28, 496, 8128,$ はその例

エウクレイデス (ユークリッド) の原論の最後の主張は $q = 2^{e+1} - 1$ が素数なら $a = 2^e q$ が完全数になるということである.

パラメータ m を取り m だけ平行移動した狭義の完全数 α を次のように導入する.
 $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書けるとき, m だけ平行移動した狭義の完全数という.

$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $N = \sigma(a)$, $q = N + m = \sigma(a) + m$, $q + 1 = 2a + m$ を満たす.

$Nq = (2a - 1)q = 2\alpha - q$, $N - q = -m$ に注意して

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \sigma(2^e)\sigma(q) \\ &= Nq + N \\ &= 2\alpha - q + N \\ &= 2\alpha - m.\end{aligned}$$

かくしてできた $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を α を未知数とみることにして平行移動 m の完全数の方程式とみなす.

この解 α を平行移動 m の (広義) 完全数 (perfect number with translation parameter m) という.

平行移動を考えることにより研究すべき完全数が飛躍的に増え豊富な結果が得られるようになった.

$m = 0$ の場合は α : 偶数なら $\alpha = 2^e q$, ($q = 2^{e+1} - 1$) が素数, と書けることをオイラーが示した.

与えられた m に対し平行移動 m の (広義) 完全数を決定することはどの m についてもできていない.

3 スーパー完全数の m だけ平行移動

3.1 スーパー完全数の場合

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になるとき q : 素数 により $\sigma(q) = q + 1$.

この左辺は $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$. 右辺は $q + 1 = 2a + m$.

ここであえて, $A = \sigma(a) + m$ とおく. 定義から, $q = A$ なのでこれは素数.

$\sigma(A) = q + 1$, $q + 1 = 2a + m$ により次の式を得る. $\sigma(A) = 2a + m$.

そこで

$A = \sigma(a) + m, \sigma(A) = 2a + m$ を a と A を 2 つの未知数とみた連立方程式と理解しこの式を平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言う.

この解 a を平行移動 m のスーパー完全数という. また A を a のパートナーという.

$m = 0$ のとき $\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ とおくと平行移動 m のスーパー完全数の方程式は $\sigma^2(a) = 2a$ となるので, 完全数の方程式 $\sigma(a) = 2a$ と類似した形になりこの解をスーパー完全数と呼ぶ.

これは D.Suryanaryana により 1969 年に導入された. また偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ となることも 本人により示された. これは著しい結果である. 実際, パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.

表 1: $\sigma^2(a) = 2a$ のときの解 (スーパー完全数)

a	素因数分解	q	q の素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071

ここで $q = N(a)$ は本当の メルセンヌ素数

命題 1. $a = 2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる. $q > 2$ なら q は奇数で, m は偶数. したがって, m が奇数なら平行移動 m のスーパー完全数はあったとしても 2 べきにならない.

Proof.

式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に $a = 2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1} - 1 + m) = 2^{e+1} + m.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ とおくと, $\sigma(q) = q + 1$. よって, q は 素数.

End

ここで, $a = 2^e$ なので, $q = 2a - 1 + m$. 2 べきの解を正規解 (regular solutions) という.

命題 2. $a = 2^e$ で $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数なら a はスーパー完全数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.

Proof.

q は素数なので $\sigma(q) = q + 1$.

$q = 2^{e+1} - 1 + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2^{e+1} + m = 2a + m$.

よって, $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$.

End

定義 1. 平行移動 m のスーパー完全数 a に対して $q = 2a - 1 + m$ を擬メルセンヌ数という.

注意 2. 実例にあたり, $|m| < 10$ 位なら a が偶数の仮定だけでも $a = 2^e$ が導ける可能性がある. (反例は $m = -28$ のときにある)

3.2 $m = -18$ のとき

この場合, 2 べきの解以外は $a = 3^3 = 27$ と $a = 3p (p \neq 3, p: \text{素数})$ となるらしい. さらに $q = 2p - 7$ は素数と推測する.

$a = 3p$ に対してそのパートナ A は $A = \sigma(3p) - 18 = 4p - 14 = 2q$, ただし $q = 2p - 7$.

表 2: $m = -18$

a	素因数分解	$p = a/3$	$q = 2p - 7$
15	$3 * 5$	5	3
16	2^4		
21	$3 * 7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3 * 13$	13	19
57	$3 * 19$	19	31
64	2^6		
111	$3 * 37$	37	67
129	$3 * 43$	43	79
201	$3 * 67$	67	127
219	$3 * 73$	73	139
237	$3 * 79$	79	151
309	$3 * 103$	103	199
327	$3 * 109$	109	211
417	$3 * 139$	139	271
471	$3 * 157$	157	307
579	$3 * 193$	193	379
669	$3 * 223$	223	439
831	$3 * 277$	277	547
921	$3 * 307$	307	607
939	$3 * 313$	313	619
1024	2^{10}		

正規解である 2 のべき以外には $3p$ と書けるほかに, $3^3 = 27$ がある. これは擬素数解とみることができよう.

注意 3. -18 だけ平行移動したスーパー完全数は 2 のべき以外には $3p$ と書けることが証明できればうれしい.

表 3: $m = -18$

a	素因数分解	A	素因数分解
15	$3 * 5$	6	$2 * 3$
16	2^4	13	13
21	$3 * 7$	14	$2 * 7$
27	3^3	22	$2 * 11$
39	$3 * 13$	38	$2 * 19$
57	$3 * 19$	62	$2 * 31$
64	2^6	109	109
111	$3 * 37$	134	$2 * 67$
129	$3 * 43$	158	$2 * 79$
201	$3 * 67$	254	$2 * 127$
219	$3 * 73$	278	$2 * 139$
237	$3 * 79$	302	$2 * 151$
309	$3 * 103$	398	$2 * 199$
327	$3 * 109$	422	$2 * 211$
417	$3 * 139$	542	$2 * 271$

命題 3. $m = -18$ に対し, $a = 3p$ ($p \neq 3, p$: 素数) かつ $q = 2p - 7$ が素数なら $a = 3p$ は解.

Proof

$m = -18$ を定義式 に代入すると $A = \sigma(a) - 18, \sigma(A) = 2a - 18$.

$a = 3p, (p \neq 3)$ とおくと $A = \sigma(a) - 18 = 4(p + 1) - 28 = 4p - 14 = 2(2p - 7)$. ここで, $q = 2p - 7$ は素数と仮定する. $A = 2q, \sigma(A) = \sigma(2q) = 3q + 3$.

一方, $2a + m = 6p - 18 = 3(2p - 6) = 3(q + 7) - 18 = 3q + 3$. よって, $\sigma(A) = 2a - 18$.

End

この逆が次の形で成立.

命題 4. $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -18$ のとき

$a = 3L, (L \not\equiv 0 \pmod{3})$ と書ける解があるなら, $p = L, q = 2p - 7$ はともに素数.

Proof.

$a = 3L$ に対して, $A = \sigma(3L) - 18 = 4\sigma(L) - 18 = 2(2\sigma(L) - 9)$ となるので

$Q = 2\sigma(L) - 9$ とおくと Q は奇数で $A = 2Q, \sigma(A) = 2a - 18 = 6(L - 3)$.

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \sigma(2Q) \\
&= 3\sigma(Q) \geq 3Q + 3 \\
&= 6\sigma(L) - 27 + 3 \\
&= 6\sigma(L) - 24 \\
&\geq 6L + 6 - 24 = 6(L - 3)
\end{aligned}$$

$\sigma(A) = 6(L - 3)$ はすでに示されているのですべて等号成立.
 $6\sigma(L) - 24 = 6L + 6 - 24$ ゆえに

$$\sigma(Q) = Q + 1, \sigma(L) = L + 1.$$

よって, $q =$ とおくと $L = p, q = 2p - 7$ はともに素数.

End

$p, q = 2p - 7$ はともに素数なのでこれはスーパー双子素数になっている.

4 $m = -28$ の スーパー完全数

表 4: $m = -28$ スーパー完全数

a	$factor$	quasiMersenne	$factor$	$a/7$
16	2^4	3	3	
26	$2 * 13$	23	23	
35	$5 * 7$	41	41	5
77	$7 * 11$	125	5^3	11
98	$2 * 7^2$	167	167	14
107	107	185	$5 * 37$	
119	$7 * 17$	209	$11 * 19$	17
128	2^7	227	227	
161	$7 * 23$	293	293	23
203	$7 * 29$	377	$13 * 29$	29
329	$7 * 47$	629	$17 * 37$	47
371	$7 * 53$	713	$23 * 31$	53
413	$7 * 59$	797	797	59
497	$7 * 71$	965	$5 * 193$	71
623	$7 * 89$	1217	1217	89
707	$7 * 101$	1385	$5 * 277$	101
917	$7 * 131$	1805	$5 * 19^2$	131
959	$7 * 137$	1889	1889	137
1043	$7 * 149$	2057	$11^2 * 17$	149
1253	$7 * 179$	2477	2477	179
1379	$7 * 197$	2729	2729	197
1589	$7 * 227$	3149	$47 * 67$	227
1631	$7 * 233$	3233	$53 * 61$	233
1799	$7 * 257$	3569	$43 * 83$	257
6491	6491	12953	12953	
29339	29339	58649	$223 * 263$	

$m = -28$ を定義連立式 に代入すると $A = \sigma(a) - 28, \sigma(A) = 2a - 28$.

$a = 7p, (p \neq 7)$ とおくと $A = \sigma(a) - 28 = 8(p+1) - 28 = 4p - 20 = 4(2p-5)$. ここで, $q = 2p-5$ は素数と仮定する. $A = 4q$. $4, q$ は互いに素なので $\sigma(A) = \sigma(4q) = 7q + 7$.

一方, $2a + m = 14p - 28 = 7 * 2p - 28 = 7(q+5) - 28 = 7q + 7 = \sigma(A)$.

この逆が次の形で成立.

命題 5. $A = \sigma(a) - 28, \sigma(A) = 2a - 28$

$a = 7Q, (Q \neq 0 \pmod{7})$ と書ける解があるなら, $p = Q, q = 2p - 5$ はともに素数.

Proof.

$\sigma(a) = \sigma(7Q) = 8\sigma(Q)$ なので, $A = \sigma(a) - 28 = 8\sigma(Q) - 28 = 4(2\sigma(Q) - 7)$.
 $R = 2\sigma(Q) - 7$ とおくとこれは奇数で, $A = 4R$.

$$\sigma(A) = \sigma(4R) = 7\sigma(R).$$

一方, $\sigma(A) = 2a - 28 = 14Q - 28$ より

$$7\sigma(R) = 14Q - 28.$$

よって $\sigma(R) = 2Q - 4 \geq R + 1$.

ゆえに, $2Q \geq R + 5$.

$R = 2\sigma(Q) - 7$ を代入して

$$2Q \geq R + 5 = 2\sigma(Q) - 2.$$

よって, $Q \geq \sigma(Q) - 1$. したがって, $Q = \sigma(Q) - 1$ が成り立ち, Q は素数. これより, $\sigma(R) = R + 1$ も成立し, R は素数.

$p = Q, q = R$ と書くと, $a = 7p, q = 2\sigma(Q) - 7 = 2p - 5$. $(p, q = 2p - 5)$ はスーパー双子素数.

End

解を分類すると,

- i. 2^e (正規解)
- ii. $7p$ (p : 素数) (通常解)
- iii. 素数解 107 など
- iv. $2 * 13, 2 * 7^2$ 偶数解

4.1 素数解

一般に スーパー完全数 $A = \sigma(a) + m, \sigma(A) - m = 2a$ について $a = p$: 素数 p の解があるとする.

$$A = \sigma(a) + m = p + 1 + m \text{ なので, } p = A - m - 1.$$

$$\sigma(A) = m + 2a = m + 2(A - m - 1) = 2A - m - 2.$$

$$m = -28 \text{ のとき } \sigma(A) = 2A + 26.$$

そこで 平行移動 -26 の完全数 A について, $A - m - 1 = A + 27$ が素数 p なら これが解.

表 5: 平行移動 $m = -26$ の完全数

A	factor	$A + 27$	factor
80	$2^4 * 5$	107	107
1184	$2^5 * 37$	1211	$7 * 173$
6464	$2^6 * 101$	6491	6491
29312	$2^7 * 229$	29339	29339
78975	$3^5 * 5^2 * 13$	79002	$2 * 3^3 * 7 * 11 * 19$
510464	$2^9 * 997$	510491	$41 * 12451$
557192	$2^3 * 17^2 * 241$	557219	$13 * 42863$

$A + 27$ が素数になるのは 107, 6491, 29939. これらは平行移動 $m = -28$ のスーパー完全数の素数解. したがって, 107 以外の素数解 6491, 29939 がみつかった.

5 m だけ平行移動したウルトラ完全数

$\sigma(2a) = 4a - 1, \sigma(\sigma(a) + m) - m = 2a$ なので

$$\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1$$

を得る. これを a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

定義 2. $\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1$ となる式を, a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

この式は複雑なので変数を増やして連立方程式に直すと次のようになる.

$$A = \sigma(a) + m, B = \sigma(A) - m, \sigma(B) = 4a - 1$$

この形の解 a を平行移動 m のウルトラ完全数という. $m = 0$ なら $\sigma^3(a) = 4a - 1$ になりこれが高橋のウルトラ完全数の定義式である.

当時小学4年生の高橋洋翔君がスーパー完全数の定義式を見て $\sigma^3(a) = 4a - 1$ を提案した.

これには驚かされてしまった. パソコンで調べるとこの式を満たす a はやはり2のべきしかないらしい. しかし証明ができない. そこでこの解をウルトラ完全数と言うことにしようなどと言った. m だけ平行移動したウルトラ完全数も考えて計算したが研究が難しいらしい.

6 ウルトラ完全数 II 型

$a = 2^e$, ($q = 2a - 1 + m$: 素数) のとき, $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $\sigma(a) = N = 2a - 1 = q - m$ なので $q = \sigma(a) + m$.

$A = \sigma(a) + m$ とおく. ($A = q$:素数, を心得ておく.)

$\sigma(A) = q + 1 = A + 1$ なので, $B = \sigma(A) - 1$ とおく. ($B = q$:素数, を心得ておく.)

$\sigma(B) = q + 1 = 2a + m$.

そこで, $a = 2^e$, ($q = 2a - 1 + m$: 素数) の仮定の下で得られた連立式

$A = \sigma(a) + m$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a + m$

($a = 2^e$ の仮定をすっかり忘れ) を満たす a を平行移動 m のウルトラ完全数 II 型という.

A をパートナー, B をシャドウという. $qM = 2a - 1 + m$ を疑似メルセンヌ数という.

区別のために前の式で定められたウルトラ完全数を I 型という. また高橋のウルトラ完全数とも言う.

ウルトラ完全数 II 型をウルトラ完全数ニュータイプともいう.

このようにして得られたウルトラ完全数 II 型はまったくのご都合主義で得られたもののようであるが研究を積み重ねてみると不思議なほど有用で研究しやすい式である.

実際ウルトラ完全数 II 型において $m = -28, -18, -14, -58$ のときの解からウルトラ三子素数が出てくる.

7 ウルトラ完全数 II 型の基本定理

次の結果はウルトラ完全数 II 型での完全数についてのオイラーによる定理の類似である.

定理 1. $m = 0$ のときウルトラ完全数 II 型 である a は偶数を仮定すると, $a = 2^e$, かつ $q = 2a - 1$ は素数になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

Proof.

条件から, $A = \sigma(a)$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a$ を満たす.

a は偶数なので奇数 L により $a = 2^e L$, ($e > 0$) と書ける.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $A = \sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = N\sigma(L)$. とくに $A = N\sigma(L)$ なので N と $\sigma(L)$ は A の約数である.

$L > 1$ を仮定する. すると, $\sigma(L) \geq L + 1$.

$A, \sigma(L)$ は A の約数なので

$$\sigma(A) \geq 1 + \sigma(L) + A.$$

条件式 $\sigma(B) = 2a = 2 * 2^e L = (N + 1)L$, かつ $\sigma(B) \geq B + 1 = \sigma(A)$.

よって,

$$\sigma(B) = (N + 1)L \geq B + 1 = \sigma(A) \geq 1 + \sigma(L) + A \geq 2 + L + N(L + 1).$$

これより

$$(N + 1)L \geq 2 + L + N(L + 1).$$

これは矛盾. よって, $L = 1, a = 2^e$. ここで次の補題を利用する.

補題 1. ウルトラ完全数 II 型の解 a が 2 べき, すなわち $a = 2^e$ なら, $A = q = 2a - 1 + m$ は素数

Proof.

仮定より $A = \sigma(a) + m = 2a - 1 + m$. 定義から $\sigma(B) = 2a + m = A + 1$.

$$\sigma(B) = 2a + m \geq B + 1 = \sigma(A) \geq A + 1 = 2a + m.$$

よって 2 つの等号が成り立ち, $\sigma(B) = B + 1, \sigma(A) = A + 1$. よって, B は素数. A も素数. $A = 2a - 1 + m = q$ なので, $q = 2a - 1 + m$ は素数.

End

この補題により, $q = 2a - 1 = 2^{e+1} - 1$ は素数 (メルセンヌ素数), になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

表 6: $m = -18$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a	$factor$	$p = a/3$	$q = 2p - 7$	$r = 6p - 19$	$r + 1$	$2a + m$
15	$3 * 5$	5	3	11	12	15
16	2^4			13	14	16
21	$3 * 7$	7	7	23	24	21
29	29			39	40	29
39	$3 * 13$	13	19	59	60	39
64	2^6			109	110	64
129	$3 * 43$	43	79	239	240	129
201	$3 * 67$	67	127	383	384	201
219	$3 * 73$	73	139	419	420	219
309	$3 * 103$	103	199	599	600	309
669	$3 * 223$	223	439	1319	1320	669
729	3^6	243	479	1439	1440	729

7.1 $m = -18$ のときウルトラ完全数 ニュータイプ

$m = -18$ のときウルトラ完全数 ニュータイプを調べた.

定理 2. $m = -18$ のとき, $p, q = 2p - 7, r = 6p - 19$ がすべて素数なら $a = 3p$ はニュータイプのウルトラ完全数になる.

Proof

$m = -18, a = 3p$ を代入すると,

$A = \sigma(a) + m = 4p + 4 - 18 = 4p - 14 = 2q, q = 2p - 7$. q : 素数と仮定すると,

$r = B = \sigma(A) - 1 = 3q + 2 = 3(2p - 7) + 2 = 6p - 19$. r : 素数と仮定すると,

$\sigma(B) = 6p - 18 = 2a + m$

End

さらにこの逆が成り立つ.

命題 6. p : 素数, $a = 3p, A = \sigma(a) + m = 2q, q = 2p - 7$

として $B = \sigma(A) - 1, \sigma(B) = 6p - 18 = 2a + m$ を仮定すると, q, r はともに素数.

Proof.

$$\sigma(B) = 6p - 18 \geq B + 1 = \sigma(A) \geq A + 1.$$

$A = \sigma(a) + m = 2q$ により, $\sigma(A) = \sigma(2q) = 3\sigma(q) \geq 3q + 3 = 3(2p - 6)$.

$\sigma(B) = 6p - 18$ により, $\sigma(B) = 6p - 18 \geq B + 1 = \sigma(A) \geq 3(2p - 6)$.

$\sigma(B) = 3(2p - 6)$ によりすべて等号が成り立ち, 結果として. q, r はともに素数.

End

ウルトラ三つ子素数とニュータイプのウルトラ完全数の関係がこのように成立した.
この結果は大きな勝利とも言える.

ニュータイプのウルトラ完全数の発見の端緒は 2018 年 7 月 2 日新宿にある大学病院
の地下の放射線治療室前の廊下におかれたベンチで得られ, その後西国分寺にある都立多
摩図書館でまとまった結果が得られた.

このように研究を行った動機は, 高橋のスーパー双子素数, ウルトラ三つ子素数予想を
補強することであった.

$m = -18$ のとき, $a = 3p$ の仮定を緩めることを試みよう.

解 $a = 3\rho$ ($3, \rho$: 互いに素) を持つとする.

$A = \sigma(a) + m = 4p + 4 - 18 = 4\sigma(\rho) - 18 = 2R$ ただし $R = 2\sigma(\rho) - 9$.

すると, R は奇数なので $\sigma(A) = 3\sigma(R)$.

$B = \sigma(A) - 1 = 3\sigma(R) - 1$.

$$\sigma(B) = 2a + m = 6\rho - 18 \geq B + 1 = \sigma(A) = 3\sigma(R).$$

$$\sigma(B) = 3\sigma(R) \geq B + 1 \geq \sigma(A) = 3\sigma(R).$$

不等号の箇所はすべて号成立になりその結果,

$$\sigma(B) = B + 1, \sigma(R) = R + 1, \sigma(\rho) = \rho + 1.$$

$\rho = p$: 素数, $q = R = 2\sigma(p) - 9 = 2p - 7, r = B = 3\sigma(R) - 1 = 6p - 19$.

$p, q = 2p - 7, r = 6p - 19$ はウルトラ三つ子素数

End

8 $m = -28$ のスーパー完全数

表 7: $m = -28$ のスーパー 完全数

a	$factor$	A	q-mer	$factor$
16	2^4	3	3	3
26	$2 * 13$	14	23	23
35	$5 * 7$	20	41	41
77	$7 * 11$	68	125	5^3
98	$2 * 7^2$	143	167	167
107	107	80	185	$5 * 37$
119	$7 * 17$	116	209	$11 * 19$
128	2^7	227	227	227
161	$7 * 23$	164	293	293
203	$7 * 29$	212	377	$13 * 29$
329	$7 * 47$	356	629	$17 * 37$
371	$7 * 53$	404	713	$23 * 31$
413	$7 * 59$	452	797	797
497	$7 * 71$	548	965	$5 * 193$
623	$7 * 89$	692	1217	1217
707	$7 * 101$	788	1385	$5 * 277$
917	$7 * 131$	1028	1805	$5 * 19^2$
959	$7 * 137$	1076	1889	1889
1043	$7 * 149$	1172	2057	$11^2 * 17$

これを踏まえて $m = -28$ ウルトラ完全数 ニュータイプを調べる.

9 $m = -28$ のウルトラ完全数 ニュータイプ

はじめにパソコンで数表を出す.

ウルトラ完全数 ニュータイプの定義式に $m = -28$ を代入すると次のようになる.

$$A = \sigma(a) - 28, B = \sigma(A) - 1, \sigma(B) = 2a - 28.$$

$m = -28$ のときの数表を見ると $a = 7p$, ($p \neq 7$: 素数), の解が多いことに気づく.

$$a = 7p \text{ とおくと, } A = \sigma(a) - 28 = 8p + 8 - 28 = 8p - 20 = 4q, (q = 2p - 5)$$

そこで q は素数と仮定すると, $4, q$ は互いに素なので, $\sigma(A) = \sigma(4q) = 7(q + 1)$.

$$B = \sigma(A) - 1 = 7q + 6. \quad r = 7q + 6 \text{ とおきこれも素数と仮定する.}$$

$$\sigma(B) = r + 1 = 7q + 7 = 7(2p - 5 + 1) = 14p - 28 = 2a + m.$$

ゆえに, 次の結果を証明できた.

定理 3. $p, q = 2p - 5, r = 7q + 6$ がどれも素数なら, $a = 7p$ は $m = -28$ ウルトラ完全数 ニュータイプの解になる.

このとき $(p, q = 2p - 5, r = 7q + 6)$ をウルトラ三つ子素数という. このとき $7p$ はウルトラ完全数 ニュータイプ になる.

表 8: $m = -28$ のウルトラ完全数 ニュータイプ

a	$p = a/7$	$q = 2p - 5$	$r = 14p - 29$	$r + 1$	$(r + 1 - m)/2$
16	2^4				
26	$2 * 13$		0	1	14.5
35	$5 * 7$	5	5	41	42
98	$2 * 7^2$	14	23	167	168
128	2^7	18.28571429	31.57142857	227	228
161	$7 * 23$	23	41	293	294
413	$7 * 59$	59	113	797	798
623	$7 * 89$	89	173	1217	1218
959	$7 * 137$	137	269	1889	1890
1253	$7 * 179$	179	353	2477	2478

ここにおいて $r = 7q + 6 = 7(2p - 5) + 6 = 14p - 29$.

9.1 逆定理

a をウルトラ完全数 ニュータイプ とし, $a = 7C$, (7 と C は互いに素) と仮定する.

したがって,

$$A = \sigma(a) - 28, B = \sigma(A) - 1, \sigma(B) = 14C - 28$$

を満たす.

$A = \sigma(7C) - 28 = 8\sigma(C) - 28 = 4(2\sigma(C) - 7)$ になり $R = 2\sigma(C) - 7$ とおくと
 $A = 4R$.

$$\sigma(B) = 14C - 28 \geq B + 1 = \sigma(A). \quad A = 4R \text{ により, } R : \text{奇数なので,}$$

$$\sigma(A) = \sigma(4R) = 7\sigma(R) \geq 7R + 7.$$

$$\sigma(B) = 14C - 28 \geq \sigma(A) \geq 7R + 7 \text{ になるので}$$

$$14C - 28 \geq 7R + 7 \text{ を } 7 \text{ で割って,}$$

$$2C - 4 \geq R + 1.$$

$R = 2\sigma(C) - 7$ によると, $R + 1 = 2\sigma(C) - 6$ となり

$$2C - 4 \geq 2\sigma(C) - 6.$$

したがって, $C \geq \sigma(C) - 1$.

一般には $C \leq \sigma(C) - 1$ が成り立ち, $C = \sigma(C) - 1$. よって, C は素数 p . これよりすべての不等号が等号になり, $R = 2\sigma(C) - 7 = 2C - 5 = 2p - 5$ は素数 q .

$\sigma(B) = B + 1, \sigma(B) = 14C - 28$ により, $B + 1 = 14C - 28 = 14p - 28$. $B = r$ と書けば $r = 14p - 29$. かくして, $p, q = 2p - 5, 14p - 29$ はウルトラ三つ子素数.

10 $m = -14$ のスーパー 完全数

表 9: $m = -14$ のスーパー 完全数

a	$factor$	A	q-mer	$factor$
16	2^4	17	17	17
37	37	24	59	59
43	43	30	71	71
64	2^6	113	113	113
67	67	54	119	$7 * 17$
79	79	66	143	$11 * 13$
127	127	114	239	239
128	2^7	241	241	241
151	151	138	287	$7 * 41$
199	199	186	383	383
247	$13 * 19$	266	479	479
271	271	258	527	$17 * 31$
317	317	304	619	619
331	331	318	647	647
367	367	354	719	719
379	379	366	743	743
439	439	426	863	863
487	487	474	959	$7 * 137$
512	2^9	1009	1009	1009
547	547	534	1079	$13 * 83$
619	619	606	1223	1223
631	631	618	1247	$29 * 43$
691	691	678	1367	1367
907	907	894	1799	$7 * 257$

ここでは素数解が多い.

11 $m = -14$ のウルトラ完全数 ニュータイプ

$m = -14$ での結果は完全数の場合に一般化される.

表 10: $m = -14$ のウルトラ完全数 ニュータイプ

a		p	$A = p - 13$	$q = A/6$	$B = r = 12q + 11$	$r + 1$	$r + 1 - 2a$
16	2^4	16	3	0.5	17	18	-14
37	37	37	24	4	59	60	-14
43	43	43	30	5	71	72	-14
64	2^6	64	51	8.5	113	114	-14
127	127	127	114	19	239	240	-14
128	2^7	128	115		241	242	-14
133	$7 * 19$	133	120	20	251	252	-14
199	199	199	186	31	383	384	-14
247	$13 * 19$	247	234	39	479	480	-14
317	317	317	304		619	620	-14
331	331	331	318	53	647	648	-14
343	7^3	343	330	55	671	672	-14
367	367	367	354	59	719	720	-14
379	379	379	366	61	743	744	-14
439	439	439	426	71	863	864	-14
512	2^9	512	499		1009	1010	-14
619	619	619	606	101	1223	1224	-14
691	691	691	678	113	1367	1368	-14
919	919	919	906	151	1823	1824	-14
1027	$13 * 79$	1027	1014	169	2039	2040	-14
1051	1051	1051	1038	173	2087	2088	-14

12 $m = -2 - 2\mu$, μ : 完全数

$m = -2 - 2\mu$, (μ : 完全数) のとき $a = p$ (p : 素数) がウルトラ完全数 ニュータイプになるのはどんなときか考える.

条件から $A = \sigma(a) - 2 - 2\mu$, $B = \sigma(A) - 1$ を満たす.

さて, $A = p + 1 - 2 - 2\mu$ は素数 Q の μ 倍とする. すなわち, $A = p + 1 - 2 - 2\mu = \mu Q$. Q と μ は互いに素とする.

$\sigma(\mu) = 2\mu$ によって, $\sigma(A) = \sigma(\mu Q) = 2\mu\sigma(Q) = 2\mu(Q + 1)$.

$B = \sigma(A) - 1 = 2\mu(Q + 1) - 1$ は素数と仮定する.

計算してみると

$$\sigma(B) = B + 1 = 2\mu(Q + 1) = 2p - 2 - 2\mu.$$

$2p - 2 - 2\mu = 2a + m$ なので, $\sigma(B) = 2a + m$. これにより.

$a = p(p : \text{素数})$ のとき, $A = p + 1 - 2 - 2\mu = \mu Q$ ($Q : \text{素数}$), $B = 2\mu(Q + 1) - 1$ は素数とすると, $a = p$ は ウルトラ完全数 ニュータイプ になる.

12.1 逆定理

$m = -2 - 2\mu$, $\mu : \text{完全数}$ は仮定されている.

$a = p$ 素数と仮定する. これはウルトラ完全数 ニュータイプ になると仮定する. すなわち

$A = \sigma(a) - 2 - 2\mu = p - 1 - 2\mu$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a + m = 2a - 2 - 2\mu$ を満たすとする.

$A = \mu Q$, とかけて Q, μ は互いに素と仮定する. $A = \mu Q = \sigma(a) - 2 - 2\mu = p - 1 - 2\mu$ により $p = \mu Q + 1 + 2\mu$.

$$\sigma(B) \geq B + 1 = \sigma(A) = 2\mu\sigma(Q) \geq 2\mu(Q + 1) = 2\mu + 2\mu Q.$$

$p = \mu Q + 1 + 2\mu$ によると $2\mu + 2\mu Q = 2\mu + 2(p - 1 - 2\mu) = 2p - 2 - 2\mu$.

一方, $\sigma(B) = 2p - 2 - 2\mu$ が仮定なので, 不等号がすべて等号になり, $\sigma(B) = B + 1$, $\sigma(Q) = Q + 1$. $B = 2\mu\sigma(Q) - 1$ が素数.

$(Q, p = \mu Q + 1 + 2\mu, 2\mu Q + 2\mu - 1)$ はウルトラ三つ子素数.

$\mu = 6$ なら $(Q, p = 6Q + 13, 12Q + 11)$ がウルトラ三つ子素数.

完全数と双子素数は, 一般の数学愛好家にもよく知られた概念だが完全数の一般化と双子素数の一般化がこのように結びついたのである. 驚異というべきか.

参考文献

- [1] 高木貞治, 初等整数論講義第2版, 共立出版社, 1971.
- [2] 飯高茂, 『数学の研究をはじめよう (I),(V)』, 現代数学社, 2016, 2017, 2018.
- [3] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.
- [4] Antal Bege and Kinga Fogarasi, Generalized perfect numbers, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73-82.
- [5] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

Deformation of Categories by Group preStacks

Kazuhisa Maehara at Kurashiki

September 16, 2018

Abstract

In this article we extend the theory of the absolute Galois and LGalois groups to apply it to extensions of the presheaves of topological groups associated to deformation projective separable morphisms of a family of projective separable varieties over a base scheme. Furthermore we generalize it to deformation of categories using Tannaka-Krein duality.

We refer to the theorem which we gave last year at Kurasiki symposium. Fundamental Theorem of LGalois theory:

Theorem 0.1. *Let L be an LGalois extension of K and Γ its LGalois group. Let $\mathcal{K}$ be the set of subextensions E of L such that L/E are separable and $\mathcal{G}$ the set of algebraically closed subgroup of Γ . For each subgroup $\Delta \in \mathcal{G}$, $k(\Delta)$ denotes the invariant field of L by Δ and for $E \in \mathcal{K}$ $g(E)$ denotes the group of E -automorphism of L . Then $\Delta \rightarrow k(\Delta)$ is a bijection of $\mathcal{G}$ to $\mathcal{K}$. $E \rightarrow g(E)$ is an inverse bijection of $\mathcal{K}$ to $\mathcal{G}$. For $E \in \mathcal{K}$, $\mathrm{LGal}(L/E)$ is an algebraically closed subgroup of $\mathrm{LGal}(L/K)$ with an induced topology. For a subgroup Δ of Γ , Let E be the invariant field of Δ . Then the LGalois group of E is the closure of Δ in Γ . Let $\mathcal{M}$ be the set of*

subextensions of L such that if $u : E \simeq E'$ then transcendent degrees of L over E and E' should be the same. Let $E, F \in \mathcal{M}$.

$$\text{Hom}_K^{\text{sep}}(E, F) \simeq \text{Hom}^{\text{al.close inc}}_{\text{LGal}(L/K)}(\text{LGal}(L/F), \text{LGal}(L/E))$$

where the left homomorphisms are field separable injections and the right homomorphism are continuous algebraically closed inclusions. Note that we consider an fixed algebraically closed field containing all fields in the category of fields and on the other hand an fixed topological group LGal group containing all topological group LGal groups in the category of LGal groups. In $\text{Hom}_K^{\text{sep}}(E, F)$, E is to be abstract, in $\text{Hom}^{\text{al.close inc}}_{\text{LGal}(L/K)}(\text{LGal}(L/F), \text{LGal}(L/E))$ $\text{LGal}(L/E)$ is to be abstract.

Proof. Let $E \in \mathcal{K}$ be a field. When $[L : E] < \infty$, it comes from usual Galois theory, we assume $[L : E] = \infty$. Let $G_E = g(E)$ be the algebraic closure of a subgroup of Γ which makes E invariant and E' the fixed field by G_E . Clearly, $E \subseteq E'$. Let L_E be the algebraic closure of E in L and $G_E^{L_E}$ the restriction of G_E on L_E . Note that $\text{rest} : G_E \rightarrow G_E^{L_E}$ is surjective. In L_E we have $E = E'|_{L_E}$ by virtue of Galois theory. If E' is algebraic over E , $E'|_{L_E} = E'$. If E' is not algebraic over E , then there exists transcendent elements in E' over E . However, they are not invariant by the definition of LGal group. Thus $E' = E$. Next let Δ be a group in $\mathcal{G}$ and $k(\Delta)$ the fixed field by Δ . Let $G = g(k(\Delta))$ be the algebraic closure of the group which makes $k(\Delta)$ invariant. Δ is contained in G . Since Δ is algebraically closed, $\Delta = G$.

We show the last statement. Given an extension F of E in $\mathcal{M}$, there exists an injection

$$\text{LGal}(L/F) \rightarrow \text{LGal}(L/E)$$

Conversely, given

$$u : \text{LGal}(L/F) \rightarrow \text{LGal}(L/E)$$

one has an algebraically closed subgroup $u(\text{LGal}(L/F))$ in $\text{LGal}(L/E)$. Hence one has an invariant field F' of $u(\text{LGal}(L/F))$. There exists an isomorphism $u^* : F' \rightarrow F$ since LGal groups are isomorphic, which will be proved later. By hypothesis, u^* can be extended to a K -automorphism $v^* : L \rightarrow L$. Hence for $x \in F'$ one has $\sigma(v^*(x)) = v^*(x)$ for $\sigma \in \text{LGal}(L/F)$. Thus $\sigma \rightarrow (v^*)^{-1}\sigma v^*$ gives u . Hence one has

$$\begin{array}{ccc} \text{LGal}(L/F) & \xrightarrow{(v^*)^{-1}\sigma v^*} & \text{LGal}(L/F') \\ & \searrow u & \downarrow \\ & & \text{LGal}(L/E) \end{array}$$

If F and F' do not have the same equipotents of any separant transcendent bases over K , $\text{LGal}(L/F)$ and $\text{LGal}(L/F')$ are not isomorphic since a transcendent element has conjugates as all transcendent elements of L over K , the set of which is equipotent to that of L . Thus F and F' have separant transcendent bases A and B which are equipotent. Since $K(A)$ and $K(B)$ are isomorphic, the separable closures of them are also isomorphic. Hence the isomorphism of $\text{LGal}(L/F)$ and $\text{LGal}(L/F')$ induces that of their absolute Galois groups $\text{Gal}(\bar{F}^s/F)$ and $\text{Gal}(\bar{F}'^s/F')$. Hence F and F' are isomorphic. $\square$

The category whose objects are subfields of a fixed separably closed field of a ground field such that it is separable over each subfield and whose morphisms are separable inclusions is equivalent to the category whose objects are algebraically closed subgroups of an automorphism group of a fixed separably closed field over a ground field and whose morphisms are inclusions.

Let S be a noetherian scheme. Let $\mathcal{C}$ be the category the objects of which are reduced schemes projective, geometrically irreducible and reduced over S and the morphisms of which are surjective separable morphisms over S . For a sake of simplicity, assume S is an affine scheme. Take an object $f : X \rightarrow S$ of $\mathcal{C}$ and a hyperplane H on X ample over S . Then $X \setminus H$ is affine and the ring of this affine scheme is a subring of the function field of X . The

automorphism group G of $\mathrm{Spec} f_* \mathcal{O}_X$ over S is a finite group and the trajectory H' of H on which the group acts is affine. So $X \setminus H'$ is G -invariant. Consider the automorphism group LG of the function field of X over that of S and the dual of the automorphism group $\mathrm{Aut}(X/S)^\circ$ of X over S . This group is the intersection of the duals of the automorphism groups $\mathrm{Aut}(X \setminus H')$. Hence

$$LG \rightarrow \mathrm{Aut}(X/S)^\circ$$

is a surjection of topological groups. Take a pro-object of $\mathcal{C}$ and the dual of the automorphism group over S .

Definition 0.1. *SGA1*

1. Let $f : X \rightarrow Y$ be a morphism of schemes of finite type. f is said to be *etale* at $x \in X$ if f is flat at x and unramified at x .
2. A scheme X over a field k is said to be *separable* over k if for any extension K of k $X \otimes_k K$ is reduced. Let $f : X \rightarrow Y$ be a morphism of schemes. f is *separable* if f is flat and if for any $y \in Y$ the fibre $X \otimes_Y k(y)$ is separable.

Proposition 0.1. *SGA1* Let $f : X \rightarrow Y$ be a proper and separable morphism over Y and Y a locally noetherian scheme. Taking the Stein factorization $f' : X \rightarrow \mathrm{Spec} f_* \mathcal{O}_X$ and $g : \mathrm{Spec} \mathcal{O}_X \rightarrow Y$, we have g is finite and etale.

Let Ω be an algebraically closed field with infinite transcendental elements. Let S be a locally noetherian, connected scheme and

$$a : \mathrm{Spec} \Omega \rightarrow \mathbb{P}_n \times S$$

a geometric point of S . Let $\mathcal{C}$ be the category of finite etale covering of $\mathbb{P}^n \times S$. We take a

functor F such that for a finite etale covering X of $\mathbb{P}^n \times S$, $F(X)$ is a set of the geometric points of X over a and n . Then F is a functor on $\mathcal{C}$ into the category of finite sets.

Proposition 0.2. *Let X be an element of $\mathcal{C}$ and G a topological group operating X over S through S -automorphisms. Then G acts admissibly and X/G is in $\mathcal{C}$.*

F is left-exact. We can find a projective system over a filtered order I :

$$(P_i)_{i \in I}$$

in $\mathcal{C}$. We take a limit $P = \lim_{i \in I} P_i$, a pro-object in $\mathcal{C}$. We have an isomorphism

$$F(X) = \text{Hom}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}(P, X) = \lim \text{Hom}(P_i, X)$$

We define a topological group with respect to a point

$$\Phi = \text{Aut}(F) = \text{Aut}^o(P)$$

and we denote $\Phi_1(S, a)$. Let $f : X \rightarrow Y$ be in $\mathcal{C}$. Denoting an algebraic fundamental group by $\pi_1(X, a)$, we have

$$\begin{array}{ccc} \Phi_1(X, a) & \longrightarrow & \Phi_1(Y, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, a) & \longrightarrow & \pi_1(Y, a) \end{array}$$

where the vertical arrows are surjections and the upper horizontal arrow is injection, the lower horizontal arrow factors an injection through a surjection, arrows are topological group homomorphisms. Let $g : S \rightarrow T$ be a morphism of locally noetherian schemes. We have

$$\begin{array}{ccc} \Phi_1(S, a) & \longrightarrow & \Phi_1(T, g(a)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S, a) & \longrightarrow & \pi_1(T, g(a)) \end{array}$$

Let S be a locally noetherian scheme. We consider the presheaves $\Phi_1(U)$ and $\pi_1(U)$ over the category of the subschemes U of X neglecting a geometric point and we denote them by $\underline{\Phi}/X$ and $\underline{\Pi}/X$, respectively. These sheaves corresponds biunivollally to a variety. Consider a fibre scheme over S with a fibre X and translate it to a extensin of sheaves $\underline{\Phi}/X$ and $\underline{\Pi}/X$. In particular, let k be a field and X a projective separable variety over k . Given a general generic point on X

$$a : \Omega \rightarrow \text{Spec } k(X) \rightarrow X$$

we construct the sheaves $\underline{\Phi}(a)/X$ and $\underline{\Pi}(a)/X$ of presheaves $U \mapsto \Phi_1(U, a)$ and $U \mapsto \pi_1(U, a)$, respectively. We have the cohomology:

$$H^1(\Gamma, (\underline{G} \rightarrow \text{Aut}(\underline{G})))$$

where $\underline{G}$ denotes $\underline{\Phi}(a)/X$ or $\underline{\Pi}(a)/X$ and where Γ is the absolute Galois group of the function field of S .

Theorem 0.2. *Let k be a field and S be a projective variety over k . Let Y be a projective separable variety over k . Let $f : Y \times S \rightarrow \mathcal{X}$ be a surjective separable morphism over S . Let $\mathcal{X}$ be a projective separable variety over S . Assume every fibre $\mathcal{X}_s$ of $\mathcal{X}$ over S is a projective variety over $\text{Spec } k(s)$ of $s \in S$. In particular, we denote by X a projective separable variety over $\text{Spec } k(S)$. Assume the following commutative triangle:*

$$\begin{array}{ccc} Y \times S & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

Then $\mathcal{X}$ is locally trivial over S .

Proof.

$$H^1(\Gamma, \text{Aut}(\underline{G})) \longrightarrow H^1(\Gamma, (\underline{G} \rightarrow \text{Aut}(\underline{G})))$$

where $\underline{G}$ denotes $\Phi(a)/X$ or $\Pi(a)/X$ and where Γ is the absolute Galois group of the function field of S . $\underline{G}$ has a section as a group homomorphism which determines a member in the cohomology $H^1(\Gamma, \text{Aut}(\underline{G}))$ such that it is in the algebraic part of $\text{Aut}(\underline{G})$. Note that an automorphism group of a scheme flat projective over a noetherian scheme is a group scheme. Hence it implies

$$\Gamma \rightarrow \text{Aut}(X)$$

Then replacing S by S' through a generically finite separable surjective morphism, $\mathcal{X}'_S$ is locally trivial. □

Theorem 0.3. *Let S be a complex projective variety and $\mathcal{X}$ a non-singular complex variety projective flat over S . Let $\mathcal{H}$ be a hyperplane of $\mathcal{X}$ such that $\mathcal{H}$ is normal crossing on $\mathcal{X}$ and that each fibre $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{H})_s$ for $s \in S$ is of log-Kodaira dimension ≥ 0 . Moreover there is a proper surjective morphism from a $Y_0 \setminus I_0 \times S$ onto $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ over S . Then $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ is locally trivial after base change through a generically finite morphism $S' \rightarrow S$ where S' is a projective variety.*

Proof. Note that the automorphism group of an open variety of log-Kodaira dimension ≥ 0 defined by Iitaka is a scheme in algebraic groups. Hence the argument is similar in the proof of the preceding theorem. Left to the reader. □

From here we will discuss the arguments using Tannaka duality, which is originally a duality between affine group schemes over a field k and the categories of their representations proved by Saavedra Rivano, Deligne-Milne. Tannaka duality can be extended to affine groupoid schemes acting on $\text{Spec } K$ for some field extension K of k . An affine groupoid scheme G acting on $\text{Spec } K$ can be reconstructed from the forgetful functor $\text{Rep } G \rightarrow \mathbf{Vect}_K$. A functor $w : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ is equivalent to the forgetful functor $\text{Rep } G \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ if and only if w is a k -linear tensor functor

and faithful, exact, where $\mathcal{A}$ is an autonomous symmetric monoidal abelian k -linear category, which is called a rigid tensor category. Here an 'autonomous' monoidal category means that every object has a dual. Let k be a field. There exists the contravariant equivalence between affine schemes over k and k -algebroids. The affine groupoids correspond to Hopf algebroids, i.e., an associative bialgebroid with antipode. An affine groupoid $G = \text{Spec } H$ acting on $\text{Spec } B$ over $\text{Spec } k$ is a Hopf algebroid (B, H) in the monoidal category $\mathbf{Vect}_k$ where B and H are k -algebras. H can be thought as a (B, B) -bimodule. In addition a Hopf algebroid has a comultiplication $H \rightarrow H \otimes_B H$ and a counit $H \rightarrow B$, which correspond to the composition operation and the map to send an object to its identity in the affine groupoid, and an antipode $H \rightarrow H$ which corresponds the map to send a morphism to its inverse. A (B, B) -coalgebroid or coring is a (B, B) -bimodule C with a comultiplication $C \rightarrow C \otimes_B C$ and a counit $C \rightarrow B$, which are coassociative and counital. Since k is a field, a (B, B) -bimodule is an abelian group with a left and a right B -action such that the two k -actions coincide. If $B = k$, every (B, B) -coalgebra is a k -algebra. A C -comodule is a B -module endowed with a coaction $M \rightarrow C \otimes_B M$. In the case $\text{Spec } K$ is generalized to $\text{Spec } R$ where R is a commutative ring. For a technical reason, we need a symmetric monoidal categories to be complete, cocomplete and closed, i.e., a condition that a tensor functor $x \otimes -$ has its right adjoint $[x, -]$, which we call a cosmos. Note that an R -module has a dual if and only if it is finitely generated and projective.

Definition 0.2. *Let R be a commutative ring and B a commutative R -algebra. A Cauchy comodule of a (B, B) -coalgebroid C is a comodule whose underlying B -module is finitely generated and projective. The category of Cauchy comodules of C is denoted by $\text{Rep}C$.*

The Tannaka biadjunction is the following

$$(B, B) - \mathbf{Coalgebroid} \xrightarrow[\text{Rep}(-)]{} R - \mathbf{Cat}/\mathbf{Mod}_B$$

which has a left biadjoint $L(-)$. Here B denotes a fixed R -algebra, and $R\text{-}\mathbf{Cat}/\mathbf{Mod}_B$ denotes the 2-category whose objects are R -linear functors with codomain $\mathbf{Mod}_B$. Considering the case B is a finite etale R -algebra, which is a Galois covering over R , there exists a finite group G and G -modules, $\text{Rep}G^o$ which the forgetful functor sends to Mod_B . We find a Hopf algebra H such that $G = \text{Spec } H$. A ring homomorphism $R \rightarrow B$ is pro-etale if it is a filtered limit of etale morphisms of schemes over $\text{Spec } R$ and we call it an ind-etale algebra. Then we have a profinite group $\pi_1(\text{Spec } R)$. Hence for a noetherian scheme X we have a presheaf $\pi_1(-)$ on the category of affine subschemes of X and we can extend a presheaf on the category of the subschemes of X . Furthermore let $\mathcal{N}$ be a cosmos.

Theorem 0.4. *Let $\mathcal{B}$ be an enriched category, i.e., $\mathcal{N}$ -category. Let*

$$R : \mathbf{Comonad}_{\text{Mod}(\mathcal{N})}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{N} - \mathbf{Cat}/\overline{\mathcal{B}}$$

be the 2-functor which on objects sends a $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ -comonad to the forgetful functor from its $\mathcal{N}$ -category of Cauchy comodules to the Cauchy completion $\overline{\mathcal{B}}$ of $\mathcal{B}$. The 2-functor sends a $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ -comonad C to the forgetful functor $\text{Rep}(C) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}$. If the category $\mathbf{Comonad}_{\text{Mod}(\mathcal{N})}(\mathcal{B})$ is regarded as a 2-category with only identity 2-cells, then R has a left biadjoint L .

We denote the tensor product of $\mathcal{N}$ by $- \otimes - : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, the unit object by I and the internal hom by $[-, -]$. A category $\mathcal{A}$ enriched in $\mathcal{N}$ has objects $a, a', \dots$ and instead of hom-sets, it has hom-objects $\mathcal{A}(a, a') \in \mathcal{N}$. For a small $\mathcal{N}$ -category $\mathcal{A}$, there a $\mathcal{P}\mathcal{A}$ of enriched presheaves on $\mathcal{A}$ and an enriched Yoneda embedding.

Definition 0.3. *Let $\mathcal{N}$ be a cosmos and let $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ be $\mathcal{N}$ -categories. A module $M : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ is a $\mathcal{N}$ -functor $\mathcal{B}^{op} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{N}$ and composition of modules $M : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ and $N : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ is denoted*

by $N \odot M$ and specified by the coend

$$N \odot M(c, a) = \int^{b \in B} N(c, b) \otimes M(b, a)$$

This composition is associative up to coherent isomorphism and the representable modules are identities up to isomorphism by a form of the Yoneda lemma. We get a bicategory $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ with 0-cells the small $\mathcal{N}$ -categories, 1-cells the modules and 2-cells the $\mathcal{N}$ -natural transformations between them.

Definition 0.4. Let $\mathcal{B}$ be a $\mathcal{N}$ -category. A comonad in the bicategory $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ on $\mathcal{B}$ is a coalgebra in the category $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ of endmodules of $\mathcal{B}$, whose monoidal structure is given by composition of modules. The category of $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ -comonads on $\mathcal{B}$ is denoted by $\mathbf{Comonad}_{\mathbf{Mod}(\mathcal{N})}(\mathcal{B})$.

Note that an endmodule of a $\mathcal{N}$ -category B with a single object, i.e., an algebra in $\mathcal{N}$ is a (B, B) -bimodule. Hence a $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ -comonad on B in $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ is a (B, B) -coalgebroid. If $B = I$, where I is a unit object in $\mathcal{N}$, it is a coalgebra in $\mathcal{N}$. Let $\mathcal{B}$ be a $\mathcal{N}$ -category. An object $F \in \mathcal{PB}$ is called a Cauchy object if the representable functor $\mathcal{PB}(F, -)$ is cocontinuous in the enriched sense. The Cauchy completion $\overline{\mathcal{B}}$ of $\mathcal{B}$ is the full subcategory of Cauchy objects in $\mathcal{PB}$. Since colimits in presheaf categories are computed pointwise, it follows $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$. Let $\mathcal{N} = \mathbf{Mod}_R$ be the cosmos of R -modules for a commutative ring R and let B be an R -algebra which is to be considered a one object $\mathcal{N}$ -category $\mathcal{B}$. The presheaf category $\mathcal{PB}$ is isomorphic to the R -linear category of right B -modules. A B -module M is a Cauchy object if and only if it is finitely generated and projective. We want to apply the generalization to a deformation of compact Kähler manifolds, differential manifolds and topological manifolds and any other categories. Let $\mathcal{M}$ be a 2-category, i.e., a category enriched in $\mathbf{Cat}$.

Theorem 0.5. *Let B be an object of $\mathcal{M}$. Then there is a canonical 2-functor*

$$L : \text{Map}(\mathcal{M})/B \rightarrow \mathbf{CoMonad}(B)$$

If $\mathcal{M}$ has Tannaka-Krein objects, then there is a canonical pseudofunctor

$$\mathbf{Rep} : \mathbf{CoMonad}(B) \rightarrow \text{Map}(\mathcal{M})/B$$

such that $\mathbf{Rep}$ is the left biadjoint to $\mathbf{Rep}$

Assumption: $\mathcal{M}$ has a terminal object. There are sufficiently many Galois objects in $\mathcal{M}$, which has a pro-monad. Note that a 2-category biequivalent to the bicategory $\mathbf{Mod}(\mathcal{N})$ for some cosmos $\mathcal{N}$ has Tannaka-Krein objects. Let B an object of $\mathcal{M}$. A comonad on B is a comonoid in the monoidal category $\mathcal{M}(B, B)$ with monoidal structure given by composition. The category of comonads on B is denoted by $\mathbf{CoMonad}(B)$, which is thought as a 2-category with only the identity 2-cell.

Definition 0.5. *Let $\mathcal{M}$ be a 2-category. A map between 0-cells A and B of $\mathcal{M}$ is a left adjoint $f : A \rightarrow B$, together with a chosen right adjoint $\text{var}f$, unit η and counit ϵ . A 2-cell between maps $(f, \bar{f}, \eta, \epsilon) \Rightarrow (g, \bar{g}, \eta, \epsilon)$ is simply denoted by a 2-cell $f \Rightarrow g$. The 2-category of maps in $\mathcal{M}$ is denoted by $\text{Map}(\mathcal{M})$.*

Theorem 0.6. *Let $\mathcal{M}$ be a 2-category satisfying conditions above. Let $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ be a 1-cell of $\mathcal{M}$. Then there exists a distinguished element in the cohomology*

$$H^1(\Gamma, (G \rightarrow \text{Aut}G))$$

which represents an extension of presheaves G of monads associated to a fibre of f . Assume furthermore that every fibre of f has an automorphism of any fibre of F to be algebraic even after base change and that there exists an epimorphic 1-cell $Y \times S/S \rightarrow \mathcal{X}/S$ even after base change. Then $\mathcal{X}/S$ is categorically equivalent to locally trivial after some base change.

Corollary 0.1. *Let $\mathcal{X}/S$ be a fibre space of (compact) differentiable manifolds with Lie groups as automorphismss over a differentiable manifold S , If this fibre space are dominated by a trivial fibre space via a surjection even after base change. Then $\mathcal{X}/S$ is locally trivial.*

Proof. Elie Catan's theorem says that any closed subgroup of a Lie group is a Lie subgroup. On the other hand a profinite group is compact and its continuous image is a profinite group. No profinite group is a Lie group except a point. Consider

$$H^1(\Gamma, \text{Aut}(G)^{\text{cont}})$$

and the continuous group-homomorphism

$$\Gamma \longrightarrow \text{Aut}(G)^{\text{cont}}$$

maps to a point. Hence the member representing the extension in

$$H^1(\Gamma, (G \rightarrow \text{Aut}(G)))$$

shows that the corresponding extension is trivial. □

References

- [S] Schaeppi, D, *The formal theory of Tannaka duality*, Astérisque 357, 2013.
- [B1] N.Bourbaki, *Éléments de Mathématique Algèbre Chapitres 4 à 7*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg pp. 422 (2007).
- [G] Gelbart,S., *An elementary introduction to the Langlands program*, Americal Mathematical Society. Bulletin.(1984) New Series, 10(2): 177-219, ISSN 0002-9904

- [BG] Bernstein, J., Gelbart, S. *An Introduction to the Langlands Program*, Birkhäuser, (2003) Boston ISBN 3-7643-3211-5.
- [AM] Adem, A. and Milgram, R., *Cohomology of finite groups.*, Grundlehren math. Wiss. 309, p. 317 (1991).
- [BBD] Beilinson A.A., Bernstein I.N., Deligne P., *Faisceaux pervers.*, Analyse et Topologie sur les espaces singuliers(I), Conférence de Luminy, juillet 1981, Astérisque 100(1982).
- [Berth] Berthelot, P., *Altérations de variétés algébriques d'après A.J. DE JONG*, Séminaire Bourbaki 48, n° 815, pp.273-311(1997).
- [BJ] Borceux, F. and Janelidze, G. *Galois Theories.*, cambridge studies in advanced math. 72 pp.341 ISBN 0 521 80309 8 2001
- [Breen1] Breen, L., *Théorie de Schreier supérieure.*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 25, pp. 465-514(1992).
- [Breen2] Breen, L., *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, 225 Astérisque Société Mathématique p. 160 (1994).
- [Brz] Brzezinski, T., Wisbauer, R., *Corings and Comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, Cambridge University Press, 2003.
- [Cohn] Cohn, P.M., *Skew Fields*, Theory of general division rings, Encyclopedia of mathematics and applications 57.
- [Fuj] Fujita, T., *On Kähler fibre spaces over curves.*, J. Math.Soc. Japan 30, pp. 779-794(1978).
- [Gir] Giraud, J., *Cohomologie non abélienne.*, Grundlehren math. Wiss., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 467,(1971).

- [SGA] Grothendieck, A. et al., *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, SGA1, SGA4 I,II,III, SGA41/2, SGA5, SGA7 I,II, Lecture Notes in Mat., vols. 224,269-270-305,569,589,288-340, Springer-Verlag, New York, 1971-1977.
- [GG] Grothendieck, A., *Fondements de la géométrie algébrique.*, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curis, Paris 5e, p. 236 (1962).
- [Dix] Grothendieck A., Giraud J., Kleiman S., Raynaud M., Tate J., *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, Paris, 1968, pp.386.
- [HS] Hirshowits, A. and Simpson, C., *Descente pour les n -champs.*, arXiv:math. AG/9807049v3
13 Mar 2001
- [I] Iitaka, S., *Introduction to birational geometry.*, Graduate Textbook in Mathematics, Springer-Verlag, p. 357 (1976).
- [Laum] Laumon, G., Moret-Bailly, L., *Champs algébriques.*, Université de Paris-sud Mathématiques, p. 94 (1992).
- [Kato] Kato, K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory., The Johns-Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, pp. 191-224(1989).
- [Kaw] Kawamata, Y., *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fibre spaces.*, J. Reine Angew. Math. 363, pp. 1-46 (1985).
- [1] KKMS Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B., *Troidal embeddings I.*, Springer Lecture Notes, 339(1973).

- [Ko1] Kollár, J., *Shafarevich maps and automorphic forms.*, Princeton university press, Princeton, New Jersey pp.201 1995.
- [Ko2] Kollár, J., *Rational curves on algebraic varieties.*, Springer, Berlin-Heidelberg-Newyork-Tokyo, (1995)
- [Kon] Kontsevich, M., Rosenberg A. *Noncommutative smooth spaces.*, arXiv:math.AG/9812158v1 30Dec 1998.
- [Km1] Maehara, K., *Diophantine problems of algebraic varieties and Hodge theory in International Symposium Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and related Topics in Honor of Professor Shoshichi Kobayashi on his 60th birthday.*, R.I.M.S., Kyoto University October 26-30, Organizer: Junjiro Noguchi(T.I.T.), pp. 167-187 (1992).
- [Km2] Maehara, K., *Algebraic champs and Kummer coverings.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.18, No.1, pp.1-9(1995).
- [Km3] Maehara, K., *Conjectures on birational geometry.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.24, No.1, pp.1-10(2001).
- [Mats] Matsuki, K., *Introduction to the Mori Program.*, Universitext p. 468 Springer 2000
- [Mat] Matsumura, H., *On algebraic groups of birational transformations.*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie VIII,34, 151-155 (1963).
- [MO] Matsumura, H.and Oort, F., *Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes*, Inventiones Mathematicae, 1967 - Springer.
- [MP] Miyaoka, Y., Peternel T., *Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties.*, DMV Seminar Band 26 Birkhäuser p. 213 1997

- [Mch] Mochizuki, S., The local Pro- p Anabelian Geometry of Curves., Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University RIMS-1097(1996).
- [Mum] Mumford D., Selected Papers: On the classification of varieties and moduli spaces., Springer p. 795 2003
- [Nak] Nakayama, N., Invariance of the plurigenera of algebraic varieties under minimal model conjectures., Topology 25(1986) 237-251.
- [Ro] Rosenlicht, M., Some basic theorems on algebraic groups., xxxxx pp.401-443
- [RBZL] Ribes, L., Zalesskii, P., Profinite Groups., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge Vol.40 Springer(1991).
- [Ws] Schmid, W., *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping.*, Inventiones math., 22., pp. 211-319(1973).
- [Se] J-P. Serre. Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics. , **5** 4th Ed. 1973.
- [S1] Simpson, C., *Algebraic (geometric) n -stacks.*, arXiv:math. AG/9609014
- [S2] Simpson, C., *A closed model structure for n -categories, internal Hom, n -stacks and generalized Seifer-Van Kampen.*, arXiv:math: AG/9704006 v2 17 Mar 2000
- [S3] Simpson, C., *Homotopy Theory of Higher Categories, From Segal Categories to n -Categories and Beyond*, Cambridge University Press, ISBN 987-0-521-51695-2, p. 634, (2012)
- [Shatz] Shatz, S., *Profinite groups, arithmetic, and geometry.*, Annals of Math. studies, N. 67, Princeton Uni. Press, p. 252,(1972).

- [Vieh] Viehweg, E. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge.Band 30, p. 320 (1991).
- [Zuo] Zuo, K., Representations of fundamental groups of algebraic varieties., Lecture Notes in Math. 1708, Springer, ISBN 3-540-66312-6.

2次曲線で作られる凹型ルーロー三角形の掛谷問題

津山工業高等専門学校 総合理工学科 3 年
加田 紘大

1. はじめに

よく知られているルーローの三角形は、正三角形の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一辺となる円弧を結んでできたものである（図1）。本研究では、正三角形の各頂点を焦点とする同じ離心率 e の2次曲線を考え（ $e = 0$ は円、 $0 < e < 1$ は楕円、 $e = 1$ は放物線、 $e > 1$ は双曲線）、正三角形の重心 G の周りに表れる2次曲線を結んで得られる三角形のような図形を扱う。そしてそれを、2次曲線で作られるルーロー三角形と呼ぶ。また、もしその図形が凹型の図形であれば凹型ルーロー三角形（図2）、凸型の図形であれば、凸型ルーロー三角形（図3）と呼ぶ。

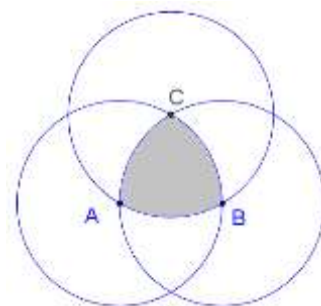


図1 ルーロー三角形

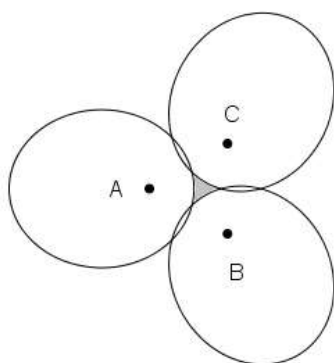


図2 楕円で作られる凹型ルーロー三角形

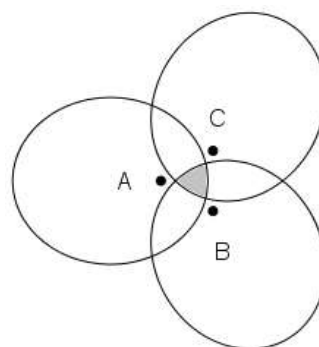


図3 楕円で作られる凸型ルーロー三角形

さて、本研究における中心的テーマは、『2次曲線で作られるルーロー三角形の各離心率 e に関する掛谷問題を研究すること』である。ここで、掛谷問題とは以下の問題のことであり、本研究では、掛谷問題の答えとなる図形を掛谷図形と呼ぶ。

掛谷問題. 長さ1の線分を一回転させることのできる図形（掛谷集合）はどういったものか、また、そのうちで回転する線分の長さを基準にしたときの最小の面積を持つものは何か。

ここで、掛谷集合とは、どんな方向においても長さ1の線分がとれるものである。

本研究では、各離心率 e に対して掛谷問題を考える。その理由は、よく知られた次の命題があるからである。

命題1. C_1 と C_2 は同じ離心率 e の2次曲線とする。このとき、 C_1 と C_2 は相似である。

同じ離心率 e の3つの2次曲線から作られるルーロー三角形を $R[e]$ と書く。掛谷問題は考える図形の面積を求めるとき、その基準を内部で一回転させる直線の長さに行っているのので、一回転させる線分に対する $R[e]$ の面積が最小となるものについて研究していけばよい。具体的な研究方針は以下である。

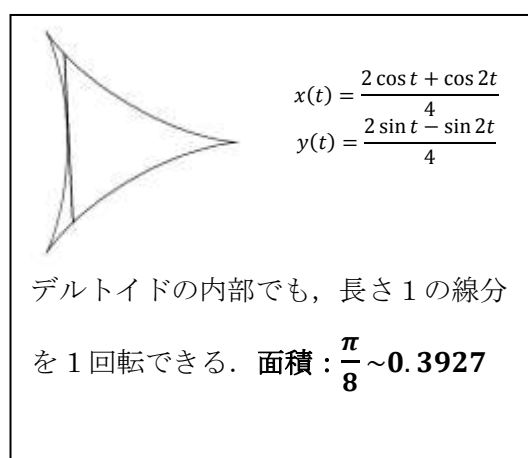
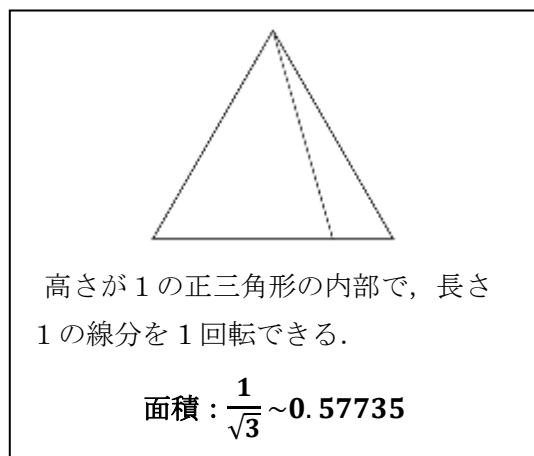
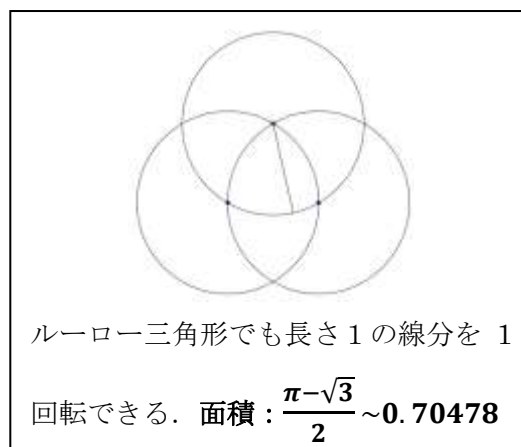
(方針 1) 離心率 e を固定したとき, 2 次曲線で作られるルーロー三角形の掛谷図形はどのような特徴をもつかを調べる.

(方針 2) 離心率 e の掛谷図形の面積 $S(e)$ はどのような関数なのか調べる.

以下, 第 2 節では, 掛谷問題の研究の歴史を簡単に紹介し, 第 3 節で本研究の意義を示す. そして, 第 4 節以降で, 円, 楕円, 放物線で作られる凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形の特徴について論じる. 特に, 第 9 節において, 本研究の主結果 (予想 5) を挙げ, 第 10 節において, e と $R[e]$ の掛谷図形の面積に関するグラフを示す.

2. 掛谷問題の研究の歴史

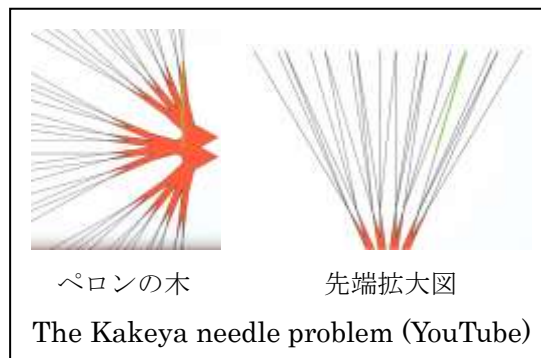
掛谷問題は, 1916 年 11 月に東北帝国大学の掛谷宗一博士によって提示された問題である. まず, その歴史の初期 (1917 年頃) において研究された図形は単連結な凸図形で, 具体的には, 円, ルーロー三角形, 正三角形, そして, 単連結な凹図形であるデルトイドなどであった.



- ・ 1921 年 J. Pal により, 「正三角形が面積最小の凸図形である」ことが証明された.

- ・ 1928 年 A. S. Besicovitch により, 「どんな小さな正の数 ε に対しても, 面積がそれよりも小さい平面図形で, その中で長さ 1 の線分を回転させることができるようなものが存在する」(Besicovitch の定理) ことが証明された. 簡単にいえば, いくらでも小さな面積をもつ図形が存在するということである. 例とし

て, ペロンの木と呼ばれる図形が知られており, それは, 正三角形を細かく切って張り合わせ, 図の外側に直線 (面積は 0) を追加したものである. そして, その直線部を使えば, 長さ 1 の線分をペロンの木の中で一回転させることができる. このことから, 正三角形を限りなく細かく切ってペロンの木を作れば, その面積は限りなく 0 に近づくことが示される.



3. 本研究の意義

掛谷問題の歴史で述べたように, 掛谷問題は, これまでの偉大な数学者達により, 純粋な数学の意味においては, Besicovitch の定理やペロンの木という大きな結果にまで到達した.

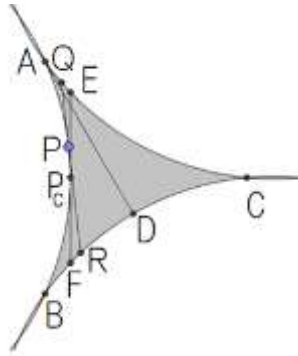
一方, ルーロー三角形は, ロータリーエンジンなどの応用をもち, 機構学的な重要性を持っている. さらに, 図形の中で線分を一回転させるという掛谷問題自体も, やはり機構学的な意味を感じる. このことから, 比較的簡単に得られる 2 次曲線から作られるルーロー三角形という図形において, その掛谷問題を研究することは, 今後何らかの形で重要な応用にも繋がっていくのではないかと考えた.

このような理由から, 本研究では, 掛谷問題を 2 次曲線で作られるルーロー三角形という条件に制限し, 掛谷図形の研究を行った.

4. 凹型ルーロー三角形の接線の特徴 ($0 \leq e \leq 1$ の場合)

以下, 記号 $\{R_\lambda[e]\}$ で, 同じ e の 2 次曲線から作られる凹型ルーロー三角形全体の集合を表すことにする. また, 記号 K_e で, $\{R_\lambda[e]\}$ の中で掛谷問題の答えとなる掛谷図形を表す. そして, 第 9 節の K_e に関する主結果 (予想 5) に向けて, 研究結果を述べていく. まず, この節では, 今回の研究で得られた集合 $\{R_\lambda[e]\}$ ($0 \leq e \leq 1$) における掛谷図形 K_e を考えるために必要な接線の特徴について説明する.

離心率 e の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ を考え, その頂点を A, B, C とする. さらに, 頂点 A から対辺までの距離 AD を h , の弧 AB の中点 P_c での接線と $R[e]$ との交点を E, F とし, 線分 EF の長さを l とする. さらに, 弧 AB 上に任意の点 P をとり, P での接線と $R[e]$ との交点を Q, R とし, 接線 QR の長さを $l(P)$ とする.



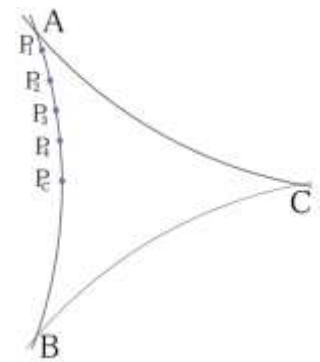
h : 距離AD
 l : EFの長さ
 $l(P)$: 接線QRの長さ
 P_c : 弧ABの中点

以下に列挙する予想は、フリーソフト GeoGebra による数値計算から得られたものである。これらの予想は、凹型ルーロー三角形の基本的な性質を表すものとする。

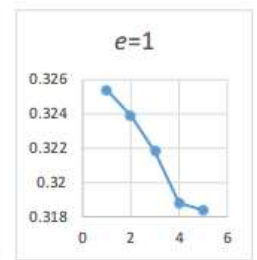
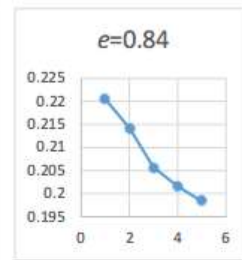
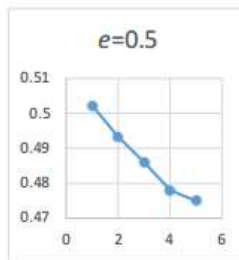
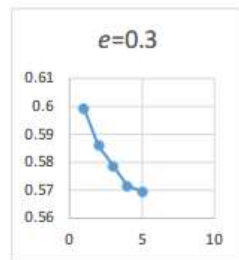
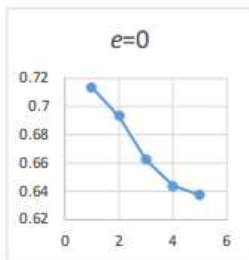
予想 1. 凹型ルーロー三角形 $R[e]$ において $h \geq l(P)$ を仮定する。もし $0 \leq e \leq 1$ ならば、 P が A から P_c まで動くときの接線の長さ $l(P)$ の最小値は l である。

予想 1 の根拠となったデータ例

e	0	0.3	0.5	0.84	1
h	0.7242	0.5994	0.5012	0.2270	0.3232
$l(P_1)$	0.7136	0.5991	0.5022	0.2205	0.3254
$l(P_2)$	0.6931	0.5858	0.4933	0.2142	0.3239
$l(P_3)$	0.6622	0.5787	0.4860	0.2057	0.3218
$l(P_4)$	0.6440	0.5715	0.4780	0.2016	0.3188
$l = l(P_c)$	0.6373	0.5696	0.4749	0.1984	0.3184



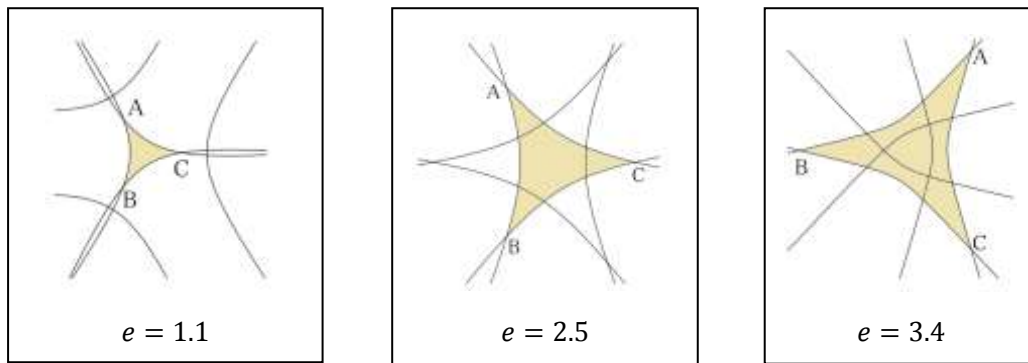
ただし、点 P_j は A から P_c の間の適当な点である。



5. 凹型ルーロー三角形の接線の特徴 ($e > 1$ の場合)

$e > 1$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ ，すなわち，双曲線で作られる凹型ルーロー三角形 $R[e]$ について説明する。特に， $e = \infty$ の場合は，凹型ルーロー三角形 $R[e]$ は正三角形となる。したがって，掛谷三角形 K_e の面積は $1/\sqrt{3}$ であることは分かっている。

下の 3 つの図のそれぞれ黄色の図形 ABC が，双曲線で作られる凹型ルーロー三角形 $R[e]$ である。



上の図から分かるように、 e の値が大きくなると、双曲線の頂点の間の距離が近づいていき、 $e = 2.5$ においては、2つの凹型ルーロー三角形が表れる。そして、 $e = 3.4$ 付近の場合から、凹型ルーロー三角形の内側に凸型ルーロー三角形が見られるようになり、以後も、そのような状態となる。また、もう一つ重要なこととして、『 $e > 1$ の凹型ルーロー三角形では、その2つの辺が頂点で接することとは決していない』のである。以上のことを注意しながら、数値計算を行った結果、次の予想を得ることができた。

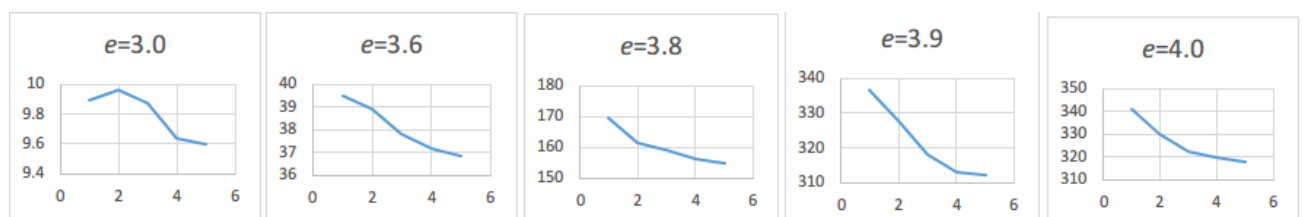
予想2. $e > 1$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ において、 P が A から P_c まで動くときの接線の長さ $l(P)$ の最小値は l である。特に、ある e_0 が範囲 $3.8 < e_0 < 3.9$ に存在して、 $e > e_0$ ならば、つねに $h < l(P)$ となる。

(注意) 「 $e > e_0$ ならば、つねに $h < l(P)$ 」となる e_0 が存在する理由は、 e が大きくなると、凹型ルーロー三角形は次第に正三角形に近づくからである。

予想2の根拠となったデータ例

e	3.0	3.6	3.8	3.9	4.0
h	9.6047	36.8565	154.857	310.07	312.98
$l(P_1)$	9.8907	39.5366	169.784	336.81	341.21
$l(P_2)$	9.9662	38.8966	161.714	327.78	330.13
$l(P_3)$	9.8805	37.8337	159.174	317.91	322.56
$l(P_4)$	9.6352	37.1725	156.167	313.14	319.66
$l = l(P_c)$	9.5984	36.8563	154.856	312.18	317.99

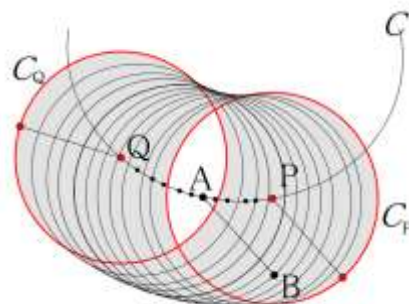
ただし、点 P_j は A から P_c の間の適当な点である（予想1の図参照）。 $e = 3.0, 3.6, 3.8$ の場合は $h > l$ のデータを挙げた。 $e \geq 3.9$ の場合はつねに $h < l(P)$ と予想されるので、そのデータを挙げた。



6. 掛谷図形にならない凹型ルーロー三角形の特徴

次に、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形を考える上で、逆に、どのような場合に、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ は掛谷図形にはなり得ないかを研究した。

命題 2. 2 次曲線 C 上に点 P, Q をとり、長さ 1 の線分 AB を考える. このとき、線分 AB の端点 A を P から Q まで C 上で移動させるとき、線分 AB の端点 B の動く範囲は、 P, Q の間の C 上の任意の点を中心とした半径 1 の円周の和領域である。

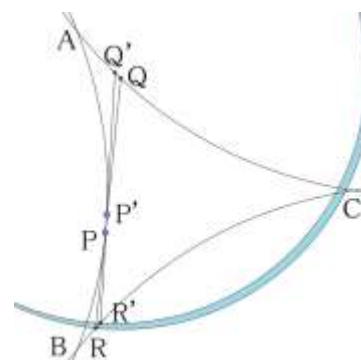


(証明) 端点 B の動く範囲は、 A を中心とした円周上であることからいえる。Q. E. D.

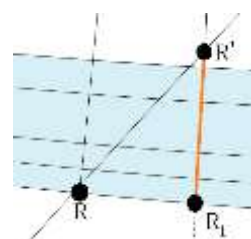
命題 3. 凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の境界上の点 P における接線を QR 、点 P に限りなく近い点を P' とし、 P' での接線を $Q'R'$ とする. このとき、 $l(P) > l(P')$ ならば、 $R[e]$ の中だけで線分 QR を移動させて、端点 Q を Q' の位置にすることはできない。

(証明) 点 R の移動範囲を考えると、命題 3 は、線分 QR の端点 Q を $R[e]$ の境界線上を滑らせる場合で示せば十分である。

右図で説明する。まず、線分 QR のコピーを Q_0R_0 とし Q_0R_0 を移動させるものとする。線分 Q_0R_0 の端点 R_0 の移動範囲は、命題 2 より、 $R[e]$ の境界上で Q と Q' の間の任意の点を中心とした半径 $l(P)$ の円周の和領域 D (青い領域) である。さて、 Q_0 が Q' の位置にあり線分 Q_0R_0 も $R[e]$ の内側にあったとする。このとき、 R_0 が R' の左側にあると線分 Q_0R_0 が弧 AB と交わるために、 R_0 は R' より右側の位置にあることがわかる。したがって、線分 Q_0R_0 をこの位置から $R[e]$ の内側だけを通して元の位置 QR に戻すことはできないことを示せばよい。



そのために、 Q_0 と Q' が一致した直線 Q_0R_0 を、一旦、直線 $Q'R'$ に重ね、線分 Q_0R_0 を R_0 の方向へ延長して D の外側の境界と交わった点を R_1 とする。このとき、明らかに線分 $R'R_1$ は $R[e]$ の外にある。さらに、 $R'R_1$ は D を横切る。なぜならば、 $R[e]$ は凹型であり、 P と P' は限りなく近いので、 $QQ'RR'$ は $QR' < Q'R$ という四角形と考えてよく、 $l(P) > l(P')$ より QQ' の点と RR' の点の2点を結んだ直線の長さの最大値は $l(P) = QR$ であって、これより、直線 $Q'R'$ 上には D の点は存在しないからである。



さて、 Q_0 が Q' の位置にあり、直線 Q_0R_0 も $R[e]$ の内側にあるとき、 R_0 は R' より右側にあるので、 R_0 を元の位置 R に戻すには、 R_0 を左方向へ移動させなければならない。しかし、 R_0 はその途中で、

D を横切る線分 $R'R_1$ 上を必ず通過しなくてはならない．これは、 R_0 が $R[e]$ の外 of 点を通すること
を意味する．したがって、端点 Q_0 を $R[e]$ の境界線上を滑らせながら、かつ $R[e]$ の中だけで線分 Q_0R_0
を移動させて、端点 Q_0 を Q' の位置にすることはできない．よって、命題は示された． Q. E. D.

命題3をくり返し使うことで、次の系が得られる．

系1. 凹型ルーロー三角形 $R[e]$ においては、 $l(P)$ および h の中の最小の長さの線分でしか一回転させることはできない．

7. $h < l(P)$ を満たす $0 \leq e \leq 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の面積

さて、 $0 \leq e \leq 1$ でかつ $h < l(P)$ の場合を考える．この場合、長さ h の線分
を $R[e]$ 内で一回転できることは明らかである．しかし、命題3より、長さ
 $l(P)$ の線分を $R[e]$ 内で一回転させることはできない．したがって、掛谷問
題においては、長さ h の線分を基準にした面積を考えればよい．

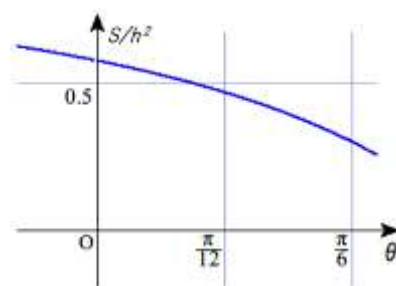
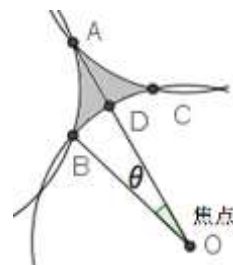
そこで、 $R[e]$ を ABC とし、 BC の中点を D 、さらに2次曲線の焦
点 O に対し、**角 BOD を θ** とし、さらに θ_m を θ の最大角とする．(注
意！ $\theta = \theta_m$ のときは $h = l(A)$ のときである．)

$e = 0$ のときを考える．ルーロー三角形を作る円の半径を1と
すると、

$$h = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta - 1,$$

$$S = \sqrt{3} \sin^2 \theta + 3 \cos \theta \sin \theta - 3\theta$$

となる．したがって、長さ h の線分を基準にした面積 S/h^2 のグラフは下図となる．この場合、 $\theta_m = \pi/6$ である． $e \neq 0$ のとき、 h と S の式は複雑過ぎて、 S/h^2 のグラフを厳密に扱うことはできなかった．
しかし、数値計算の結果から、 S/h^2 は θ に関して単調減少であるという次の予想が得られた．



予想3. $0 \leq e \leq 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の面積を S とすると、 S/h^2 は $0 < \theta < \theta_m$ で単調減少関数である．

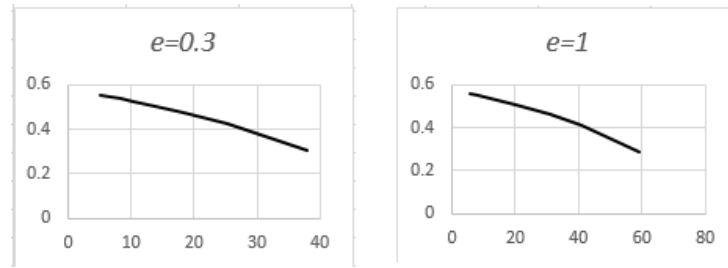
予想3の根拠となったデータ例（面積の計算はwebサイト Ke!san を用いた[Ke!].）

$e = 0.3$ の場合

θ	5.1416	8.2392	10.2583	13.8421	18.2381	25.2215	38.0356
S/h^2	0.5531	0.5373	0.5263	0.5057	0.4780	0.4273	0.3058

$e = 1$ の場合

θ	5.8676	8.1406	10.2256	20.1826	30.9633	40.9194	58.9218
S/h^2	0.5573	0.5510	0.5455	0.5100	0.4637	0.4127	0.2864



8. $e > 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の面積

$e > 1$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ については、第5節で述べたとおり、 $R[e]$ の2つの辺が頂点で接することは決してないため、 $\theta_m = \infty$ となる。したがって、 $R[e]$ の面積 S/h^2 の最小値は $0 \leq e \leq 1$ の場合とは異なる。数値計算の結果から、以下の予想が立てられた。

予想4. $e > 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ においては、ある θ_0 が存在し、 $0 < \theta \leq \theta_0$ のとき、 S/h^2 は単調減少し、 $\theta > \theta_0$ のとき、 S/h^2 は $0 < \theta < \theta_m$ で単調増加する。

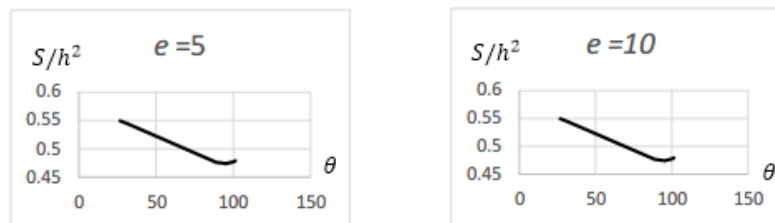
予想4の根拠となったデータ例

$e = 5$ の場合（つねに $h < l(P)$ ）

θ	26.6798	31.5327	51.4233	88.8073	95.4090	100.212	101.309
h	3.3358	4.0195	7.5263	34.0951	70.0000	318.815	1843.23
S/h^2	0.5498	0.5444	0.5209	0.4765	0.4744	0.4772	0.4791

$e = 10$ の場合（つねに $h < l(P)$ ）

θ	20.9173	32.5903	55.1717	75.2356	88.1673	90.0008	93.2543
h	5.8627	9.6487	20.3983	44.8379	123.255	162.496	374.000
S/h^2	0.566	0.5595	0.5465	0.5363	0.5337	0.5340	0.5353



9. $0 \leq e \leq e_0$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形 K_e の特徴

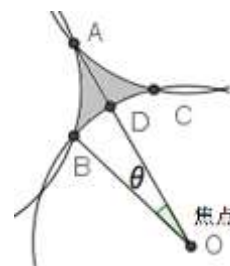
$0 \leq e < e_0$ とする。 θ を大きくすると、 $h = AD$ が大きくなるため、ある θ のとき以降は $h \geq l(P)$ と

いう状況になる。したがって、系1より、掛谷図形を考えるためには、長さ $l(P)$ の線分を $R[e]$ 内で一回転させることを考え、 $S/l(P)^2$ が最小となるような $l(P)$ は何かということを考えればよい。

(1) $0 \leq e \leq 1$ 場合、予想1、予想2と予想3がどれも正しいなら、 $l(P) = l(P_C) = h$ が最小と考えられる。

(2) $1 < e \leq e_0 < 0.39$ の場合、予想1、予想2と予想4がどれも正しいなら、 $l(P) = l(P_C) = h$ が最小と考えられる。

以上のことから、 $0 \leq e < e_0$ に関しては $R[e]$ の掛谷図形 K_e の特徴を捉えることができた。



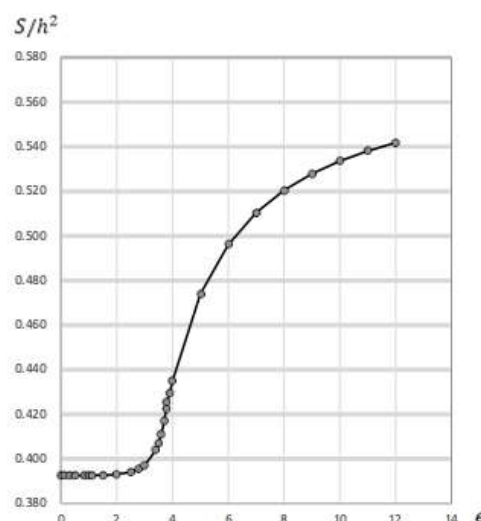
主結果（予想5） $0 \leq e \leq e_0$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形 K_e は、 $h = l(P_C)$ を満たすものである。

10. 掛谷図形 K_e の e と面積 S/h^2 の関係

主結果（予想5）を元に、掛谷図形の e と S/h^2 の関係式は何かについて研究しようと思った。以下は、そのデータとグラフである。 $0 \leq e \leq 3.8 < e_0$ については、 $h = l(P_C)$ のときの S/h^2 のデータであり、 $e \geq 3.9 > e_0$ については、予想4より、 S/h^2 には最小値が存在すると考えられるので、それに予想近似値を列挙した。 h の値の連続性が e_0 を境に変化しているようにとれる。また、 $e = \infty$ の場合は、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ は正三角形であり、その掛谷図形 K_e の面積は $1/\sqrt{3}$ であることは分かっている。すなわち、 e が大きくなるにつれ、高さが1の正三角形の面積で $S = 1/\sqrt{3} \sim 0.57735$ に近づく。

e	S/h^2	h
0	0.3925	0.5928
0.1	0.3925	0.5872
0.3	0.3925	0.5418
0.5	0.3925	0.4500
0.8	0.3925	0.1807
1	0.3925	0.3115
1.1	0.3925	0.1323
1.5	0.3926	0.8357
2	0.3930	2.1257
2.5	0.3941	4.6462
2.8	0.3955	7.0830
3	0.3971	9.5513
3.4	0.4039	20.2123
3.5	0.4070	26.3044

e	S/h^2	h
3.6	0.4112	36.8488
3.7	0.4169	59.9657
3.77	0.4224	105.1393
3.8	0.4253	154.7409
3.9	0.4295	62.1497
4	0.4351	65.2343
5	0.4740	69.3959
6	0.4961	75.7719
7	0.5105	83.6316
8	0.5205	95.4220
9	0.5279	100.3259
10	0.5337	123.2668
11	0.5381	135.1291
12	0.5419	147.0194

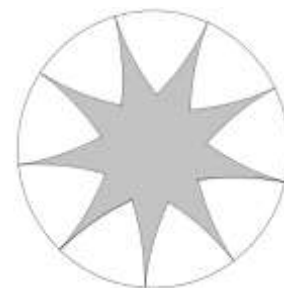


今回、 e と S/h^2 の関係を示すグラフからその関係式を見つけ出すことはできなかったが、以下の予想を立てている。

予想 6. e と S/h^2 の関係を示すグラフの変曲点は e_0 ($3.8 < e_0 < 3.9$) である。

1 1. 今後の研究方針

今後の研究として、掛谷 n 角形の研究が考えられる。これについては、M. Bloom and I. J. Schoenberg の研究結果を参考にしたいと考えている。それは、 n 個の尖点をもつ星型の図形は $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi}{24}(5 - 2\sqrt{2}) < \frac{\pi}{11}$ に近づくことを示した研究である。例として、図形全体が内接している円に直交する星型の図形が上げられた(1965 年)。



「円に直交している
9 個の尖点をもつ星型の図形」

今回、掛谷三角形 K_e について、多くの数値計算を行った。そしてそれらのデータから、6つの重要な結果(予想)を得ることができた。これらの証明を2次曲線の定義式を用いて試みてみたが、方程式があまりにも複雑になりすぎたため断念した。別のアイデアを考えているところである。また、 e と S/h^2 の関係のグラフがどのような関数で表されるかについても研究したいと考えている。これに平行して、 $e \geq 3.9 > e_0$ に関する掛谷図形の特徴を研究する予定である。

一方、今回は凸型ルーロー三角形については扱わなかったが、同じような結果が得られる可能性が高いため、それらについてもきちんと研究し、凹型ルーロー三角形との関連性もみていく予定である。その研究のために、「凹型ルーロー三角形の掛谷図形と凸型ルーロー三角形の掛谷図形は、ある種の反転という関係を持つだろう」という作業仮説を立てている。

参考文献

[AR1] 新井仁之, ルベーク積分と面積0の不思議な図形たち, 日本数学会 数学通信 第7巻第3号, 2002 年

[AR2] 新井仁之, 掛谷問題ショートコース, WEB 版 現代数学入門講座 Vol. 1 (2009 年 8 月 14 日), <http://www.araiweb.matrix.jp/semi208/KakeyaProblem.html>

[DD] David L. Duncan, Constructions Regarding Integration in the Plane and the Rotation of Segments, University of Washington, Department of Mathematics, 2006.

<https://sites.math.washington.edu/~morrow/papers/duncan-thesis.pdf>

[Ke!] Ke!san 生活や実務に役立つ計算サイト, <https://keisan.casio.jp/exec/system/1343633437>

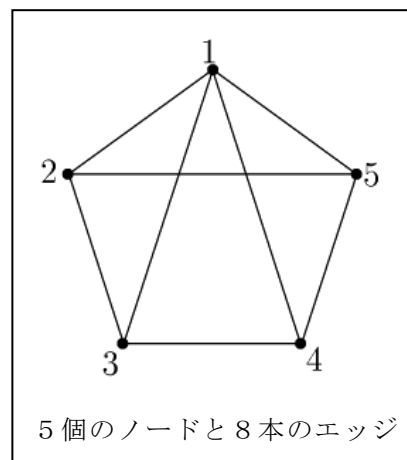
群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込みの研究

津山工業高等専門学校 総合理工学科 3 年
圓山 夏生

1. はじめに

津山高専の数学クラブでは、毎年、オープンキャンパスや秋の文化祭等で、ゾムツールという組立玩具を使って、3次元空間の正多面体や4次元空間の正多胞体の投影模型を製作し、展示している。ウィキペディアでは、「ゾムはノードと呼ばれる直径約 18mm のABS 樹脂製のボールに、数種類のサイズ・形状をもったストラット（ABS 樹脂製の棒）を突き刺して立体物（いわゆるワイヤー・フレーム）を構築する」と説明されている。

ある時、私は、ゾムツールで作った物体を、幾何学図形であるグラフのように感じた。グラフとは、「ノード（頂点）とエッジ（辺）の集合で構成されたもの」である。



グラフ理論についていろいろと調べてみるうちに、

「与えられたグラフを閉曲面に埋め込むとき、その最小種数 g を求めよ」

という問題に興味を持った ([1]参照)。なぜならば、ゾムツールで作った3次元空間の正多面体や4次元空間の正多胞体が、グラフをそのような曲面や胞体に埋め込んでいるように思えたからである。また、現実問題として電子回路への応用もあることも知った ([1]参照)。

上に述べた問題にある閉曲面とは、球や一人乗りの浮き輪や二人乗りの浮き輪、一般に n 人乗りの浮き輪というものを指し、その浮き輪にある穴の数を、種数 (genus) と呼び、 g という記号で表す。そして、閉曲面は g で分類できるという定理が知られている。



$g = 0$



$g = 1$

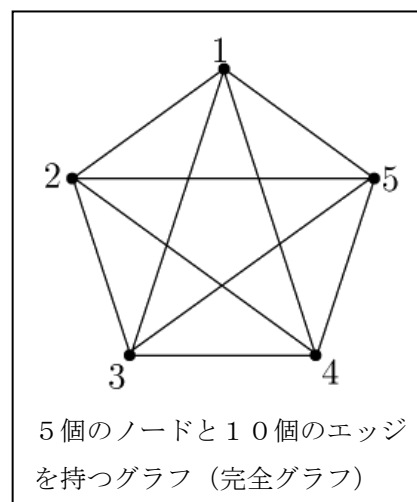


$g = 2$

グラフの中には、完全グラフと呼ばれる特別なものがある。それは、「任意の2個のノードの間に必ずエッジがあるグラフ」を指す。そして、 n 個のノードを持つ完全グラフを K_n で表す。このとき、総エッジ数は、 $n(n-1)/2$ である。さらに、『完全グラフ K_n は、

$$g = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

である閉曲面に埋め込まれる』ということが知られている ([2]参照)。ここで、記号 $\lceil x \rceil$ は、 x の切り上げを表す。しかし、完全グラフでないグラフについては埋め込み公式はわかっていない。私は、完全グラフ K_n の部分グラフで対称性をもったものに



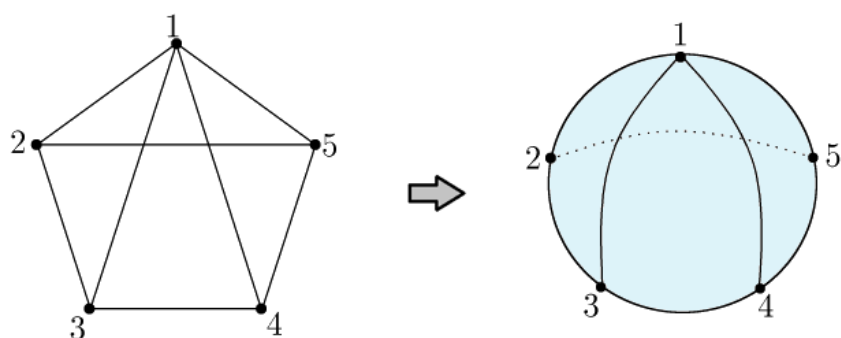
については、規則正しく埋め込むことができる曲面が存在するのではないかと考えた。つまり、どのような対称性を持つグラフがどのような曲面に埋め込まれるかという視点から、グラフに関する研究を行うことにし、その結果、第6節の定理1と第7節の定理2を証明することができた。

2. グラフの閉曲面への埋め込み問題

ここでは、私が行った研究の切掛けとなった「グラフの閉曲面への埋め込み問題」について説明する。まず、その問題を正確に述べる。

問題：グラフをある閉曲面上に、どの2つのエッジも交わらないように描くとき、その閉曲面の最低種数 g を求めよ。

例えば、5個のノードで8本のエッジをもつ下のグラフは $g = 0$ の閉曲面（球）に埋め込まれる。

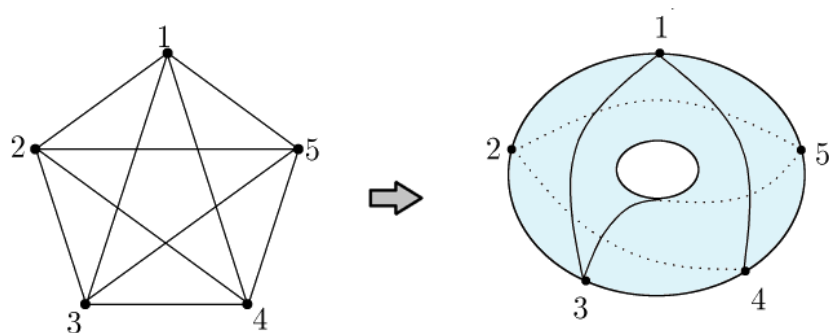


その埋め込み方を説明する。まず、球面を用意し、その表面上に5個の点を打つ。次に、エッジ1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1を輪郭部に描く。さらに、エッジ1-3, 1-4を正面に描く。そしてエッジ3-5を背面に描くことで（図では点線で表している）、このグラフは $g = 0$ の閉曲面（球）に、どのエッジも交わらないように描くことができる。

完全グラフ K_5 については、最低種数を求める公式より、 $n = 5$ であるので、

$$g = \left\lceil \frac{(5-3)(5-4)}{12} \right\rceil = 1$$

の閉曲面に埋め込まれる。すなわち、 K_5 は $g = 1$ の閉曲面（一人乗りの浮き輪）に、どのエッジも交わらないように描くことができる。

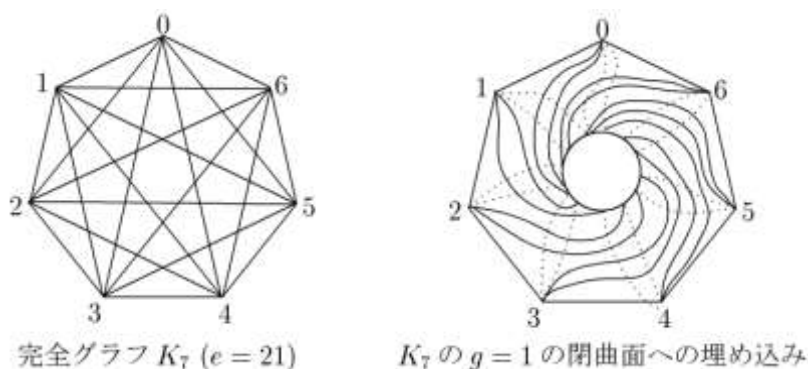


その埋め込み方を説明する．まず， $g = 1$ の閉曲面（一人乗りの浮き輪）を用意し，その表面上に5個の点を打つ．次に，エッジ $1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1$ を一番外側の輪郭部に描く．さらにエッジ $1-3, 1-4$ を正面に描く．そしてエッジ $2-4, 2-5$ を背面に描く（点線）．最後に，エッジ $3-5$ を描くのであるが，それは3から中心の穴まで正面に描き，その後は背面に5まで描く（点線）．そうすることで， $g = 1$ の閉曲面（一人乗りの浮き輪）に，どのエッジも交わらないように描くことができる．

3. 完全グラフ K_7 と K_9 の閉曲面への埋め込み

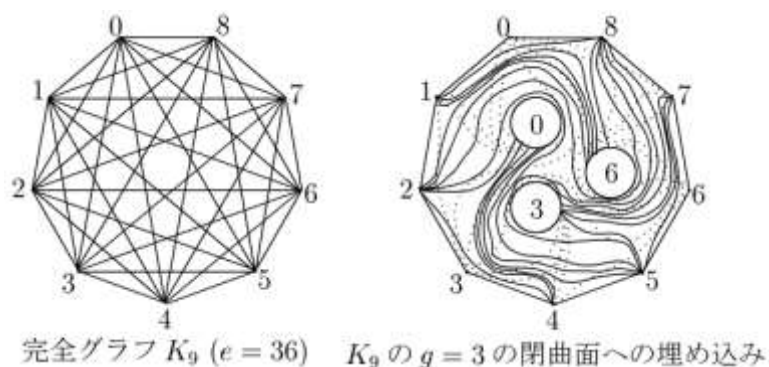
今回の研究で，私が興味をもった完全グラフ K_n の埋め込みを紹介する．一般に，完全グラフ K_n は $g = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil$ の閉曲面に埋め込まれることが分かっているが，その埋め込み方はただ一通りに決まっているわけではなく，いろいろな埋め込み方が存在する．しかし，私は対称的な埋め込み方に興味を持ち，それが，今回の研究に繋がった．

完全グラフ K_7 の埋め込みについて説明する．これは最低種数公式から $g = 1$ の閉曲面に埋め込まれる．私が注目した埋め込みは，以下の図である．



完全グラフ K_7 は，それ自身で対称性を持っている．それは， $1/7$ 回転対称と，7つの鏡映である．そして上に描いた $g = 1$ の閉曲面への埋め込みは，穴に巻きつく形で $1/7$ 回転対称性を持っている．

完全グラフ K_9 の埋め込みについて説明する．これは最低種数公式から $g = 3$ の閉曲面に埋め込まれる．やはり，私が注目した埋め込みは，以下の図である．



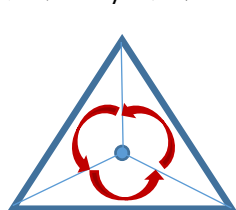
完全グラフ K_9 の対称性は、 $1/9$ 回転対称と、9つの鏡映である。そして上に描いた $g = 3$ の閉曲面への埋め込みも、穴に巻きつく形で $1/9$ 回転対称性を持っている。

私は、完全グラフでないものは、最低種数 g を求める公式がないのだが、しかし、ある特定の条件の下では、公式が作れるのではないかと考えた。すなわち、穴に巻きつくようにエッジを埋め込むという完全グラフの埋め込みをヒントにして対称的なグラフを考えれば、何らかの結果が得られるのではないかと考えた。

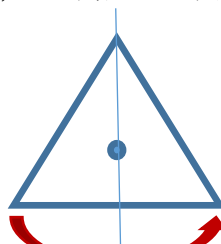
4. 群の作用とグラフのタイプ

完全グラフ K_n は、 $1/n$ 回転対称と、 n 個の鏡映軸をもつ。このことは現代の数学では、二面体群や巡回群という概念を用いて表現される。

二面体群 D_n ：例えば、正三角形は、 $1/3$ 回転対称性、頂点と重心を通る直線に関する対称性（鏡映）をもつ。作用とは、 $1/3$ 回転や鏡映のことを指し、作用全体を正三角形の二面体群 D_3 という。一般に、正 n 角形に作用する $1/n$ 回転や鏡映の作用全体を、正 n 角形の二面体群 D_n という。



$\frac{1}{3}$ 回転

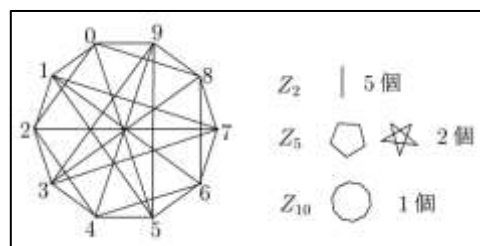


鏡映

巡回群 Z_n ：二面体群 D_n の中の鏡映を除いた $1/n$ 回転だけの作用全体のことを指す。

さて、グラフが与えられたとき、そのグラフが、 D_n 不変であるとは、 $1/n$ 回転や n 個の鏡映の作用で変化しないグラフを指す。同様に、 Z_n 不変であるとは、そのグラフが $1/n$ 回転の作用で変化しないグラフを指す。

右に示すグラフは、10個のノードと25本のエッジを持つグラフで、 D_{10} 不変なものである。対称性を示す要素を取り出すと、 Z_{10} 不変である正10角形が1個、 Z_5 不変である正5角形が1個（0-2-4-6-8-9）、 Z_5 不変である星型正5角形が1個（1-5-9-3-7）、残りは、 Z_2 不変である直線が5個（0-3, 1-6, 2-7, 3-8, 4-9）となっている。このグラフを本研究では、



$$G_{10}[5Z_2 \oplus 2Z_5 \oplus Z_{10}; 25] \quad (D_5 \text{不変})$$

と表すことにし、グラフ G_{10} のタイプと呼ぶことにした．一般に、 p を素数、 q をある正の整数としたとき、

$$G_{qp}[i_2Z_2 \oplus i_pZ_p \oplus i_{qp}Z_{qp}; e] \quad (D_p \text{不変})$$

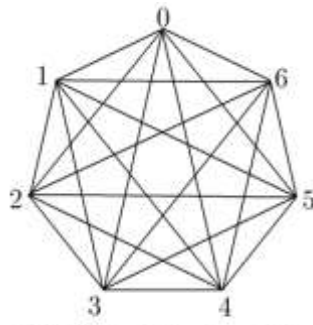
と書いたら、これは、 qp 個ノードと e 個のエッジをもつグラフで、その要素は、 Z_2 不変な直線が i_2 個、 Z_p 不変な正 p 角形が i_p 個、 Z_{qp} 不変な正 qp 角形が i_{qp} 個で構成されていることを表す．そして、これをグラフ G_{qp} のタイプと呼ぶ．

5. 完全グラフの閉曲面への Z_n 不変な埋め込み

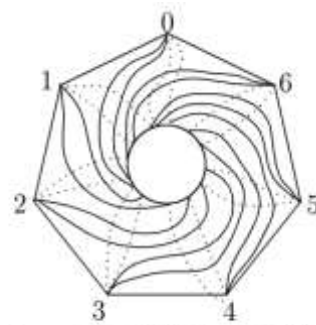
完全グラフ K_7 のタイプは、

$$G_7[3Z_7; 21] \quad (D_7 \text{不変})$$

とできる．そして、「これは $g = 1$ の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込むことができる」といえる．



完全グラフ K_7 ($e = 21$)

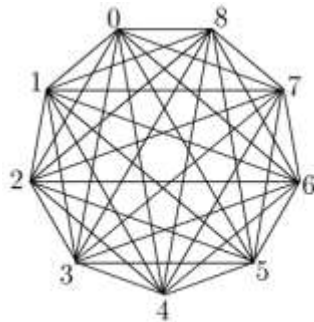


K_7 の $g = 1$ の閉曲面への埋め込み

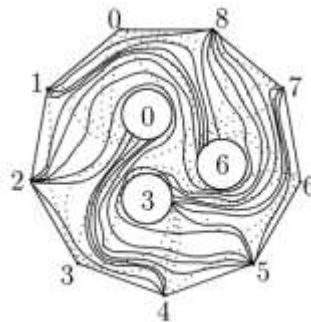
完全グラフ K_9 のタイプは、

$$G_9[4Z_9; 36] \quad (D_9 \text{不変})$$

とでき、「これは $g = 3$ の閉曲面へ Z_9 不変に埋め込むことができる」といえる．



完全グラフ K_9 ($e = 36$)



K_9 の $g = 3$ の閉曲面への埋め込み

一般に、完全グラフ K_n のタイプは、 $G_n\left[\frac{n-1}{2}Z_n; \frac{n(n-1)}{2}\right] \quad (D_n \text{不変})$ とできる．そして、次の予想を立てている．

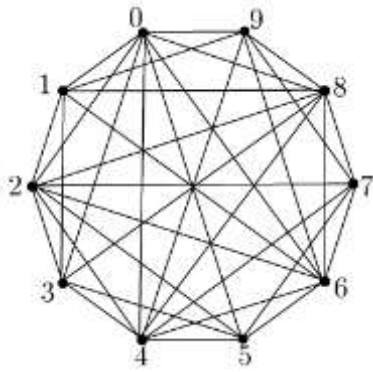
予想 1. 完全グラフ K_n は, n が g の約数であるとき, 種数 g の閉曲面へ Z_n 不変に埋め込むことができる.

6. Z_p 不変な G_{2p} の $g = p$ の閉曲面への埋め込み

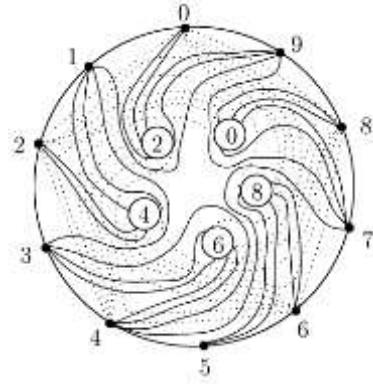
完全グラフではない場合は, 巡回群 Z_p 不変なグラフについて研究を行った.

まず, グラフ $G_{2 \times 5}$ のタイプが $G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変) であるものと, グラフ $G_{2 \times 7}$ のタイプが $G_{14}[14Z_2 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 56]$ (Z_7 不変) であるものについて, これらをそれぞれどのような閉曲面に埋め込むことができるかを研究した. 具体的には, 一般に Z_{2p} は明らかに巡回群 Z_p という部分群を持つことから, 種数 $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込みの可能性について研究した.

以下では, タイプが $G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変) であるグラフ $G_{2 \times 5}$ の種数 $g = 5$ の閉曲面への Z_5 不変な埋め込みについて説明する.



$G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変)



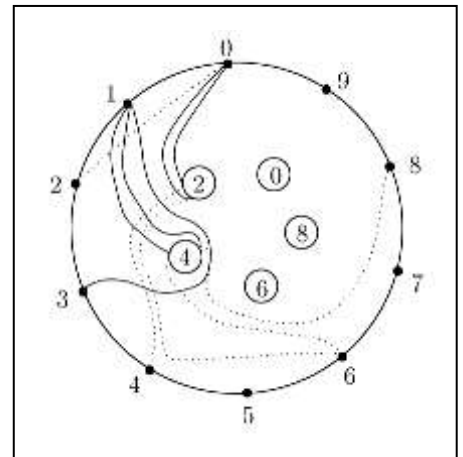
$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

G_{10} を構成する部分グラフは, Z_{10} ($0-1-2-\dots-9$), Z_5 ($0-2-4-6-8$), Z_5 ($0-4-8-2-6$), Z_5 ($0-6-2-8-4$), Z_5 ($1-3-5-7-9$) と 5 本のエッジ Z_2 ($1-6, 3-8, 5-0, 7-2, 9-4$) と 5 本のエッジ Z_2 ($1-8, 3-0, 5-2, 7-4, 9-6$) である.

[1] 外側に 0 から 9 までの番号を反時計回りに順序よく振った円を準備し, 偶数番号の点付近に穴を作り, $g = 5$ の閉曲面と考える. そしてこれで, まず G_{10} の部分グラフである Z_{10} ($0-1-2-\dots-9$) が埋め込まれたことになる.

[2] エッジ $0-2$ を点線で最短に結ぶ. ここで, 点線は閉曲面の背面に埋め込まれることを意味する. そして閉曲面を $1/5$ 回転して埋め込まれたエッジ $0-2$ を閉曲面上にコピーし, これを 5 回繰り返すことで, G_{10} の部分グラフである Z_5 ($0-2-4-6-8$) が埋め込まれる.

[3] エッジ $0-4$ の埋め込みを, ノード 0 と 4 の間にある穴 ② を経



由して、0から穴②まで実線で、穴②から4まで点線で円の中心側ではない領域で結ぶ。そして閉曲面を $2/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである2つ目の Z_5 (0-4-8-2-6) が埋め込まれる。

[4] エッジ0-6の埋め込みを、ノード0と6の間にある穴②を経由して、0から穴②まで実線で、穴②から6まで点線で円の中心側ではない領域で結ぶ。そして閉曲面を $1/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである3つ目の Z_5 (0-6-2-8-4) が埋め込まれる。

[5] エッジ1-3を穴②と穴④の間と穴④と穴⑥の間を通しながら実線で結ぶ。そして閉曲面を $1/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである4つ目の Z_5 (1-3-5-7-9) が埋め込まれる。

[6] エッジ1-6の埋め込みを、ノード1と6の間にある穴②を経由して、1から穴②まで実線で、穴②から6まで点線で円の中心側ではない領域で結ぶ。そして閉曲面を $2/5$ 回転してコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである5本エッジ Z_2 (1-6, 3-8, 5-0, 7-2, 9-4) が埋め込まれる。

[7] 最後に、エッジ1-8の埋め込みは、奇数1と穴④を実線で結び、穴④の周りを中心側に回って、穴④と穴⑥の間の背面を抜けてノード8を結ぶことができる。そして閉曲面を $2/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の対称軸である5つの Z_2 (1-8, 3-0, 5-2, 7-4, 9-6) が埋め込まれる。

以上により、 $G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変) が、 $g = 5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込まれる。

$G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ の $g = 5$ の閉曲面への埋め込み方を一般化することで、次の定理を証明できる。以下にその詳細を述べる。

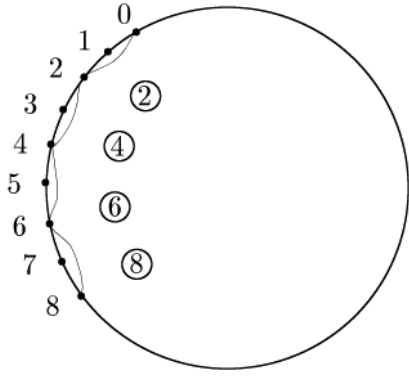
定理 1. p を5以上の素数とする。このとき、 Z_p 不変なグラフ $G_{2p}[2pZ_2 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ は、 $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる。

ここで、 G_{2p} を構成する部分グラフは、 $Z_{2p}(0-1-\dots-(2p-1))$, $Z_p(0-2-\dots-(2p-2))$, $Z_p(0-4-\dots-(2p-4))$, $Z_p(1-6-\dots-(2p-6))$, $Z_p(1-3-\dots-(2p-1))$, p 本のエッジ $Z_2(1-6, 3-8, \dots, (2p-1)-4)$ と、 p 本エッジ $Z_2(1-8, 3-10, \dots, (2p-5)-2)$ である。

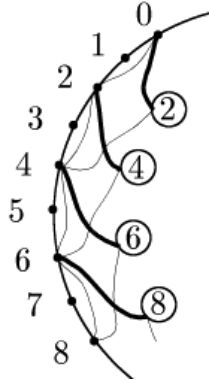
(証明) [Step 1] 外側に0から $2p-1$ までの番号を反時計回りに順序よく振った円を準備し、偶数番号の点付近に穴を作り、 $g = p$ の閉曲面と考える。そしてこれで、まず、 G_{2p} の部分グラフである $Z_p(0-1-\dots-(2p-1))$ が埋め込まれたことになる。

[Step 2] 隣り合う偶数番号を点線で最短に結び、 G_{2p} の部分グラフである $Z_p(0-2-\dots-(2p-2))$ が埋め込まれる。

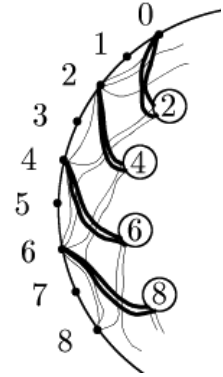
[Step 3] 2つの偶数番号の点 a と点 $a+4$ 同士のエッジについては、点 a と点 $a+4$ の間にある穴 $(a+2)$ を経由して、点 a と穴 $(a+2)$ を実線で、穴 $(a+2)$ と点 $a+2$ を点線で、円の中心側ではない領域で結び、 G_{2p} の部分グラフである2つ目の $Z_p(0-4-8-\dots-(2p-4))$ が埋め込まれる。



[Step 1, 2]



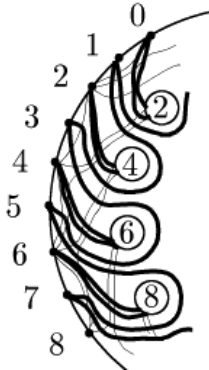
[Step 3]



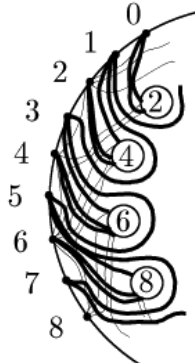
[Step 4]

[Step 4] 点 a と点 $a+6$ 同士のエッジについても同様にして、点 a と穴(a)を実線で、穴(a)と点 $a+6$ を点線で、円の中心側ではない領域で結び、 G_{2p} の部分グラフである3つ目の Z_p ($0-6-12-\dots-(2p-6)$) が埋め込まれる。

[Step 5] 隣り合う奇数番号の点 $a+1$ と点 $a+3$ 同士を、穴($a+2$)と穴($a+4$)との間から穴($a+4$)と穴($a+6$)を通過させ、穴($a+4$)の周りを回るようにして実線で結ぶことができ、 G_{2p} の部分グラフである4つ目の Z_p ($1-3-5-\dots-(2p-1)$) が埋め込まれる。



[Step 5]



[Step 6]



[Step 7]

[Step 6] 奇数番号の点 $a+1$ と点 $a+6$ を、点 $a+1$ と穴($a+4$)を実線で、穴($a+4$)と点 $a+6$ を点線で円の中心側ではない領域で結ぶことができ、 G_{2p} の部分グラフである p 本エッジ Z_2 ($1-6, 3-8, \dots, (2p-1)-4$) が埋め込まれる。

[Step 7] 最後に、奇数番号の点 $a+1$ と点 $a+8$ を、点 $a+1$ と穴($a+4$)を実線で、穴($a+4$)と点 $a+8$ を点線で穴($a+4$)の中心側に回り込んで結ぶことができ、 p 本のエッジ Z_2 ($1-8, 3-10, \dots, (2p-5)-2$) を埋め込むことができる。

以上により、 $G_{2p}[2pZ_2 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ (Z_p 不変) が、 $g=p$ の閉曲面 $\rightarrow Z_p$ 不変に埋め込まれる。

Q. E. D

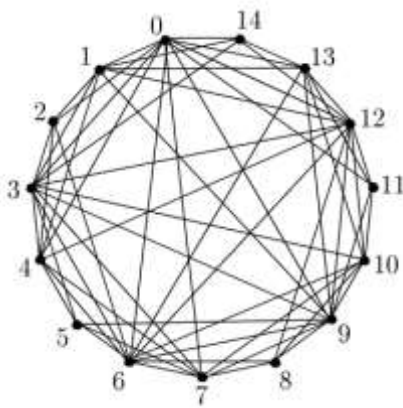
定理1に関連して、以下の予想を立てている。

予想 2. G_{2p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の Z_p 不変な部分グラフとする ($p \geq 5$). このとき, G_{2p} の総エッジ数 e の最大値は $8p$ である.

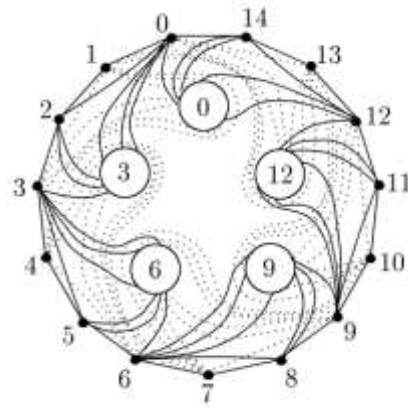
7. Z_p 不変な G_{3p} の $g = p$ の閉曲面への埋め込み

Z_p 不変なグラフ G_{2p} の研究の研究に引き続き, 完全グラフではない Z_p 不変なグラフ G_{3p} について研究した.

以下は, タイプが $G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) であるグラフを, $g = 5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込んだ図である.



$G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変)



$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

G_{15} を構成する部分グラフは, Z_{15} ($0-1-2-\dots-14$), Z_{15} ($0-2-4-\dots-1-3-\dots-13$), Z_5 ($0-3-6-9-12$), Z_5 ($0-6-12-3-9$), Z_5 ($1-4-7-10-13$) と 5 本のエッジ Z_2 ($0-4, 3-7, 6-10, 9-13, 12-1$) と 5 本のエッジ Z_2 ($0-7, 3-10, 6-13, 9-1, 12-4$) と 5 本のエッジ Z_2 ($2-6, 5-9, 8-12, 11-0, 14-3$) である.

$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変) を簡単に述べる. [1] Z_{15} ($0-1-2-\dots-14$) は一番外側の輪郭に埋め込む. [2] Z_{15} ($0-2-4-\dots-1-3-\dots-13$) は $0-2$ を実線で直接繋ぎ, $2-4$ は 2 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 4 まで点線で繋ぎ, さらに 4 と 6 を点線で繋ぐ. この $2-4-6$ の繋ぎ方を繰り返していく. [3] Z_5 ($0-3-6-9-12$) は, 0 から穴⑩までを実線で繋ぎ穴⑩から 3 まで点線で繋ぐ, 同様に 3 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 6 まで点線で繋ぐ, これを繰り返す. [4] Z_5 ($0-6-12-3-9$) は, 0 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 6 まで点線で繋ぐ, 同様に 6 から穴⑨までを実線で繋ぎ穴⑨から 12 まで点線で繋ぐ, これを繰り返す. [5] Z_5 ($1-4-7-10-13$) は 1 から 4 まで点線で繋ぐ, 同様に 4 から 7 まで点線で繋ぐ, これを繰り返す. [6] 5 本のエッジ Z_2 ($0-4, 3-7, 6-10, 9-13, 12-1$) については, Z_2 ($0-4$) ならば, 0 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 4 まで点線で繋ぐ, 他のエッジも同様にする. [7] 5 本のエッジ Z_2 ($0-7, 3-10, 6-13, 9-1, 12-4$) については, Z_2 ($0-7$) ならば, 0 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 7 まで点線で繋ぐ, 他のエッジも同様にする. [8] 最後に, 5 本のエッジ Z_2 ($2-6, 5-9, 8-$

12, 11 - 0, 14 - 3)については, Z_2 (2 - 6)ならば, 2から穴③までを実線で繋ぎ穴③から6まで点線で繋ぐ, 他のエッジも同様にする.

以上により, $G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) が, $g = 5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込まれる.

$G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ の $g = 5$ の閉曲面への埋め込みを一般化して, 次の定理が証明することができた.

定理 2. p を5以上の素数とする. このとき, Z_p 不変なグラフ $G_{3p}[3pZ_2 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{2p}; 12p]$ は, $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる.

ここで, G_{3p} を構成する部分グラフは, $Z_{2p}(0 - 2 - \dots - (3p - 1))$, $Z_{2p}(0 - 2 - \dots - (3p - 1))$, $Z_p(0 - 3 - \dots - (3p - 3))$, $Z_p(1 - 4 - \dots - (3p - 2))$, $Z_p(0 - 6 - \dots - (3p - 6))$, p 本のエッジ $Z_2(0 - 4, 3 - 7, \dots, (3p - 3) - 1)$ と, p 本エッジ $Z_2(0 - 7, 3 - 10, \dots, (3p - 3) - 4)$ と, p 本エッジ $Z_2(2 - 6, 5 - 9, \dots, (3p - 1) - 3)$ である.

定理 2 に関連して, 以下の予想も立てている.

予想 3. G_{3p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の Z_p 不変な部分グラフとする ($p \geq 5$). このとき, G_{3p} の総エッジ数 e の最大値は $12p$ である.

8. 今後の研究方針

- (1) G_{2p} と G_{3p} の $g = p$ の閉曲面への埋め込みを利用して, 中心に穴を1つ増やした場合のグラフの研究をすること.
- (2) G_{5p} や G_{7p} などの $g = p$ の閉曲面への埋め込みを研究すること.
- (3) 予想 1, 予想 2, 予想 3 を証明すること.
- (4) 四色問題の閉曲面版である閉曲面上の色分け問題への応用にも着手したい.

参考文献

- [1] 野口健太, 平面グラフ・曲面上のグラフ, オペレーションズ・リサーチ学会, 2016 年, 12 月号, pp. 832-836
- [2] 小舘崇子, グラフの曲面への埋め込みについて, 東京女子大学紀要論集. 科学部門報告 / 東京女子大学学会 編, 第 62 巻, pp. 1931-1942, 2011 年

ファレイ数列と真珠曲線

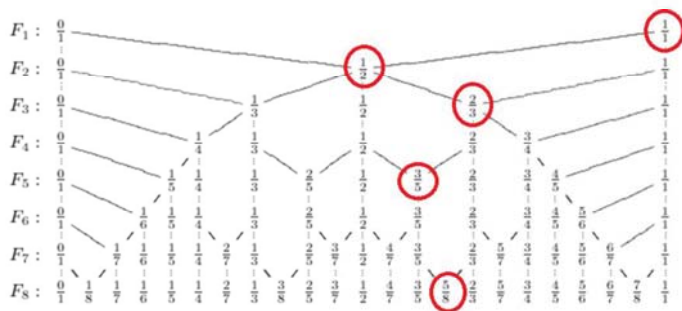
ファレイ数列 F_n

松田 修
 (津山高専・総合理工学科・先進科学系)

1

2

ファレイツリー



ファレイツリーの中にフィボナッチ数列を見ることができる。(赤松, 小林, 2014)

3

2次元ファレイ空間 $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{N}, \gcd(a, b) = 1 \right\}$$

$$G_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

G_2 の固有多項式は,

$$P(x) = x^2 - x - 1.$$

$P(x)$ の根は, 黄金比.

4

$$f_1 \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] := G_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad f_2 \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] := \text{ABS} \left(G_2 \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet f_1 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \text{ABS} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] := \text{ABS} \left(G_2^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet f^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{ABS} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

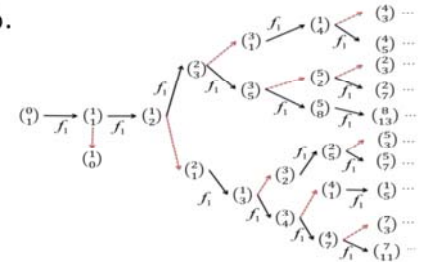
5

定理1 (赤松, 小林, 2014)

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を $\mathcal{F}_2$ の点とし,

$$g: \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_2, \quad g \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) := \left[G_2^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]$$

とする. このとき, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は有限回の変換 g によって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される.



6

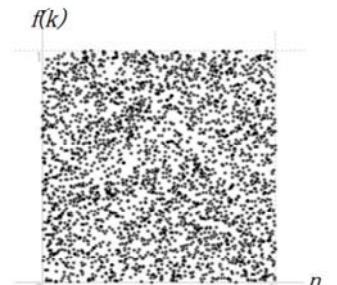
ピゾ数 (黄金比の一般化)

ピゾ数

例1. $\alpha = 5/3$ を考える.

$\text{Fp}(\alpha^k)$: α^k の小数部

$f(k) := \text{Fp}(\alpha^k)$ とする.



$f(k)$ のグラフ (一様分布)

7

8

ピゾ数

例2. $\alpha = 11/6$.

$$f(k) = \text{Fp}(\alpha^k).$$

定理 (Koksma)
ほとんど全ての $\alpha > 1$ について
 α^n は一様分布する.

未解決問題
 $\alpha > 1$ で α^n が一様分布するた
めの判定法は？



$f(k)$ のグラフ (一様分布)

9

ピゾ数

例3. $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

$$f(k) = \text{Fp}(\alpha^k).$$

すなわち, α は
ほとんど整数.



Graph of $f(k)$

10

ピゾ数の定義

ピゾ・ヴィジャヤラガヴァン数

$P(x)$: 整数係数のモニック多項式

$\alpha > 1$ が, $P(x)$ の根で, その他の根の絶対値は
1より小であるとき, α は **ピゾ数** と呼ばれる.

命題 α がピゾ数なら α はほとんど整数である.

11

ピゾ数の例

(1) 1.32471795724474; $x^3 - x - 1$

(2) 1.38027756909761; $x^4 - x^3 - 1$

(3) 1.44326879127037; $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1$

(4) 1.46557123187676; $x^3 - x^2 - 1$

(5) 1.50159480353908; $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1$

12

ファレイ数列はピゾ数によって一般化できるのではないだろうか？

赤松, 小林, 2015年

定理1で用いた変換行列 $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は, $x^2 - x - 1 = 0$ で, その根 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ はピゾ数である.

13

3次元ファレイ空間 $\mathcal{F}_3$

$$\mathcal{F}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N}, \gcd(a, b, c) = 1 \right\}$$

$$G_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G_3 の固有多項式は

$$P(x) = x^3 - x - 1.$$

$P(x)$ の根 $\alpha > 1$ はピゾ数.

14

$$f_1 \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] := G_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad f_2 \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] := \text{ABS} \left(G_2 \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

- $f_1 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $f_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{ABS} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f^{-1} \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] := \text{ABS} \left(G_3^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

- $f^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{ABS} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15

定理2 (赤松, 小林, 2015)

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を $\mathcal{F}_3$ の点とし,

$$g: \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathcal{F}_3, \quad g \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) := \left[G_3^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$$

とする. このとき, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は有限回の変換 g によって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される.

16

真珠曲線

$$C: y^m = x^\alpha(1-x)^\beta$$

ここで, α, β, m は正の整数で, $\gcd(\alpha, \beta, m) = 1$.

C は $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の曲線とみて, 双有理変換を考えると,
 $1 \leq \alpha \leq \beta \leq m - (\alpha + \beta)$ と仮定できる (飯高, 築場).



問題. 真珠曲線を分類せよ.
(2003年)

$$y^4 = x^2(1-x)^3$$

対 (S, C) の双有理幾何

S : 非特異有理曲面.

C : S 上の既約曲線.

2つの対 (S, C) と (S_1, C_1) が双有理同値

$\Leftrightarrow$ (1) $f: S \rightarrow S_1$ が双有理写像.

(2) 固有像 $f[C]$ が C_1 に一致する.

対の極小モデル

(S, D) : 非特異対, すなわち, D が非特異曲線

(S, D) が相対的極小

$\Leftrightarrow S$ 上の任意の第1種例外曲線 E に対して,
 $E \neq D, \quad D \cdot E \geq 2$

である.

記号と定義

Σ_b : Hizebruch 曲面.

C : Σ_b 上の曲線.

$$C \sim \sigma \Delta_\infty + e F_e$$

$[\sigma * e, b; v_1, \dots, v_r]$: 対 (Σ_b, C) の数値的タイプ,

$$(v_1 \geq \dots \geq v_r)$$

$g(C)$: C の種数

$$e^\# := \begin{cases} e - \sigma b & (b \geq 2) \\ e - \sigma - v_1 & (b = 1) \\ e - \sigma & (b = 0) \end{cases} \quad \sigma^\# := \sigma - 2v_1$$

極小対

対 (Σ_b, C) のタイプを $[\sigma * e, b; v_1, \dots, v_r]$ とする.

- 対 (Σ_b, C) が, 以下の条件(1)(2)を満たすとき, (Σ_b, C) は #**極小**であるという.

$$(1) \ e^\# \geq 0 \quad (2) \ \sigma^\# \geq 0$$

- $\sigma_\# = 0$ である #**極小** (Σ_b, C) を **強#極小**であるという.

$$e^\# := \begin{cases} e - \sigma b & (b \geq 2) \\ e - \sigma - v_1 & (b = 1) \\ e - \sigma & (b = 0) \end{cases} \quad \sigma^\# := \sigma - 2v_1$$

定理 (by S.litaka)

(S, D) は $\kappa[D] \geq 0$ である相対的極小対とする.
このとき, $S = \mathbf{P}^2$ であるか, または (S, D) は #**極小**対 (Σ_b, C) の C の最小非特異化から得られる.

注意. $\kappa[D] = \kappa(D + K_S, S)$, K_S は S の標準因子.

極小な真珠曲線

真珠曲線 $C: y^m = x^\alpha(1-x)^\beta$ の射影モデル $\bar{C}$

ここで, $\gcd(\alpha, \beta, m) = 1$, $1 \leq \alpha \leq \beta \leq m - (\alpha + \beta)$.

真珠曲線 $\bar{C}$

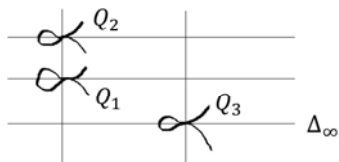
$x_0^{\alpha+\beta} y_1^m = x_1^\alpha (x_0 - x_1)^\beta y_0^m$
は, $\Sigma_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の曲線と考える.

もし $\alpha > 1$ ならば $\bar{C}$ は3つの特異点

$Q_1(1:0,1:0), Q_2(1:1,1:0), Q_3(0:1,0:1)$
を持つ.

$$\bar{C}: x_0^{\alpha+\beta} y_1^m = x_1^\alpha (x_0 - x_1)^\beta y_0^m \text{ on } \Sigma_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$$

$$Q_1(1:0:1:0), \quad Q_2(1:1:1:0), \quad Q_3(0:1:0:1)$$



9

真珠曲線 $\bar{C}$ のタイプ

真珠曲線 $\bar{C}$ の定義式

$$x_0^{\alpha+\beta} y_1^m = x_1^\alpha (x_0 - x_1)^\beta y_0^m$$

タイプは

$$[\gamma * m, 0; Q_3\{\alpha, v_1, \dots, v_r\}, Q_2\{b, \mu_1, \dots, \mu_s\}, Q_1\{a, m_1, \dots, m_t\}]$$

ここで, $\gamma = \alpha + \beta$ で $Q_k\{u, u_1, \dots, u_d\}$ は Q_k の特異点の列の重複度.

Q_k の近傍の曲線の式: $y^m = x^u + \text{higher term.}$

(by H. Yanaba and S. litaka, 2003)

10

築場の例 (2003)

$$\bar{C}: y^{99} = x^{10}(1-x)^{30}$$

#-minimal type of $\bar{C}$:

$$[30 * 60, 2; Q_3\{2^9\}, Q_2\{11, 9^3, 3^3\}, Q_1\{10^{12}, 9^2\}]$$

$$\tilde{b} = 2e - \sigma b = 0, \quad g(\bar{C}) = 48$$

$$Z^2 = 155, \quad P_2[D] = 250, \quad P_{2,1}[D] = 109$$

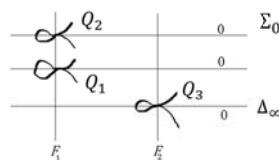
11

基本変換

$$\text{EX. } y^{65} = x^{37}(1-x)^{49}$$

$$y^{65} = x^{21}(1-x)^{28} \text{ (birational)}$$

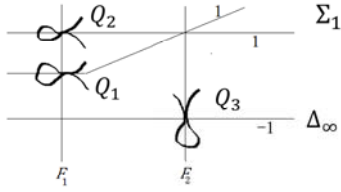
$$\text{Type: } [49 * 65, 0; Q_3\{49, 16^3\}, Q_2\{28^2, 9^3\}, Q_1\{21^3, 2^{10}\}]$$



Blowing up at Q_3
and contracting F_2' .

12

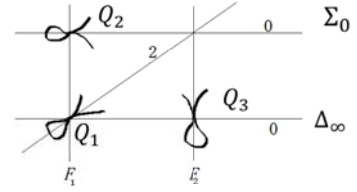
$$\Rightarrow [49 * 65, 1; Q_3\{16^3\}, Q_2\{28^2, 9^3\}, Q_1\{21^3, 2^{10}\}]$$



Blowing up at Q_2
and contracting F_1' .

13

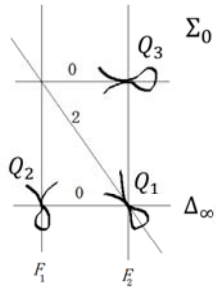
$$\Rightarrow [49 * 37, 0; Q_3\{16^3\}, Q_2\{28, 9^3\}, Q_1\{21^4, 2^{10}\}]$$



Switch 49 and 37.

14

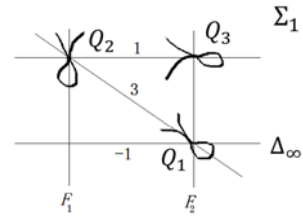
$$\Rightarrow [37 * 49, 0; Q_3\{16^3\}, Q_2\{28, 9^3\}, Q_1\{21^4, 2^{10}\}]$$



Blowing up at Q_2
and contracting F_1' .

15

$$\Rightarrow [37 * 58, 1; Q_3\{16^3\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{21^4, 2^{10}\}]$$



Blowing up at Q_1
and contracting F_2' .

16

17


$$\Rightarrow [32 * 37, 0; Q_3\{16^6\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{21, 2^{10}\}]$$


Switch 37 and 32.

20

フィボナッチ数列と真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
1	(1,1,2)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1
2	(1,2,3)	[1 * 3,0; 1]	0	2	-1
3	(2,3,5)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1
4	(3,5,8)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1
5	(5,8,13)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1
6	(8,13,21)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1

21

フィボナッチ数列と真珠曲線

命題1. $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ として, 真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-2}}(1-x)^{\alpha_{n-1}}$$

を考える. このとき, $g(\bar{C}_n) = 0$ であり, $\bar{C}_n$ の#- 極小タイプは,

(1) [1 * 3,0; 1] (ただし $n = 2$), (2) [1 * 2,0; 1] (ただし, $n \neq 2$).

である. (1)は $e_\# = 2$, (2)は $e_\# = 1$ である.

(証明) 数学的帰納法による.

22

一般フィボナッチ数列と真珠曲線

命題2. $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$ ($1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$)とし, 真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-2}}(1-x)^{\alpha_{n-1}}$$

を考える. このとき, $g(\bar{C}_n) = 0$ であり, $\bar{C}_n$ の#- 極小タイプは,

(1) [1 * α_2 , 0; 1] (ただし, $\alpha_1 = 1$), (2) [1 * α_1 , 0; 1] (ただし, $\alpha_1 \neq 1$)

(証明) 真珠曲線のタイプは

$$[\alpha_n * \alpha_n, 0; Q_3\{\alpha_n\}, Q_2\{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1^2\}, Q_1\{\alpha_{n-1}^2, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1^2\}]$$

であるので, 基本変換のパターンが同じになることから証明される,

23

3次元ファレイ数列と真珠曲線

3次元ファレイ数列:

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ m_n \end{pmatrix} = G_3 \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \\ m_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ただし,

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, G_3 の固有多項式は

$$P(x) = x^3 - x - 1$$

24

3次元ファレイ数列の真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data 1

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
1	(1,1,2)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1
2	(1,2,2)	[1 * 2,0; 1]	0	1	-1
3	(2,2,3)	[2 * 3,1; 1]	1	0	0
4	(2,3,4)	[2 * 3,1; 1]	1	0	0
5	(3,4,5)	[2 * 3,0; 1]	2	1	0
6	(4,5,7)	[4 * 6,1; 2 ⁶]	3	0	0
7	(5,7,9)	[4 * 6,1; 2 ⁶]	3	0	0

25

Data 2

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
8	(7,9,12)	[6 * 9,1; 3 ⁶ , 2 ⁴]	3	0	0
9	(9,12,16)	[8 * 12,1; 4 ⁶ , 3, 2 ⁴]	6	0	0
10	(12,16,21)	[10 * 15,1; 5 ⁶ , 3 ⁵]	6	0	0
11	(16,21,28)	[14 * 21,1; 7 ⁶ , 5, 4 ⁴]	9	0	0
12	(21,28,37)	[18 * 27,1; 9 ⁶ , 6, 5 ⁴]	18	0	0
13	(28,37,49)	[24 * 36,1; 12 ⁶ , 8, 7 ⁴]	21	0	0
14	(37,49,65)	[32 * 48,1; 16 ⁶ , 11, 9 ⁴ , 2 ¹⁰]	32	0	0
15	(49,65,86)	[42 * 63,1; 21 ⁶ , 14, 12 ⁴ , 2 ²⁴]	42	0	0

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 2(m_n - \beta_n), \quad e_n = 3(m_n - \beta_n), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0 (n \geq 6) \\ \sigma_n &= \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3} \\ g(\bar{C}_n) &= g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3}) \end{aligned}$$

26

3次元ファレイ数列の真珠曲線

命題4. $\alpha_n = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = 2$ とし, 真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-3}}(1-x)^{\alpha_{n-2}}$$

を考える. $n \geq 6$ のとき,

$$\sigma_n = 2(\alpha_n - \alpha_{n-2}), \quad e_n = 3(\alpha_n - \alpha_{n-2}), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3}$$

$$g(\bar{C}_n) = g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3})$$

が成り立つ.

1

(証明) $\alpha_n = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = 2$

$$\bar{C}_n: y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-3}}(1-x)^{\alpha_{n-2}}$$



$$\bar{C}_n: y^{\alpha_n} = x^u(1-x)^w$$

$$\text{ただし, } u = \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} - \alpha_n, \quad w = \alpha_n - \alpha_{n-2}$$

真珠曲線のタイプは

$$[\alpha_{n-1} * \alpha_n, 0; Q_3\{\alpha_{n-1}, (\alpha_n - \alpha_{n-1})^3, \dots\}, Q_2\{w^2, w_1, \dots\}, Q_1\{u^3, u_1, \dots\}]$$

Q_3 の α_{n-1} を解消, Q_2 の w を解消, Q_1 の u を解消するように, 基本変換を行った結果から得られる.

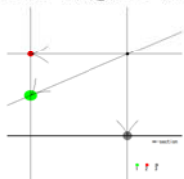
例 $y^{265} = x^{151}(1-x)^{200}$, ($\alpha_{20} = 151, \alpha_{21} = 200, \alpha_{23} = 265$)

$y^{265} = x^{86}(1-x)^{114}$ と双有理同値

タイプ: $[200 * 265, 0; Q_3\{200, 65^3, 5^{13}\}, Q_2\{114^2, 37^3, 3^{12}\}, Q_1\{86^3, 7^{12}, 2^3\}]$

Q_3 で第1種変換

$[200 * 265, \mathbf{1}; Q_3\{65^3, 5^{13}\}, Q_2\{114^2, 37^3, 3^{12}\}, Q_1\{86^3, 7^{12}, 2^3\}]$



$[200 * 265, \mathbf{1}; Q_3\{65^3, 5^{13}\}, Q_2\{114^2, 37^3, 3^{12}\}, Q_1\{86^3, 7^{12}, 2^3\}]$

Q_2 で第1種変換

$[200 * 151, \mathbf{0}; Q_3\{65^3, 5^{13}\}, Q_2\{\mathbf{114}, 37^3, 3^{12}\}, Q_1\{86^{\mathbf{4}}, 7^{12}, 2^3\}]$



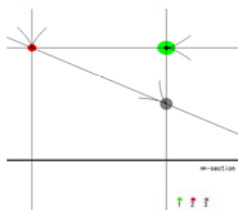
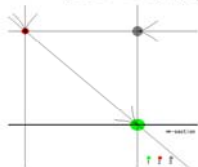
第2種変換

$[\mathbf{151} * \mathbf{200}, \mathbf{0}; Q_3\{65^3, 5^{13}\}, Q_2\{114, 37^3, 3^{12}\}, Q_1\{86^{\mathbf{4}}, 7^{12}, 2^3\}]$

$[151 * 200, \mathbf{0}; Q_3\{65^3, 5^{13}\}, Q_2\{114, 37^3, 3^{12}\}, Q_1\{86^{\mathbf{4}}, 7^{12}, 2^3\}]$

Q_2 で第1種変換

$[151 * 200, \mathbf{1}; Q_3\{65^3, 5^{13}\}, Q_2\{37^{\mathbf{4}}, 3^{12}\}, Q_1\{86^{\mathbf{4}}, 7^{12}, 2^3\}]$



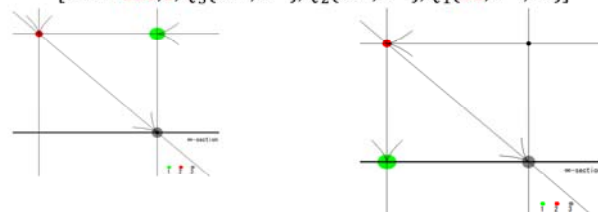
Q_1 で第1種変換

$[151 * 302, \mathbf{2}; Q_3\{65^{\mathbf{4}}, 5^{13}\}, Q_2\{37^{\mathbf{4}}, 3^{12}\}, Q_1\{86^{\mathbf{3}}, 7^{12}, 2^3\}]$

$[151 * 302, \mathbf{2}; Q_3\{65^{\mathbf{4}}, 5^{13}\}, Q_2\{37^{\mathbf{4}}, 3^{12}\}, Q_1\{86^{\mathbf{3}}, 7^{12}, 2^3\}]$

Q_1 で第1種変換

$[151 * \mathbf{130}, \mathbf{0}; Q_3\{65^{\mathbf{6}}, 5^{13}\}, Q_2\{37^{\mathbf{4}}, 3^{12}\}, Q_1\{\mathbf{86}, 7^{12}, 2^3\}]$



第2種変換

$[\mathbf{130} * \mathbf{151}, \mathbf{0}; Q_3\{65^{\mathbf{6}}, 5^{13}\}, Q_2\{37^{\mathbf{4}}, 3^{12}\}, Q_1\{86, 7^{12}, 2^3\}]$

$[130 * 151, 0; Q_3\{65^6, 5^{13}\}, Q_2\{37^4, 3^{12}\}, Q_1\{86, 7^{12}, 2^3\}]$
 Q_1 で第1種変換
 $[130 * 195, 1; Q_3\{65^6, 5^{13}\}, Q_2\{44, 37^4, 3^{12}\}, Q_1\{7^{12}, 2^3\}]$

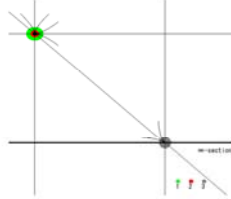
$(\alpha_{20} = 151, \alpha_{21} = 200, \alpha_{23} = 265)$

$$\sigma = 130 = 2(265 - 200)$$

$$e = 195 = 3(265 - 200)$$

$$e^\# = e - \sigma - v_1 = 0$$

$$\sigma^\# = \sigma - 2v_1 = 0$$



3次元ファレイ数列の真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data 3

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
1	(1,2,3)	$[1 * 3, 0; 1]$	0	2	-1
2	(2,3,3)	$[1 * 3, 0; 1]$	0	2	-1
3	(3,3,5)	$[2 * 3, 0; 1]$	2	1	0
4	(3,5,6)	$[2 * 3, 1; 1]$	1	0	0
5	(5,6,8)	$[4 * 5, 0; 2^9]$	3	1	0
6	(6,8,11)	$[6 * 9, 1; 3^6, 2^2]$	5	0	0
7	(8,11,14)	$[6 * 10, 1; 3^6, 2^9]$	6	1	0

Data 4

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
8	(11,14,19)	$[10 * 15, 1; 5^5, 4^2, 3^3, 2]$	9	0	0
9	(14,19,25)	$[12 * 18, 1; 6^6, 4, 3^4, 2]$	12	0	0
10	(19,25,33)	$[16 * 24, 1; 8^6, 5^4, 4]$	11	0	0
11	(25,33,44)	$[22 * 33, 1; 11^6, 8, 6^4, 2^7]$	16	0	0
12	(33,44,58)	$[28 * 42, 1; 14^6, 9, 8^4, 2^7]$	28	0	0
13	(44,58,77)	$[38 * 57, 1; 19^6, 13, 11^4, 2^{12}]$	33	0	0
14	(58,77,102)	$[50 * 75, 1; 25^6, 17, 14^4, 3^{11}, 2^{19}]$	49	0	0
15	(77,102,135)	$[66 * 99, 1; 33^6, 22, 19^4, 3^{25}, 2]$	66	0	0

$$\sigma_n = 2(m_n - \beta_n), \quad e_n = 3(m_n - \beta_n), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3}$$

$$g(\bar{C}_n) = g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3})$$

3次元ファレイ数列の真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

$$(3,4,5) + (3,5,6) = (6,9,11)$$

Data 5

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
1	(6,9,11)	$[4 * 7, 1; 2^7]$	5	1	0
2	(9,11,15)	$[8 * 12, 1; 4^5, 3^5]$	4	0	0
3	(11,15,20)	$[10 * 15, 1; 5^6, 4, 2^8]$	7	0	0
4	(15,20,26)	$[12 * 19, 1; 6^6, 4^4, 3, 2^3]$	12	1	0
5	(20,26,35)	$[18 * 27, 1; 9^5, 8, 7, 5^4, 2^5]$	15	0	0
6	(26,35,46)	$[22 * 33, 1; 11^6, 7, 6^4, 2^8]$	17	0	0
7	(35,46,61)	$[30 * 45, 1; 15^6, 10, 9^3, 8]$	43	0	0

Data 6

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
8	(46,61,81)	$[40 * 60, 1; 20^6, 14, 11^4, 3^8, 2^6]$	40	0	0
9	(61,81,107)	$[52 * 78, 1; 26^6, 17, 15^4, 3^8, 2^{18}]$	53	0	0
10	(81,107,142)	$[70 * 105, 1; 35^6, 24, 20^4, 4^{11}, 2^{19}]$	70	0	0
11	(107,142,188)	$[92 * 138, 1; 46^6, 31, 26^4, 5^{12}, 4^{11}, 3^8, 2^3]$	93	0	0
12	(142,188,249)	$[122 * 183, 1; 61^6, 41, 35^4, 6^{13}, 5^{12}, 3^2, 2^{17}]$	123	0	0

$$\sigma_n = 2(m_n - \beta_n), \quad e_n = 3(m_n - \beta_n), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3}$$

$$g(\bar{C}_n) = g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3})$$

3次元ファレイ数列の真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data 7

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
1	(5,15,16)	$[4 * 5, 0, 1]$	6	0	2
2	(15,16,20)	$[9 * 18, 2; 4^9, 2^4]$	6	18	1
3	(16,20,31)	$[10 * 17, 1; 5^8, 2^4]$	15	2	0
4	(20,31,36)	$[10 * 28, 2; 5^4, 4^7, 3^2]$	15	36	0
5	(31,36,51)	$[30 * 45, 1; 15^5, 14, 11^2, 9, 6^2, 3^7, 2^4]$	24	0	0
6	(36,51,67)	$[32 * 48, 1; 16^6, 12, 7^2, 6, 5^7, 3^5]$	33	0	0

5

Data 8

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
7	(51,67,87)	$[40 * 66, 1; 20^6, 15^4, 7^2, 6^7, 3^2]$	42	6	0
8	(67,87,118)	$[62 * 93, 1; 31^5, 26, 25, 16^4, 10^3, 6^5, 4, 3^5, 2^2]$	58	0	0
9	(87,118,154)	$[72 * 108, 1; 36^6, 21, 20^4, 10^3, 7^2, 6^2, 4, 2^2]$	76	0	0
10	(118,154,205)	$[102 * 153, 1; 51^6, 35, 31^3, 25, 6^4, 4^{16}, 3]$	102	0	0
11	(154,205,272)	$[134 * 201, 1; 67^6, 47, 36^4, 11^7, 10^4, 6, 4^{17}, 3, 2^2]$	135	0	0
12	(205,272,359)	$[174 * 261, 1; 87^6, 56, 51^4, 11^7, 10, 5^{23}, 3, 2]$	179	0	0
13	(272,359,477)	$[236 * 354, 1; 118^6, 82, 67^4, 15^{10}, 5^{23}, 4^{19}, 3^3, 2]$	238	0	0

$$\sigma_n = 2(\alpha_n - \alpha_{n-2}), \quad e_n = 3(\alpha_n - \alpha_{n-2}), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3}, \quad b_n^\# = b_{n-2}^\# + b_{n-3}^\#$$

$$g(\bar{C}_n) = g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3}) + 1$$

3次元ファレイ数列の真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data 8 (築場モデル)

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
1	(10,30,99)	$[30 * 60, 2; 11, 10^{12}, 9^5, 3^4, 3, 2^9]$	48	60	8
2	(30,99,40)	$[19 * 38, 2; 9^8, 4^2, 2^9]$	15	38	1
3	(99,40,129)	$[39 * 49, 1; 10^{15}, 9^9, 4^2, 3^3]$	63	0	19
4	(40,129,139)	$[40 * 59, 1; 19^2, 11, 10^{17}, 9, 8, 3^2, 2^{10}]$	69	0	2
5	(129,139,169)	$[174 * 261, 1; 87^6, 56, 51^4, 11^7, 10, 5^{23}, 3, 2]$	84	158	0
6	(139,169,268)	$[80 * 149, 1; 40^8, 29^2, 28, 12^4, 10^{14}, 9, 5^2, 4^3, 2^2]$	132	29	0
7	(169,268,308)	$[80 * 229, 2; 40^9, 30^7, 29, 28, 21, 19, 12^2, 8^2, 5, 4^3, 3^3, 2^2]$	152	298	0

7

Data 9

n	(α_n, β_n, m_n)	#minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$e_n^\#$	$\sigma_n^\#$
8	(268,308,437)	[258 * 387,1; 129 ⁵ , 119,99 ² , 70,50 ² , 29 ³ 21,20 ⁶ 19,8 ² , 5 ³ , 3,2 ³]	218	0	0
9	(308,437,576)	[278 * 412,1; 139 ⁶ , 109,69 ² , 40 ⁷ , 31 ² , 28,20 ⁶ , 19,12 ² , 7 ⁴ , 4 ³ , 3 ²]	286	0	0
10	(437,576,745)	[338 * 566,1; 169 ⁶ , 129 ⁴ , 69 ² , 59 ³ , 50 ² , 32, 31 ² , 29,27,21,7 ⁴ , 5 ⁶ , 3 ² , 2 ²]	372	59	0
11	(576,745,1013)	[536 * 804,1; 268 ⁵ , 228,209,139,89 ³ , 59 ³ , 41 ² , 32,27,20 ⁶ , 19,7 ⁵ , 6,5 ⁴ 5,2 ²]	506	0	0
12	(745,1013,1321)	[616 * 924,1; 308 ⁶ , 179,169 ⁴ , 89 ³ , 69 ² , 41 ² , 31 ² , 7 ¹⁰ , 6,3 ³]	660	0	0
13	(1013,1321,1758)	[874 * 1311,1; 437 ⁶ , 298,268 ³ , 209,59 ³ , 30 ¹⁰ , 27,10 ⁴³ , 7,6 ⁵ , 3 ² , 2 ²]	876	0	0
14	(1321,1758,2334)	[1152 * 1728,1; 576 ⁶ , 407,308 ⁴ , 99 ⁷ , 89 ³ , 52,47,41 ² , 30 ¹⁹ , 7 ⁵ , 6 ⁶ , 5 ⁹ , 2 ²]	1164	0	0
15	(1758,2334,3079)	[1490 * 2235,1; 745 ⁶ , 477,437 ⁴ , 99 ⁷ , 52,47,40 ²⁵ , 13 ³ , 10 ⁴³ , 7,5 ⁹ , 3 ² , 2 ²]	1539	0	0

$$\sigma_n = 2(m_n - \beta_n), \quad e_n = 3(m_n - \beta_n), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3}$$

$$g(\bar{C}_n) = g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3}) + 2$$

今後の研究のための予想

初期値 (α_0, β_0, m_0) の3次元ファレイ数列 (α_n, β_n, m_n) に対応する真珠曲線

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

は, n が十分大となると,

$$\sigma_n = 2(m_n - \beta_n), \quad e_n = 3(m_n - \beta_n), \quad e_n^\# = \sigma_n^\# = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3}, \quad e_n = e_{n-2} + e_{n-3}$$

を満たす. さらに,

$$g(\bar{C}_n) = g(\bar{C}_{n-2}) + g(\bar{C}_{n-3}) + k$$

も成り立つ. ただし, k に関する研究が必要である.

素数 p を基礎にした完全数の研究

桐山翔伍（津山高専 電気電子工学科 4 年）

1. はじめに

私はこれまでに知られている完全数をより一般的に扱った「素数 p を基礎にした完全数」という数を定義し、研究をおこなっている。

完全数 a とは $\tau(a)$ を a を除いた約数の和としたとき、 $a = \tau(a)$ となる数のことである。私は通常の6, 28, 496, 8128, ... といった完全数は、「素数 2 を基礎にした完全数」ではないかと考えた。なぜならこれらは全て、2 のべき乗の和 $(1 + 2 + \dots + 2^n)$ から得られるメルセンヌ素数に関係しているからである。例えば、完全数 6 は $6 = 2 \times 3$ であり、これは $3 (= 1 + 2)$ というメルセンヌ素数に関係し、完全数 28 は $2^2 \times 7$ であり、これは $7 (= 1 + 2 + 2^2)$ というメルセンヌ素数と関係している。実は、偶数の完全数は、 $2^n \times (\text{メルセンヌ素数})$ という形に限ることが知られており、ユークリッド・オイラーの定理と呼ばれている。

メルセンヌ素数が 2 のべき乗の和から得られるのであれば、3 のべき乗の和 $(1 + 3 + \dots + 3^n)$ から得られるメルセンヌ素数、5 のべき乗の和 $(1 + 5 + \dots + 5^n)$ から得られるメルセンヌ素数、より一般に素数 p のべき乗の和 $(1 + p + \dots + p^n)$ から得られるメルセンヌ素数というものを考えれば、これに関係した素数 p を基礎にした完全数という数があるのではないだろうかと思い、研究を行った。

本研究内容は、第 8 節までは、論文[K2]に掲載されたものの紹介である。そして、第 9 節において今回新たに得られた結果を報告する。

2. pM_n 完全数

まず素数 2 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 2M_n 、すなわち、

$${}^2M_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

となる素数 2M_n を考えよう。そして、

$$a = 2^{n-1} \times {}^2M_n$$

と置く。このとき、 $\tau(a)$ を a 以外の約数の和とすると

$$a = \tau(a)$$

が成り立つ。すなわち、このようにして得られた数 a は全て完全数である。

そこで、素数 3 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 3M_n を定義する。それは

$${}^3M_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$$

という素数 3M_n のことである。そして、

$$a = 3^{n-1} \times {}^3M_n$$

なる数を考えると、

$$a = 2\tau(a) - {}^3M_n$$

が成り立つ. さらに素数 5 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 5M_n を,

$${}^5M_n = 1 + 5 + \cdots + 5^{n-1}$$

という素数 5M_n とし,

$$a = 5^{n-1} \times {}^5M_n$$

を考えると,

$$a = 4\tau(a) - 3 \times {}^5M_n$$

が成り立つ.

そこで一般に, 素数 p のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数

$${}^pM_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$$

を定義し, pM_n を p メルセンヌ素数と呼ぶことにする. そして

$$a = p^{n-1} \times {}^pM_n \quad (1)$$

なる数を考えると

$$a = (p-1)\tau(a) - (p-2) {}^pM_n \quad (2)$$

が成り立つ. これは, 簡単な計算から証明できる. この a は pM_n と p^{n-1} の積から得られるため, pM_n 派生数と呼ぶことにした.

私は, 等式(2)が成り立つ数は, pM_n 派生数以外にもあるのではないかと思った. そこで, 以下を定義し研究を進めた.

定義 (pM_n 完全数)

p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数とする. このとき a が pM_n 完全数であるとは, a が

$$a = (p-1)\tau(a) - (p-2) {}^pM_n$$

を満たすときをいう.

(注意 1) $p \geq 3$ のとき, pM_n 完全数は奇数である.

3. 研究方針

これまで扱われていた完全数については, 歴史的な結果がある. それは, 紀元前にユークリッドが予想し, 18 世紀にオイラーが証明した次の定理である.

定理 (ユークリッド・オイラー)

$M_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$ とし, $a = 2^{n-1}M_n$ を考える. このとき M_n が素数ならば, a は完全数である. 逆に, 偶数 (2 の倍数) の完全数はこのような形に限る.

上の定理(ユークリッド・オイラー)を, pM_n 完全数について書きかえることを, 本研究の目標とした.

4. $p = 3, 5, 7$ の場合の pM_n 完全数の研究

本研究の目標は, 定理(ユークリッド・オイラー)を, pM_n 完全数に書き換えることである. そのために $p = 3, 5, 7$ の場合の, 特に pM_n 派生数以外の pM_n 完全数を, フリーソフト wxMaxima を使い, 10^6 までの範囲でコンピュータを用いて調査した.

$p = 3$ の場合, 3M_n 完全数については, ${}^3M_3 = 13$ のとき pM_n 派生数以外の pM_n 完全数として 1809 と 18549 が見つかった. これらの数を分析すると,

$$1809 = 3^3 \times 67, \quad 18549 = 3^4 \times 229$$

となっており, 1809は素数67に, 18549は素数229を因数として持つことが分かった.

$p = 5, 7$ については, pM_n 派生数以外の素数 p に関する pM_n 完全数は見つからなかった. そこで, 本研究の目標としている定理(ユークリッド・オイラー)を見直すと, pM_n 完全数 a を p の倍数である $a = p^{d-1}Q$ という形のものに限り調査すればよいのではないかと考えた.

しかし, pM_n 完全数 a の定義から, $p \geq 3$ のとき a は奇数であるが, だからといって, a を p の倍数だけに限定することはできない. そこで, もう少し一般にして $a = p_1^{d-1}Q$ (ただし p_1, Q は素数で, p_1 は a の最小素因数) という形で考えた方が適切であると判断した. そして, $p = 3, 5, 7$ のときの pM_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ のデータを $1 \leq d \leq 20$ の範囲で調査した.

① $p = 3$ の場合: 3M_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ のデータ (${}^3M_n = \frac{3^n-1}{2}$, $2 \leq n \leq 7$)

n	3M_n	d	p_1	Q	完全数 a
3	13	3	3	13	$3^2 \times 13$
		4	3	67	$3^3 \times 67$
		5	3	229	$3^4 \times 229$
		8	3	6547	$3^7 \times 6547$
		17	3	129140149	$3^{16} \times 129140149$
		19	3	1162261453	$3^{18} \times 1162261453$
7	1093	7	3	1093	$3^6 \times 1093$
		11	3	176053	$3^{10} \times 176053$
		17	3	129139069	$3^{16} \times 129139069$

- ② $p = 5$ の場合： 5M_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ のデータ (${}^5M_n = \frac{5^n-1}{4}$, $2 \leq n \leq 7$)

n	5M_n	d	p_1	Q	完全数 a
3	31	3	5	31	$5^2 \times 31$
		7	5	78031	$5^6 \times 78031$
7	19531	3	3	8363	$3^2 \times 8363$
		7	5	19531	$5^6 \times 19531$

- ③ $p = 7$ の場合： 7M_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ のデータ (${}^7M_n = \frac{7^n-1}{6}$, $2 \leq n \leq 7$)

n	7M_n	d	p_1	Q	完全数 a
5	2801	5	7	2801	$7^4 \times 2801$
		6	7	103643	$7^5 \times 103643$

5. データの考察

p メルセンヌ素数 pM_n とは

$${}^pM_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$$

であった. これを p 進表示で考えると, 1が n 個並んだ数

$${}^pM_n = 11 \cdots 1$$

を意味する. この観点から pM_n 完全数 a を考察する. そのために, 前節で得られた pM_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ (ただし p_1, Q は素数)の表を見て, 素数 Q を p 進表示してみた. 以下がその結果である.

- ① $p = 3$ の場合： 3M_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ の素因数 Q の3進表示のデータ

n	3M_n	d	p_1	Q	Q の3進表示
3	13	3	3	13	111
		4	3	67	2111
		5	3	229	22111
		8	3	6547	22222111
		17	3	129140149	2222222222222111
		19	3	1162261453	222222222222222111
7	1093	7	3	1093	1111111
		11	3	176053	22221111111
		17	3	129139069	22222222221111111

② $p = 5$ の場合 : 5M_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ の素因数 Q の 5 進表示のデータ

n	5M_n	d	p_1	Q	Q の 5 進表示
3	31	3	5	31	111
		7	5	78031	4444111
7	19531	3	3	8363	231423
		7	5	19531	1111111

③ $p = 7$ の場合 : 7M_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ の素因数 Q の 7 進表示のデータ

n	7M_n	d	p_1	Q	Q の 7 進表示
5	2801	5	7	2801	11111
		6	7	103643	611111

p 進表示された Q には, 次のような特徴がある.

- (1) 5M_n 完全数における $a = 3^2 \times 8363$ 以外は, $p_1 = p$ である.
- (2) $p_1 = p$ の場合, Q を p 進表示で考えると, Q は d 桁の数であり, 1 と $p-1$ という数だけで構成されている. そして, 下 n 桁まで 1 が並び, $n+1$ 桁から d 桁まで $p-1$ が並ぶ.

6. 擬 p メルセンヌ数と主結果

pM_n 完全数 $a = p_1^{d-1}Q$ (ただし p_1, Q は素数) においては, $p_1 = p$ の場合に重要なデータが得られた. すなわち, $a = p^{d-1}Q$ のときの素数 Q の p 進表示に特徴が現れた. この特徴を十進表示で考えると,

$$Q = (p-1)^p M_d - (p-2)^p M_n \quad (\text{ただし, } d \geq n)$$

となる. これを元に次を定義した.

定義 (擬 p メルセンヌ数)

d, n を自然数 $d \geq n$ とする. このとき ${}^pK_{d,n}$ を

$${}^pK_{d,n} = (p-1)^p M_d - (p-2)^p M_n$$

とし, これを擬 p メルセンヌ数と呼ぶ.

特に, ${}^pK_{d,n}$ が素数のとき, ${}^pK_{d,n}$ を擬 p メルセンヌ素数という.

(注意 2) 擬 p メルセンヌ数の定義により, ${}^pK_{d,n}$ はその形から p 進表示すると, n 桁まで 1 が並び $n+1$ 桁から d 桁まで $p-1$ という数が並ぶことが分かる.

(注意 3) $p = 2$ のとき, 注意 2 より ${}^2K_{d,n} = {}^2M_d$ である. すなわち, 擬 p メルセンヌ数はメルセンヌ数である.

以上の準備のもとで, 以下に今回の研究で得られた定理を述べる.

定理 1. pM_n を p メルセンヌ素数, ${}^pK_{d,n}$ を擬 p メルセンヌ素数とし, $a = p^{d-1} {}^pK_{d,n}$ とおく. このとき, a は pM_n 完全数である.

定理 1 の証明には, 高本[Ta]の P. 13 にある次の命題 1 を使った.

命題 1. $S(x)$ を x の約数の和とする. もし a と b が互いに素なら, $S(ab) = S(a)S(b)$ となる.

定理 1 の証明に命題 1 を使うため, pM_n 完全数 a の定義を $S(a)$ で書きかえておく.
 pM_n 完全数の定義より

$$a = (p-1)\tau(a) - (p-2) {}^pM_n$$

であり, $\tau(a) = S(a) - a$ であるので

$$a = (p-1)(S(a) - a) - (p-2) {}^pM_n$$

である. よって,

$$pa = (p-1)S(a) - (p-2) {}^pM_n \quad (3)$$

を得る.

(定理 1 の証明) (3) が成り立つことを示す. p^{d-1} と ${}^pK_{d,n}$ は互いに素であるので命題 1 より

$$S(a) = S(p^{d-1})S({}^pK_{d,n}) = \frac{p^d - 1}{p - 1}(1 + {}^pK_{d,n})$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} (p-1)S(a) &= (p^d - 1)(1 + {}^pK_{d,n}) = p^d - 1 + pa - {}^pK_{d,n} \\ &= (p-1) {}^pM_d + pa - {}^pK_{d,n} \end{aligned}$$

である. ${}^pK_{d,n} = (p-1) {}^pM_d - (p-2) {}^pM_n$ より,

$$pa = (p-1)S(a) - (p-2) {}^pM_n$$

となり, a は pM_n 完全数である. (証明終)

7. 定理 1 の逆に関する考察

定理(ユークリッド・オイラー)に対応する定理 1 の逆が成り立つかを解決することが, 重要な課題となった.

予想 1. p の倍数である pM_n 完全数は $a = p^{d-1} {}^pK_{n,d}$ に限る.

以下, 予想 1 について考察する.

Q は p を因数に持たない自然数とし $a = p^{d-1}Q$ とおく. さらに, a は pM_n 完全数とする. このとき (3) より,

$$p^d Q = (p-1)S(p^{d-1})S(Q) - (p-2) {}^pM_n$$

が成り立つ. $S(p^{d-1}) = \frac{p^d-1}{p-1}$ より,

$$S(Q) = \frac{p^d Q + (p-2) {}^pM_n}{p^d - 1} = Q + \frac{Q + (p-2) {}^pM_n}{p^d - 1}$$

である. $\tau(Q)$ は Q を除く約数の和であるから,

$$S(Q) - Q = \tau(Q) = \frac{Q + (p-2) {}^pM_n}{p^d - 1} = \frac{Q + (p-2) {}^pM_n}{(p-1) {}^pM_d}$$

であることが分かる. よって,

$$Q = (p-1)\tau(Q) {}^pM_d - (p-2) {}^pM_n = (p-1) {}^pM_d (\tau(Q) - 1) + {}^pK_{d,n} \quad (4)$$

を得る. 特に, Q が素数のとき, $\tau(Q) = 1$ であるので,

$$Q = (p-1) {}^pM_d - (p-2) {}^pM_n = {}^pK_{d,n}$$

となる.

以上の式変形から得られた, pM_n 完全数 a の定義に類似した等式(4)を, 命題としておく.

命題 2. Q は p を因数に持たない自然数とし, $a = p^{d-1}Q$ とする. このとき, a が pM_n 完全数であるならば,

$$Q = (p-1)\tau(Q) {}^pM_d - (p-2) {}^pM_n$$

が成り立つ. 逆に Q がこれを満たせば a は pM_n 完全数となる.

命題 2 によって, 予想 1 は部分的に解決でき, 以下の定理を得る.

定理 2. $a = p^{d-1}Q$ という形の pM_n 完全数は, Q が素数ならば Q は擬 p メルセンヌ素数である.

定理 2 により, 次は Q が合成数の pM_n 完全数を調べなければならない. 次の命題は, このために役に立つ.

命題 3. Q は p を因数に持たない合成数とし, $a = p^{d-1}Q$ とする. さらに, a は pM_n 完全数であるとする. このとき, もし $d \geq n$ ならば, Q の任意の素因数 q は

$$(p-1) {}^pM_d < q$$

を満たす.

(証明) a は pM_n 完全数であるので, Q は命題 2 の等式を満たす. その等式において $Q = qb$ とすると,

$$qb = (p-1)\tau(qb) {}^pM_d - (p-2) {}^pM_n \quad (5)$$

となる. (5)は $\tau(qb) = 1 + q + b + C$ と置くと,

$$qb = (p-1)(1 + q + b + C) {}^pM_d - (p-2) {}^pM_n$$

となる. ${}^pK_{d,n} = (p-1)M_d - (p-2)M_n$ より,

$$qb = {}^pK_{d,n} + (p-1)(q + b + C) {}^pM_d \quad (6)$$

である. $d \geq n$ より ${}^pK_{d,n} > 0$ であり, さらに(6)より

$$(q - (p-1) {}^pM_d)b = {}^pK_{d,n} + (p-1)(q + C) {}^pM_d > 0$$

となる. したがって, $(p-1) {}^pM_d < q$ である. (証明終)

命題 3 を使うと予想 1 に関係する以下の定理が証明できる.

定理 3. $p \geq 3$, Q は p を因数に持たない合成数とする. このとき, $a = p^{cn-1}Q$ ($c \geq 1$) は pM_n 完全数ではない.

(証明) $a = p^{cn-1}Q$ は完全数とし矛盾を導く. $d = cn$ より

$$\begin{aligned} {}^pM_d &= (1 + p + \dots + p^{n-1}) + (p^n + p^{n+1} + \dots + p^{2n-1}) + \dots \\ &\quad + (p^{n(c-1)} + p^{n(c-1)+1} + \dots + p^{cn-1}) = (1 + p^n + \dots + p^{n(c-1)}) {}^pM_n \end{aligned}$$

で, 命題 2 より,

$$Q = \{(p-1)(1 + p^n + \dots + p^{n(c-1)})\tau(Q) - (p-2)\} {}^pM_n$$

である. よって, pM_n は Q の素因数である. したがって, 命題 3 において $q = {}^pM_n$ としてもよい. しかし, $(p-1) {}^pM_d = (1 + p^n + \dots + p^{n(c-1)}) {}^pM_n \geq {}^pM_n$ となり命題 3 に矛盾する. よって, a は pM_n 完全数ではない. (証明終)

定理 3 が証明できたので, 予想 1 は, 『 $p \geq 3$, $d \neq cn$ で, Q は素数でない』場合に, $a = p^{d-1}Q$ が pM_n 完全数でないことを示す場合が残された. しかし, この場合を示すことはとても難しく, 今のところ私はその証明を示すことができない.

8. p の倍数でない pM_n 完全数

これまで、 p の倍数である pM_n 完全数について説明してきたが、 p の倍数でない pM_n 完全数が存在することがわかった。これまでの調査で、私は、以下の4つの p の倍数でない pM_n 完全数を見つけたからである。

- (1) 5M_7 完全数： $a = 3^2 \times 8363$ ，ここで ${}^5M_7 = 19531$ である。
- (2) ${}^{31}M_{17}$ 完全数： $a = 13 \times 1282261542060234416042729$ ，ここで ${}^{31}M_{17} = 751670559138758105956097$ である。
- (3) ${}^{127}M_5$ 完全数： $a = 107 \times 1725060343$ ，ここで ${}^{127}M_5 = 262209281$ である。
- (4) ${}^{193}M_5$ 完全数： $a = 191 \times 266390432827$ ，ここで ${}^{193}M_5 = 1394714501$ である。

これらの pM_n 完全数はどれも $a = p_1^j \times Q$ で p_1, Q は素数で $p_1 < p$ となっている。さらに、その特徴を調べるために、素数 Q は p 進表示でどのような数になるのかを調べてみた。その結果、(1)において $Q = 8363$ は5進表示で6桁、(2)において $Q = 1282261542060234416042729$ は31進表示で17桁、(3)において $Q = 1725060343$ は127進表示で5桁、(4)において $Q = 266390432827$ は193進表示で5桁であることがわかった。(2)から(4)について Q の p 進表示での桁数は pM_n 完全数における n と一致する。しかし、(1)においては一致しない。そこで、(1)を 5M_7 完全数： $a = 3 \times (3 \times 8363)$ と考え、 3×8363 の5進表示での桁数を求めると7桁となり、 n と一致する。よって、 p の倍数でない pM_n 完全数について、私は以下の予想をたてている。

予想 2. p の倍数でない pM_n 完全数 a を $a = p_1 Q$ とし、 p_1 は a の最小素因数で、 $p_1 < p$ であるとする。このとき、合成数 Q を p 進表示で表すと Q の桁数は n である。

9. 双子素数の調査から得られた p の倍数でない pM_n 完全数

4つの p の倍数でない pM_n 完全数はどれも $a = p_1^j \times Q$ で p_1, Q は素数で $p_1 < p$ となっていたが、それ以上の手掛かりがなく、第5番目の p の倍数でない pM_n 完全数を見つけることはとても難しく思えた。 p と n と p_1 はどのような素数なのであろうか。あるとき、 p と n と p_1 が双子素数と関係あるのではないかと思った。

p	n	p_1
5	7	3
31	17	13
127	5	107
193	5	191

その理由は、 $p = 127$ 以外の $p = 5, 31, 193$ は双子素数の片方であり、 $n = 5, 7, 17$ も $p_1 = 3, 13, 107, 191$ も双子素数の片方であったからである。

素数の一覧表から双子素数をピックアップしデータベースを作り、その中から、 p の倍数でない pM_n 完全数を調査した。その結果、双子素数(617, 619)と(191, 193)から、 $p = 619$, $n = 11$, $p_1 = 193$ のとき、 p の倍数でない pM_n 完全数であるものが得られた。つまり、 ${}^{619}M_{11} = 8271964541879648991904246901$ に対して、

$${}^{619}M_{11}\text{完全数} : a = 193 \times 12008946170211161007070400513$$

が、第5番目の p の倍数でない pM_n 完全数なのである。同時に、第6番目の p の倍数でない pM_n 完全数も得られた。それは、

$${}^{619}M_{11}\text{完全数} : a = 263 \times 14376907386872516698605408943$$

である。さらに、

$$Q = 12008946170211161007070400513, \quad Q = 14376907386872516698605408943$$

は619進表示で11桁であり、予想2のとおりとなっている。

現在、 $p = 2731$ まで調査したが、第7番目の p の倍数でない pM_n 完全数は見つからない。

10. おわりに

本研究は、通常の完全数を「素数2を基礎にした完全数」と考えたことからスタートし、完全数を pM_n 完全数へ拡張した研究である。その第1の目的は、「偶数の完全数は、 $2^n \times (\text{メルセンヌ素数})$ という形に限る」というユークリッド・オイラーの定理を、 pM_n 完全数へ拡張することであった。そして、「 pM_n を p メルセンヌ素数、 ${}^pK_{d,n}$ を擬 p メルセンヌ素数とし、 $a = p^{d-1} {}^pK_{d,n}$ とおくと、 a は pM_n 完全数となる」ことを証明した。しかし、その逆が課題として残っている。

一方、「奇数の完全数は存在するのか」という未解決問題に対応する結果として、「 $p \geq 3$ については、 p の倍数でない pM_n 完全数が存在する」ことが得られた。具体的に6つの p の倍数でない pM_n 完全数を得ている。しかし、その構造が全く分かっていないため、 p の倍数でない pM_n 完全数を発見する方法が分からないのである。私は、 p の倍数でない pM_n 完全数の研究は、奇数の完全数の存在問題の研究に繋がるのではないかと考えている。

参考文献

- [I1] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう／高校生の定義した新しい完全数, その衝撃―前編, 現代数学 2017 年 5 月号, 現代数学社, pp. 79-85
- [I2] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう／高校生の定義した新しい完全数, その衝撃―後編, 現代数学 2017 年 6 月号, 現代数学社, pp. 82-87
- [K1] _____, メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 VOL23 No1 (2017), pp. 181-190
- [K2] _____, 素数 p を基礎にした完全数の研究, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 VOL24 No1 (2018), pp. 58-66
- [Ta] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版, (1971)