代数学ミニシンポジウム 2015 in 岐阜

ー代数幾何学及び学生の自由研究に関する会議ー

報告集

高専代数幾何学研究会編

（世話役：松田修，北川真也）

2016 年 2 月

はじめに

本論文集は，2015 年 8 月に岐阜県大垣市で開催した代数学ミニシンポジウム 2015 in 岐阜 －代数幾何学及び学生の自由研究に関する会議－の講演の記録と関連論文をまとめたものです．昨年度に引き続きこの会を大垣市で開催することができました．

さらに，有志のご協力をいただきこのような報告集を出すことができました．記して感謝を申し上げます．

また，本シンポジウの開催にあたり，平成 26- 28 年度日本学術振興会科学研究補助金・基盤研究（C）課題番号 26381244（研究代表者：松田修），教育研究実施経費（松田修），教育研究実施経費（北川真也）の支援を受けました．

2016 年 2 月　松田修，北川真也

代数学ミニシンポジウム2015 in 岐阜
ー代数幾何学及び学生の自由研究に関する会議ー

日時: 2015 年 8 月 10, 11 日(月, 火)
場所: ソフトピアジャパンセンタービル 10F 会議室 4
世話人: 北川真也(岐阜高専), 松田修(津山高専)

プログラム
8 月 10 日(月曜)
10:00－10:50 月岡透(東海大学)
小収縮を持つファノ多様体の具体例
11:10－12:00 前原和寿(東京工芸大学)
Mochizuki Theory and Poincare Segal n-Groupoids
13:30－14:00 松田修(津山高専)
ある系列における真珠曲線の双有理不変量について
14:10－15:00 飯高茂(学習院大学)
一般のメルセンヌ数と一般のウイーフェリヒ素数
15:10－15:50 小林祐志, 赤松昌俊, 松田修(津山高専)
PV ナンバーによる n 次元ファレイ空間の研究
16:00－16:40 岐山高校数学研究部
結び目理論
16:50－17:10 中野日向, 松田修(津山高専)
パスカル三角形から作られるゼータ関数の研究
18:00－ 交流会

8 月 11 日(火曜)
10:00－10:50 長峰孝典(新潟大学)
Closed polynomials in polynomial rings
11:00－11:50 北川真也(岐阜高専)
有理曲面の種数 2 曲線束について

目次

一般の弱完全数と 一般の Wieferich の素数
2015 年 8 月 10 日

飯高 茂

平成 27 年 8 月 22 日

目 次

第1章　はじめに

1.1　完全数

$\sigma(a)$ で 自然数 a の約数の和を表す.

完全数 (perfect number) とは $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たす 自然数 a のことである.

偶数の完全数はオイラーによってその形が決められたが, 完全数は無限にあるか奇数の完全数は存在するかなどは大難問である.

1.1.1　オイラーの結果の証明

a を偶数の完全数とし, $a = 2^e L(L$: 奇数) の形に書く.

$$\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = (2^{e+1} - 1)\sigma(L) = 2^{e+1}L$$

となるので $N = 2^{e+1} - 1$ とおけば $N\sigma(L) = (N + 1)L$ となるので

$$N(\sigma(L) - L) = L.$$

$d = \sigma(L) - L$ とおくとき $Nd = L.$ したがって d は L の約数である. つぎの 3 つの場合がある.

(1) $d = 1.$ $N = L.d = 1 = \sigma(L) - L$ により L は素数 p であり, $p = L = N = 2^{e+1} - 1.$ $p = 2^{e+1} - 1$ は素数で $a = 2^e p.$ これは完全数の形.

(2) $d = L.$ $N = 1 = 2^{e+1} - 1$ になるので $e = 0.$ a が奇数になり仮定に反す.

(3) $1 < d < L.$ d は $1, L$ 以外の約数なので $\sigma(L) > 1 + L + d.$ よって $d = \sigma(L) - L > 1 + d.$ これは矛盾.

$\sigma(a) - 2a = 1$ を満たす自然数は pseudo perfect number (疑似完全数) と呼ばれることがある. これは果たして存在するかどうかが問われている.

1.1.2　素数べきの約数の和

$\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ が素数になるとき, $e+1$ も素数である. ここでは $q = e+1$ が素数になる場合に限って ,$\sigma(2^e)$ の素因数分解をしている.

$\sigma(2^e)$ が素数 q になる場合は

$$q = 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, \cdots$$

となって意外に多い. これらを メルセンヌ素数という. ($e+1$ は素数と限定した効果である)

表 1.1: $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$, $e+1$:素数

$2^e = a$	$\sigma(a)$	素因数分解
$2 = 2$	3	[3]
$2^2 = 4$	7	[7]
$2^4 = 16$	31	[31]
$2^6 = 64$	127	[127]
$2^{10} = 1024$	2047	[23, 89]
$2^{12} = 4096$	8191	[8191]
$2^{16} = 65536$	131071	[131071]
$2^{18} = 262144$	524287	[524287]
$2^{22} = 4194304$	8388607	[47, 178481]
$2^{30} = 1073741824$	2147483647	[2147483647]

$\sigma(2^e)$ が素数のとき $2^e\sigma(2^e)$ は完全数になる. 例えば

$$2 * 3 = 6, 4 * 7 = 28, 16 * 31 = 496, 64 * 127 = 8128, \cdots$$

となり, これらは古代人が発見した 4 つの完全数である.

実際, $a = 2^e$ に対して $\sigma(a)$ が素数 q のとき $\alpha = aq$ とおき $q = \sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ より $q + 1 = 2^{e+1} = 2a$ なので

$$\sigma(\alpha) = \sigma(a)\sigma(q) = q(q+1) = 2aq = 2\alpha.$$

したがって α は完全数になる.

完全数の定義には約数の和が必要である. 素因数分解の一意性と約数の和の公式には, 等比数列の和の公式が不可欠である. ともに, ユークリッドに代表される古代ギリシャの数学者が見いだしたモノである.

日本の高校生なら誰でも知っている等比数列の和の公式は 2500 年も前に発見され完全数の理論に使われた. 日本がようやく弥生式の稲作を始めたころ (BC300 年頃) 等比数列の和の公式 (ユークリッド BC300–) ができていた.

しかし, 完全数 a は必ず $\sigma(2^e)$ が素数 q になる $a = 2^e$ を用いて $a = 2^e q$ と書けるか ?

という問いは依然として解けていない. る.

ここでは完全数 a に対しその素因子の個数が 2 の場合に限って解くことにする.

奇数完全数の非存在問題は a の素因子の個数が 8 未満なら解けているらしい.

ここでは a の相異なる素因子の個数を $s(a)$ とおく.

1.1.3 $s(a)=2$ のときの完全数の証明

ここでは $s(a)=2$ のときだけ扱う. a を素因数分解し $a=p^eq^f$ とする. $X=p^e, Y=q^f$ とおくと $a=XY$ となる. すると $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1$ を使うと

$$\sigma(a)=\frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A=pX-1, B=qY-1, \rho'=\overline{pq}$ とおけば

$$\frac{AB}{\rho'}=2XY.$$

書き直して

$$AB=2\rho' XY.$$

$AB-2\rho' XY$ の XY の係数を R とおくとき $R=pq-2\rho'$ となり

$$RXY=pX+qY-1.$$

この式を基本等式という.

$R=pq-2\rho'=2-(p-2)(q-2)$ であり基本等式から $R>0$ なので $p=2$ かつ $R=2$. したがって $2XY=2X+qY-1$ が成り立ち, $Y\geq q$ によって,

$$\begin{aligned}0=2XY-(2X+qY-1)&=(2X-q)Y-(2X-1)\\&\geq(2X-q)q-(2X-1)\\&=2X(q-1)-(q^2-1)\\&=\overline{q}(2X-q-1)\end{aligned}$$

よって

$$q+1\geq 2X.$$

一方, $(2X-q)Y=(2X-1)$ によれば $2X-q\geq 1$. すなわち $2X\geq q+1$. よって $2X=q+1.q=2^{e+1}-1, a=XY=2^eq$. したがって, 完全数.

第2章　究極の完全数と弱完全数

2.1　フェルマとオイラーの結果;$(P=2)$ の場合

$p>2$ が素数のとき 2^p-1 をメルセンヌ数, もしこれ自身が素数ならメルセンヌ素数という.

2^p-1 がメルセンヌ素数のとき,$2^{p-1}(2^p-1)$ は完全数となる. メルセンヌ数が素数でないとき, 各素因子の持つ著しい特徴をあげる.

補題 1 $p>2$ が素数のとき 2^p-1 の素因数 Q は $Q-1=2Lp$ と書ける *(Fermat).* さらに $Q\equiv\pm1 \bmod 8$. *(Euler)*

$Q=1+2Lp$ なので $2p+1$ が最小になる. そこで $Q=1+2p$ の場合を調べる.

このように $p, 2p+1$ がともに素数になる場合, p を Sophie Germain 素数という.
$p=2,3,5,11,23$ らがその例で, 数多くありそうだが無限にあるかどうかは分かっていない.
次の結果はオイラーが予想し 25 年後ラグランジュが証明した.

補題 2 $p>2$ が奇素数のとき, $M_p=2^p-1$ とおく.
$Q=2p+1$ が素数, かつ $Q\equiv\pm1 \bmod 8$ のとき,*(*$Q=2p+1$ により $Q=1+8k'$ は起きない. *By Mizutani)* $Q=2p+1$ は M_p の約数. とくに M_p はメルセンヌ素数にならない.

逆に $Q=2p+1$ が M_p の因子なら Q は素数.

$Q=2p+1$ が素数, $Q\equiv\pm1 \bmod 8$ のとき, $Q\equiv1 \bmod 8$ の場合はおきない.
$Q\equiv-1 \bmod 8$ の場合は $Q=2p+1=-1+8L$ と書けるので $p=-1+4L$ すなわち, $p\equiv3 \mod 4$. このような Q は $Q\equiv7 \mod 8$ $Q=7,47$ などである.
次の表は $M_p=2^p-1$ の各素因数 Q について $Q-1$ を素因数分解したものである. $[2,p,\cdots]$ の形になっていることを味わうべきである.
次に表の見方を説明する.
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－
P=2 p=3
N_p =7 = [7]
6=[2, 3]
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$P = 2$ なので [2,3] は 2^3 を意味し, $N_p = 2^3 - 1 = 7$.
N_p の各素因子 Q について $Q - 1$ を素因数分解している.
$Q - 1 = 6$ の素因数分解は [2,3] (2*3 をこのように list で表現している.
− −−
P=2 p=5
N_p =31 = [31]
30=$[2, 3, 5]$
− −−
P=2 p=7
N_p =127 = [127]
126=$[2, 3^2, 7]$
− −−
P=2 p=11
N_p =2047 = $[23, 89]$
22=$[2, 11]$ 88=$[2^3, 11]$
− −−
P=2 p=13
N_p =8191 = [8191]
8190=$[2, 3^2, 5, 7, 13]$
− −−
P=2 p=17
N_p =131071 = [131071]
131070=$[2, 3, 5, 17, 257]$
− −−
P=2 p=19
N_p =524287 = [524287]
524286=$[2, 3^3, 7, 19, 73]$
− −−
P=2 p=23
N_p =8388607 = $[47, 178481]$
46=$[2, 23]$ 178480=$[2^4, 5, 23, 97]$

$p = 11, 23$ の場合は N_p は素数にならない.
したがって, 完全数ではない.

しかし, N_p の各素因子のもつ性質は興味あるものである.
これらの性質は, フェルマ, オイラー, ラグランジュという泰西の巨匠数学者たちの見出したものであるが, その後の追加研究がされたことは特に聞いていない.
ここでは $p = 23, Q = 47$ が $Q = 2p + 1$ を満たす.
数の大きい例をあげておく.

$P=2, p=29$ なので [2,29] は 2^{29} を意味している.
$N_p = 2^{29}-1$ の素因数分解が [233,1103,2089].

$Q_1=233, Q_2=1103, Q_3=2089$ について
Q_1-1, Q_2-1, Q_3-1 を素因数分解した結果が

$$Q_1-1=232=[2^3,29], Q_2-1=1102=[2,19,29], Q_3-1=2088=[2^3,3^2,29]$$

どれも $2*29=2*p$ が因子として入っている.
これが定理の主張なので当然だが数値計算の結果が鮮やかで感動してしまう.
一般に P を奇素数とし, $N_p=\frac{P^p-1}{P}$ が素数のとき $a=p^eN_p$ を P を**底とする完全数**という.
一般に P を奇素数とし, $p=e+1$ が素数のとき, $Q=\frac{P^p-1}{P}$ に関して $a=p^eQ$ を P を**底とする弱完全数**という.
以下では, 底が一般の素数 P の場合もこめて $N_p=\frac{P^p-1}{P-1}$ の各素因子 Q の素因数分解を行っている. この数値例から意味のある結果を発見していただければうれしい.

表 2.1: $P=2$:弱メルセンヌ数 (非素数)

p	N_p	素因数分解
11	(2047)	23*89
23	(8388607)	47*178481
29	(536870911)	233*1103*2089
37	(137438953471)	223*616318177
41	(2199023255551)	13367*164511353
43	(8796093022207)	431*9719*2099863
47	(140737488355327)	2351*4513*13264529
53	(9007199254740991)	6361*69431*20394401
59	(576460752303423487)	179951*3203431780337
67	(147573952589676412927)	193707721*761838257287
71	(2361183241434822606847)	228479*48544121*212885833
73	1 (9444732965739290427391)	439*2298041*9361973132609
79	(604462909807314587353087)	2687*202029703*1113491139767
83	(967140655691703339764940 7)	167*57912614113275649087721
97	(158456325028528675187087900671)	11447*13842607235828485645766393
101	(25353012004564588029934064107 51)	7432339208719*341117531003194129

底が 3 のとき $p=5$ の場合 $N_5=2*11^2$. これは反例.
(しかし, これが唯一の反例であることを期待)

表 2.2: $e+1$: prime, $q=2p+1$: prime

e	$(2e+3)$ =factor	$(Q=(3^{e+1}-1)/2)$	fct	$2^e q$
2	(7)=7	(13)	13	117
4	(11)=11	(121)	11^2	9801
10	(23)=23	(88573)	23*3851	5230147077
22	(47)=47	(47071589413)	47*1001523179	1477156353259726319517
28	(59)=59	(34315188682441)	59*28537*20381027	785021449541029367424039801
40	(83)=83	(18236498188585393201)	83*2526913*86950696619	2217132441215188849680459825800
52	(107)=107	A	B	

$$A=(969162283384000994839836 1)107*24169*3747607031112307667$$

$$B=626183687689393767209300240359820400199694144570 01$$

2.2 フェルマとオイラーの結果;$(P=3)$ の場合

3 を底としたメルセンヌ素数についてもフェルマとオイラーの結果は成立する.

補題 3 p が素数のとき $\frac{3^p-1}{2}$ の奇数素因数 Q については $Q-1=2Lp$ と書ける.
さらに $Q\equiv\pm1 \bmod 12$.

次の表は $\frac{3^p-1}{2}$ の各素因数 Q について $Q-1$ を素因数分解したものである. $[2,p,\cdots]$ の形になっていることを味わうべきである.

− −
P=3 p=3
N_p =13 = [13]
12=[2^2, 3]
− −
P=3 p=5
N_p =121 = [11, 11]
10=[2, 5] 10=[2, 5]
− −
P=3 p=7
N_p =1093 = [1093]
1092=[2^2, 3, 7, 13]
− −

P=3 p=11
N_p =88573 = $[23, 3851]$
22=$[2, 11]$ 3850=$[2, 5^2, 7, 11]$
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
P=3 p=13
N_p =797161 = $[797161]$
797160=$[2^3, 3, 5, 7, 13, 73]$
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
P=3 p=17
N_p =64570081 = $[1871, 34511]$
1870=$[2, 5, 11, 17]$ 34510=$[2, 5, 7, 17, 29]$
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
P=3 p=19
N_p =581130733 = $[1597, 363889]$
1596=$[2^2, 3, 7, 19]$ 363888=$[2^4, 3^2, 7, 19^2]$
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
P=3 p=23
N_p =47071589413 = $[47, 1001523179]$
46=$[2, 23]$ 1001523178=$[2, 23, 29, 37, 103, 197]$

2.3 一般の弱完全数でのフェルマとオイラーの結果

フェルマとオイラーの結果が一般化された究極の完全数 $a = P^{p-1}N_p$ でも成立するという著しい結果を紹介する.

1) $P - 1 \not\equiv 0 \bmod Q$ のときと
2) $P - 1 \equiv 0 \bmod Q$ のときで
区別する必要がある.

奇素数 P を底とするとき $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ の素数因子 (奇数) Q について

$$P^p \equiv 1 \bmod Q$$

になる.

1) $P - 1 \not\equiv 0 \bmod Q$ ならば mod$Q$ で P の位数は素数 p である. $P \neq Q$ により, フェルマの小定理によれば $P^{Q-1} \equiv 1 \bmod Q$ なので $Q - 1$ は位数 p で割れる. よって $Q - 1 = kp$ と書ける.

1-a) $p > 2$ を仮定する. Q, p はともに奇数なので k は偶数. したがって, $Q = 1 + 2k'p$ と書ける. オイラーの基準によって

$$P^{\frac{Q-1}{2}} = \left(\frac{P}{Q}\right)$$

$P^{\frac{Q-1}{2}} = P^{pk'} \equiv 1 \mod Q$. ゆえに

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = 1.$$

逆に $Q = 2p + 1$ が素数 (p : Sophie Germain 素数) とする. さらに $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$ を仮定すると, $P \equiv n^2 \mod Q$ を満たす n がある.

$$P^p = P^{\frac{Q-1}{2}} \equiv n^{Q-1} \equiv 1 \mod Q$$

これより, 素因子 Q は $P^p - 1$ の素因子になる. $P - 1 \not\equiv 0 \bmod Q$ なので Q は $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ の素因子.

1-b) $p = 2$ のときは, $Q - 1 = 2k$. $p = 2$ なので $N_2 = P + 1$ となりこの素因数分解から奇数素因子 Q を求める.

2) $P \equiv 1 \bmod Q$ ならば次の場合がおこる.
$P^j \equiv 1 \bmod Q$ によって

$$N_p = 1 + P + \cdots + P^{p-1} \equiv p \bmod Q.$$

Q は N_p の素因子なので $N_p \equiv 0 \bmod Q$. ゆえに $p \equiv 0 \bmod Q$. p, Q は素数なので $p = Q$.
$P \equiv 1 \bmod Q$ によれば $\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{1}{Q}\right) = 1$.
したがって次の結果が証明できた.

定理 1 奇素数 P が底のとき $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ の素因子 *(奇数)* Q について $P - 1 \not\equiv 0 \bmod Q$ ならば,

1. N_p の素因子 *(奇数)* Q について $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$.
2. 一般に $2p + 1$ が素数 Q のとき $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$ を仮定すると, Q は N_p の素数因子.

$P \equiv 1 \bmod Q$ ならば, $p = Q$.

次は Lagrange の結果の一般化.

定理 2 p を素数とし, $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ とおく. $Q = 2p + 1$ は N_p の因子とする.
このとき $Q = 2p + 1$ も素数.

Proof.

$Q = 2p + 1$ は素数でないとする. その最小の素因子をとり Q_0 とする. $2p + 1 \geq Q_0^2$ を満たす. Q_0 も N_p の素因子なので $Q_0 \neq P$.

$$P^p = \overline{P}N_p + 1 \equiv 1 \mod Q_0.$$

p は素数なので Q_0 を法とした P の位数である. フェルマの小定理を用いて

$$P^{Q_0-1} \equiv 1 \mod Q_0.$$

ゆえに, $Q_0 - 1$ は p の倍数. とくに $Q_0 - 1 > p$ になり

$$2p + 1 \geq Q_0^2 > p^2 + 2p + 1 > 2(p + 1) + 1.$$

これで矛盾した.

Lagrange の結果は面白いが役に立たないようだ.

問題 与えられた P について $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$ を満たす Q を決定しさらに $Q = 2p+1$ を満たす Q, p を求め Q が N_p の最小の素因子になることを確認する.

[研究課題] $L = 2$ の場合, すなわち $Q = 4p + 1$ を満たす Q, p を求めよ.

$P = 3$ であれば $p > 3$ の素数が $Q = 1 + 2p$ も素数のとき $p \equiv -1 \mod 6$ になり $Q \equiv -1 \mod 12$.

結局 $\left(\frac{P}{Q}\right) = 1$ を満たす.

このことは以前注意した (By Mizutani).

$P = 3$ 以外でもこんな面白いことがあるだろうか.

表 2.3: $P = 3$;, $p, Q = 2p + 1 \equiv -1 \bmod 8$ も素数

L	p	$Q = 2p + 1$
2	11	23
5	23	47
20	83	167
32	131	263
44	179	359
47	191	383
59	239	479
62	251	503
89	359	719

2.3.1 $P = 5$ の場合

フェルマとオイラーの結果 (一般の場合) を $P = 5$ で使うと

$P-1=4=2^2$ なので $p=Q=2.N_2=P+1=5+1=2*3$. $Q=3,p=2$.

定理 3 *1.* $N_p=\frac{5^p-1}{4}$ の素因子 *(*奇数*)* Q について $\left(\frac{5}{Q}\right)=1$.

2. 素数 Q は $2p+1$ と書けるとき $\left(\frac{5}{Q}\right)=1$ を仮定すると, Q は N_p の素数因子.

$\left(\frac{5}{Q}\right)=1$ の条件は 平方剰余の相互法則から容易にもとまり $Q\equiv\pm1 \mod 5$ がその条件になる.

$Q\equiv 1 \mod 5$ のとき $Q=2p+1$ と素数でかけるとすると $2p+1=1+5L$. これより $2p=5L$. $p=5,L=2,Q=11$. したがって, $(5^5-1)/4=11*71$.

$Q\equiv -1 \mod 5$ のとき $Q=2p+1$ と p が素数のとき.

表 2.4: $P=5,p,Q=2p+1$ も素数

k	p	$Q=2p+1=9+10k$
5	29	59
17	89	179
35	179	359
47	239	479
71	359	719
83	419	839
101	509	1019
131	659	1319
143	719	1439
161	809	1619

2.3.2 $P=5,Q=2p+1$ も素数の数表

$A=(46566128730773925781)=59*35671*22125996444329$
$B=(113686837721616029739379882 81)=2238236249*5079304643216687969$
$C=(27755575615628913510590791702270 50781)=960555749*17154094481*27145365052629449$
$D=(25849394142282114839731521627186339173931628465652465820 31)$
$E=20515111*1431185706701868962383741*880400959451038346273767 81$
$F=(40389678347315804437080502542478654959268169477581977844238281)$
$G=179*9807089*14597959*834019001*8157179360521*231669654363683130095909$
$H=(240741243048404481631997242823115914817262706026923524404992349445819854736328 1)$
$I=2939*6329*129499*308491*304247586761*2084303944451$

表 2.5: $P=5, Q=2p+1$ も素数

p	$Q=2p+1$	(N_p)=素因数分解
2	5	(6)=2*3
5	11	(781)=11*71
23	47	(2980232238769531)=8971*332207361361
29	59	A
41	83	B
53	107	C
83	167	$D=E$
89	179	$F=G$
113	227	$H=I$
131	263	$J=K$

$-*$620216264269531 $*$ 8237123176890810696379

$J=$ 918354961579912115600575419704879435795832466228193

$-$

376178712270530013483949005603790283203 1)

$K=2621*23928199*34720241*16815642611861*-$

25080566643341653267842952512497709031897599900179635412 4089

2.3.3 $P=5$; 素因数分解の表

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

P=5 p=3

N_p =31 = [31]

30=[2, 3, 5]

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

P=5 p=5

N_p =781 = [11, 71]

10=[2, 5] 70=[2, 5, 7]

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

P=5 p=7

N_p =19531 = [19531]

19530=[2, 3^2, 5, 7, 31]

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

P=5 p=11

N_p =12207031 = [12207031]

12207030=$[2,3,5,11,71,521]$

$---------------------------------$

P=5 p=13

N_p =305175781 = $[305175781]$

305175780=$[2^2,3^2,5,7,13,31,601]$

$---------------------------------$

P=5 p=17

N_p =190734863281 = $[409,466344409]$

408=$[2^3,3,17]$ 466344408=$[2^3,3,17,31,36871]$

$---------------------------------$

P=5 p=19

N_p =4768371582031 = $[191,6271,3981071]$

190=$[2,5,19]$ 6270=$[2,3,5,11,19]$ 3981070=$[2,5,19,23,911]$

$---------------------------------$

P=5 p=23

N_p =2980232238769531 = $[8971,332207361361]$

8970=$[2,3,5,13,23]$ 332207361360=$[2^4,3^2,5,7,23,293,9781]$

2.3.4 $P=7$

予稿にはミスプリントが多かったので訂正版をここに載せる.

奇素数 $P=7$ が底のとき,

定理 4 奇素数 $p\neq 7$ について

1. $N_p=\frac{7^p-1}{6}$ の素因子 (奇数) Q について $\left(\frac{7}{Q}\right)=1$.

2. 素数 Q は $2p+1$ と書けるとき $\left(\frac{7}{Q}\right)=1$ を仮定すると, Q は N_p の素数因子.

$P-1=6=2*3$. したがって $Q=3=p$ となり $\frac{7^3-1}{6}=3*19$ を満たす.

2.4 $P=7$; p : Sophie Germain 素数

1) 最初にすること:2, 7 と異なる素数 Q について $\left(\frac{7}{Q}\right)=1$ を解く.

相互法則により

$$\left(\frac{7}{Q}\right)\left(\frac{Q}{7}\right)=(-1)^{\frac{Q-1}{2}*3}=(-1)^{\frac{Q-1}{2}}.$$

$Q \equiv 1 \mod 4$ のとき $(-1)^{\frac{Q-1}{2}} = 1$. この場合,

$$\left(\frac{7}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{7}\right)$$

$\left(\frac{Q}{7}\right)$ の計算は簡単にできる.

$2^2 = 4, 3^2 = 9 \equiv 2 \mod 7$ により $Q \equiv 1, 2, 4 \mod 7$ なら $\left(\frac{Q}{7}\right) = 1$.

$Q \equiv 3, 5, 6 \mod 7$ なら $\left(\frac{Q}{7}\right) = -1$.

組み合わせると $Q \equiv 1 \mod 4$ かつ $Q \equiv 1, 2, 4 \mod 7$ なら $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$

これをもとに計算する. $Q = 1 + 4k$ を用いて方程式 $Q = 1 + 4k \equiv 1, 2, 4 \mod 7$ を書き直す.

$Q = 1+4k \equiv 1 \mod 7$ から $k \equiv 0 \mod 7$. ゆえに $k = 7L$ と書けるから $Q = 1+4k = 1+28L$. $Q \equiv 1 \mod 28$.

$1 + 4k \equiv 2 \mod 7$ から $4k \equiv 1 \equiv 8 \mod 7$. $k \equiv 2 \mod 7$

ゆえに $k = 2 + 7L$ と書けるから $Q = 1 + 4k = 9 + 28L$. $Q \equiv 9 \mod 28$.

$1 + 4k \equiv 4 \mod 7$ から $4k \equiv 3 \equiv 3 + 21 = 24 \mod 7$. $k \equiv 6 \mod 7$

ゆえに $k = 6 + 7L$ と書けるから $Q = 1 + 4k = 1 + 24 + 28L = 25 + 28L$. $Q \equiv -3 \mod 28$.

次に $Q \equiv 3 \mod 4$ かつ $Q \equiv 3, 5, 6 \mod 7$ なら $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ の方の計算.

$Q = 3 + 4k$ を用いて方程式 $Q = 3 + 4k \equiv 3, 5, 6 \mod 7$ を書き直す.

$Q = 3+4k \equiv 3 \mod 7$ から $k \equiv 0 \mod 7$. ゆえに $k = 7L$ と書けるから $Q = 3+4k = 3+28L$. よって, $Q \equiv 3 \mod 28$.

$Q = 3 + 4k \equiv 5 \mod 7$ から $4k \equiv 2 \equiv 2 + 14 = 16 \mod 7$. $k \equiv 4 \mod 7$. ゆえに $k = 4 + 7L$ と書けるから $Q = 3 + 4k = 3 + 4(4 + 7L) = 19 + 28L$. $Q \equiv -9 \mod 28$.

$Q = 3 + 4k \equiv 6 \mod 7$ から $4k \equiv 3 \equiv 3 + 21 = 24 \mod 7$. $k \equiv 6 \mod 7$. ゆえに $k = 6 + 7L$ と書けるから $Q = 3 + 4k = 3 + 4(6 + 7L) = 27 + 28L$. $Q \equiv -1 \mod 28$.

以上により, $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ のとき $Q = \pm 1, \pm 3, \pm 9 \mod 28$.

2) $Q = 2p + 1$ を仮定するとき, $\left(\frac{7}{Q}\right) = 1$ の場合に限って p を求める.

2a)

$2p + 1 = \pm 1 + 28k$ と書けるとき $p = (\pm 1 - 1)/2 + 14k$ により $(\pm 1 - 1)/2$ は奇数. $\pm 1 = -1$ なので $p = -1 + 14k, Q = -1 + 28k$. 例は $p = 13 + 28 = 41$,

2b)

$Q = 2p+1 = \pm 3+28k$ と書けるので $p = (\pm 3-1)/2+14k$ により $(\pm 3-1)/2$ は奇数. $\pm 3 = 3$ なので $p = 1 + 14k, Q = 3 + 28k$. 例は $p = 29, 43$,

2c)

$Q = 2p + 1 = \pm 9 + 28k$ と書けるので $p = (\pm 9 - 1)/2 + 14k$ により $(\pm 9 - 1)/2$ は奇数. $\pm 9 = -9$ なので $p = -5 + 14k \equiv 9 \mod 14; Q = 19 + 28k$. 例は $p = 23, 37, 79$

以上より $Q < 200$ とすると $Q = 47, 59, 83, 167$.

$P = 7$ の仮定の下で $P - 1 = 6 = 2 * 3$ により $p = Q = 3$.

$p, Q = 2p + 1$ も素数のときの数表.

表 2.6: $P = 7, p, Q = 2p + 1 = 27 + 28k$ も素数

k	p	$Q = 2p + 1$
2	41	83
5	83	167
17	251	503
20	293	587
29	419	839
74	1049	2099

表 2.7: $P = 7, p, Q = 2p + 1 = 3 + 28k$ も素数

k	p	$Q = 2p + 1$
2	29	59
8	113	227
17	239	479
20	281	563
35	491	983
47	659	1319
53	743	1487
65	911	1823
68	953	1907
92	1289	2579

表 2.8: $P = 7, p, Q = 2p + 1 = 19 + 28k$ も素数

k	p	$Q = 2p + 1$
1	23	47
13	191	383
16	233	467
25	359	719
31	443	887
46	653	1307
73	1031	2063
100	1409	2819

$A = (74279400543938659833650076624280 01) = 83 * 20515909 * 436213933622906865609 4783$
$B = (10281225160467706104845935946923162113219 6401)$

表 2.9: $P = 7, Q = 2p + 1$ も素数

p	$Q = 2p + 1$	(N_p)=素因数分解
2	5	(8)=2^3
3	7	(57)=3*19
11	23	(329554457)=1123*293459
23	47	(4561457890013486057)=47*3083*31479823396757
29	59	(536650959302196621139601)=59*127540261*71316922984999
41	83	A
53	107	$B = C$
83	167	$D = E$

$C = 8269 * 319591 * 890427601703518805637205183984121 9$
$D = (2317320324970087447233098679232119852283366872016190787490668645944057)$
$E = 167{*}66733{*}76066181{*}7685542369{*}62911130477521{*}303567967057423{*}18624275418445601$

$Q = 2p + 1$ が N_p の最小素因子となるのは
$Q = 47, 59, 83, 167.$
それ対応した p は次のとおり:
$p = 23, 29, p = 83 = 13 + 5 * 14, 167 = 13 + 11 * 14.$

2.4.1 $P = 7$ の素因数分解

−−−

P=7 p=3
N_p =57 = $[3, 19]$
2=[2] 18=$[2, 3^2]$

−−−

P=7 p=5
N_p =2801 = $[2801]$
2800=$[2^4, 5^2, 7]$

−−−

P=7 p=7
N_p =137257 = $[29, 4733]$
28=$[2^2, 7]$ 4732=$[2^2, 7, 13^2]$

−−−

P=7 p=11

−−−

P=7 p=11

N_p =329554457 = $[1123, 293459]$
1122=$[2, 3, 11, 17]$ 293458=$[2, 11, 13339]$
−−
P=7 p=13
N_p =16148168401 = $[16148168401]$
16148168400=$[2^4, 3, 5^2, 7, 13, 19, 43, 181]$
−−

P=7 p=17
N_p =38771752331201 = $[14009, 2767631689]$
14008=$[2^3, 17, 103]$ 2767631688=$[2^3, 3^2, 17, 71, 31847]$
−−
P=7 p=19
N_p =1899815864228857 = $[419, 4534166740403]$
418=$[2, 11, 19]$ 4534166740402=$[2, 13, 19, 15913, 576791]$
−−
P=7 p=23
N_p =4561457890013486057 = $[47, 3083, 31479823396757]$
46=$[2, 23]$ 3082=$[2, 23, 67]$ 31479823396756=$[2^2, 7^2, 23, 1811, 3855937]$

2.4.2 $P \equiv 1 \bmod Q$ の例

表 2.10: $P-1$ の素因数分解

P	$P-1$ の素因数分解
3	$[2]$
5	$[2^2]$
7	$[2, 3]$
11	$[2, 5]$
13	$[2^2, 3]$
17	$[2^4]$
19	$[2, 3^2]$
23	$[2, 11]$
29	$[2^2, 7]$
31	$[2, 3, 5]$
37	$[2^2, 3^2]$

2.4.3 $P = 31$ の弱完全数

$P-1$ が 2 個以上の奇数素因子を含む場合を計算した.

表 2.11: $P-1$ の素因数分解

P	$P-1$ の素因数分解
41	$[2^3, 5]$
43	$[2, 3, 7]$
47	$[2, 23]$
53	$[2^2, 13]$
59	$[2, 29]$
61	$[2^2, 3, 5]$
67	$[2, 3, 11]$
71	$[2, 5, 7]$
73	$[2^3, 3^2]$
79	$[2, 3, 13]$
83	$[2, 41]$
89	$[2^3, 11]$
97	$[2^5, 3]$
101	$[2^2, 5^2]$

表 2.12: $P = 31$

p	(N_p)	分解
3	(993)	3*331
5	(954305)	5*11*17351
7	(917087137)	917087137
11	(846949229880161)	23*397*617*150332843
13	(813918209914834753)	42407*2426789*7908811
17	(751670559138758105956097)	751670559138758105956097
19	(722355407332346539823809249)	571*14251*88770666332610762169
23	(667110388134976008804624141476513)	1509997*61562537*7176374761323733117

$P-1 = 30 = 2*3*5$ なので $Q = 3, 5$ に注目.
$p = 3$ での素因数分解 $3*331$ で $Q = 3$.
$p = 5$ での素因数分解 $5*11*17351$ で $Q = 5$.

2.4.4 $P = 43$ の弱完全数

$P-1 = 46 = 2*3*7$ なので $Q = 3, 7$ に注目.
$p = 3$ での素因数分解 $3*631$ で $Q = 3$.

表 2.13: $P = 43$

p	(N_p)	分解
3	(1893)	3*631
5	(3500201)	3500201
7	(6471871693)	7*5839*158341
11	(22126041415981493)	6038099*3664405207
13	(40911050578149780601)	40911050578149780601
17	(139866740627629048068560801)	647*56770350869*3807926835707
19	(2586136034204861098787689210 93)	229*2699*4219*46399*2137444528747943

$p = 7$ での素因数分解 $7 * 5839 * 158341$ で $Q = 7$.
これで結果は正しいが,6/26 に配布資料が $P = 43$ と書くべきところを $P = 47$ と誤記.
そこで $P = 47$ の弱完全数も今回は載せた. これは面白い.

2.4.5 $P = 47$ の弱完全数

表 2.14: $P = 47$

p	(N_p)	分解			
2	(5)	5	(48)	$2^4 * 3$	2256
3	(7)	7	(2257)	$37 * 61$	4985713
5	(11)	11	(4985761)	$11 * 31 * 14621$	24328923222241
7	(15)	$3 * 5$	(11013546097)	$43 * 256128979$	118717384915430520913
23	(47)	47	P	Q	R

$P = (624443142787099110314358719090 4393457)$
$Q = 23 * 6630274723 * 409480798225872502360103 33$
$R = 381632871795662863647395849602843186459035609325206057716193555255614197713$
ただし $p = 11, 13, 17, 19$ は省略
$P - 1 = 47 - 46 = 2 * 23$, $p = Q = 23$ があることを確認できた.

2.4.6 $P = 11$

$P = 11, P - 1 = 10 = 2 * 5$. $Q = p = 5$ がある.
このとき $N_5 = \frac{5^5-1}{4} = (16105) = 5 * 3221$.
$N_p = \frac{P^p-1}{P} = \frac{11^p-1}{10}$.

表 2.15: $P = 11$

e	p	$(2p+1)$	$(N_p) =$ 分解	a
1	2	(5)=5	(12)=2^2*3	132
2	3	(7)=7	(133)=7*19	16093
4	5	(11)=11	(16105)=5*3221	235793305
6	7	(15)=3*5	(1948717)=43*45319	3452271037237
10	11	(23)=23	(28531167061)=15797*1806113	740024994423222267661
12	13	(27)=3^3	(3452271214393)=1093*3158528101	10834705943388058361345353
16	17	(35)=5*7	(50544702849929377)=50544702849929377	$A0$
18	19	(39)=3*13	(6115909044841454629)=6115909044841454629	A
22	23	(47)=47	B	C
28	29	(59)=59	D	E
30	31	(63)=$3^2 * 7$	F	G
36	37	(75)=$3 * 5^2$	H	I
40	41	(83)=83	J	K
42	43	(87)=3*29	L	M
46	47	(95)=5*19	N	O

$A0 = 232251544198878080950520379327369 7$
$A = 340039485861577398986846964992269755 49$
$B = (895430243255237372246 53) = 829 * 28878847 * 3740221981231$
$C = 728904836851030521429027853850124525396790261 3$
$D = (158630929717149157441443670489) = 523 * 303309617049998388989376043$
$E = 228761562390246506066453264733348483256258951604954126056 09$
$F = (191943424957750480504146841291 81) = 50159 * 2428541 * 157571957584602258799$
$G = 334929803495559909531894224896304907162715367932636041603766981$
$H = (340039485861577398992406882305761986 97) = 2591*36855109*136151713*2615418118891695851$
$I = 10511531995000535984031884072175901907045798792322646350775223148922564706 17$
$J = (49785181124993546986478291638386612512424 1)$
$= 83 * 1231 * 27061 * 509221 * 14092193 * 29866451 * 840139875599$
$K = 225324023604401248793730853803334956796672939988861482205529251845184623522089398641$
$L = (60240069161242191853638732882447801140033173)$

$= 1416258521793067 * 42534656091583268045915654719$
$M = 32989690295920386835890134305346271024600891$
$--7154131181088597399777879769969019604950113 3$
$N = (881974852589746930929124688131918256491225687357)$
$= 2069 * 22666879066355177 * 188063270418246905957471138 89$
$O = 70716330963700529872285398286337389743561706314564099 43$
$--1850055646826732718108113320818748383107 7$

2.4.7 末尾の数

表を観察してもきれいな結果が見えてこない.
$e \equiv 0 \mod 4$ のとき $q \equiv 1, 3, 5, 7, 9 \mod 10$
$e \equiv 2 \mod 4$ のとき $q \equiv 1, 3, 7, 9 \mod 10$

$P = 11$ がこれほど期待を裏切る素数とは思わなかった. しかしこのように末尾の数の 1,2 桁の数の性質は 10 進展開で得られた性質なので, 皮相的な結果にすぎない, ということもできる.

この困難さは弱弱完全数によって解決される. これはささやかな結果ではあるが, まったく予想外の良い結果なのである.

[研究課題] 2, 11 と異なる素数 Q について $\left(\frac{11}{Q}\right) = 1$ を解く.
嘉数さんの解がある.

2.4.8 $P = 13$

$N_p = \frac{P^p - 1}{P}$

表 2.16: $P = 13$

p	$(2p+1)$	$(N_p) =$ 分解	a
2	(5)=5	(14)=2*7	182
3	(7)=7	(183)=3*61	30927
5	(11)=11	(30941)=30941	883705901
7	(15)=3*5	(5229043)=5229043	25239591813787
11	(23)=23	(149346699503)=23*419*859*18041	20588710756109377851047
13	(27)=3^3	(25239592216021)=53*264031*1803647	588034167905566113995468101
17	(35)=5*7	(720867993281778161)=103*443*15798461357509	A
19	(39)=3*13	(121826690864620509223)=12865927*9468940004449	B

$A = 479677535758244089774221240729252401$

$B = 13700070098791209449615908553795581328767$

2.4.9 末尾の数

表を観察すると,

- $e \equiv 0 \mod 4$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \mod 10$.
- $e \equiv 2 \mod 4$ なら $q \equiv 3, q \equiv 7 \mod 10$.

$13^4 \equiv 1 \mod 10$. この性質を使って証明できるだろう.

2.4.10 $P = 17$ の弱完全数

表 2.17: $P = 17$

p	$(2p+1)$	(N_p) = 分解	a
2	(5)=5	(18)=$2 * 3^2$	306
3	(7)=7	(307)=307	88723
5	(11)=11	(88741)=88741	7411737061
7	(15)=3*5	(25646167)=25646167	619036125548023
11	(23)=23	(2141993519227)=2141993519227	43182458695629198054329 23

2.4.11 末尾の数

- $p \equiv 1 \mod 4$ なら $q \equiv 1, a \equiv 1 \mod 10$.
- $e \equiv 3 \mod 4$ なら $q \equiv 7, a \equiv 3 \mod 10$.

2.4.12 $P = 19$ の弱完全数

表 2.18: $P = 19$

p	$(2p+1)=$	$(N_p) =$ 分解	a
2	(5)=5	(20)=2^2*5	380
3	(7)=7	(381)=3*127	137541
5	(11)=11	(137561)=151*911	17927087081
7	(15)=3*5	(49659541)=701*70841	2336276856400621
11	(23)=23	(6471681049901)=104281*62060021	396783053162981708115277 01
13	(27)=3^3	A	B
17	(35)=5*7	C	D
19	(39)=3*13	E	F

A=(2336276859014281)=599*29251*133338869

B= 5170916427125338184627482845241

C=(304465936543600121441)=3044803*99995282631947

D= 878205851198256655553811862328 73824348321

E=(109912203092239643840221)=109912203092239643840221

F= 1144486647340080056084491411806030788772819786 1

2.4.13 $P = 23$ の弱完全数

表 2.19: $P = 23$

p	$(2p+1)$=	(N_p) = 分解	a
2	(5)=5	(24)=2^3*3	552
3	(7)=7	(553)=7*79	292537
5	(11)=11	(292561)=292561	81870562801
7	(15)=3*5	(154764793)=29*5336717	22910743717655977
11	(23)=23	A	B
13	(27)=3^3	C	D
17	(35)=5*7	E	F
19	(39)=3*13	G	H

A=(43309534450633)=11*3937230404603
B= 17941629145770656573062898 17
C=(22910743724384881)=47691619*480393499
D= 5020803441781611565572358171668 01
E=(6411365434575589496641)=103*62246266355102810647
F= 3931840644281539245080643519965766304764000 1

G=(33916123148904868437231 13)=2129*63877469*24939218613613
H= 1100290217736390223882620149232923757087347272869 7
以上から次の推察が可能:
N_p は $p = 2$, $P \equiv -1 \mod 4$(P=3,7,11,19,23, $\cdots$) のとき $p^2 = 4$ で割れる.
$p > 2$ は奇数.

第3章　Wieferich の素数とその一般化

3.1　Wieferich の素数の定義

奇素数 p に対して $2^{p-1}-1$ は p の倍数になるという主張がフェルマの小定理である.

$2^{p-1}-1$ が p^2 の倍数になる場合の素数 p を Wieferich の素数 [1] という.

Wieferich は (フェルマの大定理) $x^p+y^p=z^p$ ($p>2$: 素数) を満たす 0 でない整数 x,y,z が どれも p で割れないとき, (フェルマの大定理の場合 (1); 易しい場合) p は Wieferich の素数になることを示して数学の世界を驚かせた.

Wieferich の素数は希少価値のある素数とされている.
実例は 2 つだけで 1093,3511.(3 番目の Wieferich の素数はあるとすると 3×10^{17} より大きい)
Wieferich の素数の条件を満たさない素数 p を非 Wieferich 素数という.

[1] Arthur Wieferich in 1909

3.1.1 abc 予想

自然数 n を素因数分解して

$$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_s}^{e_s}, e_j > 0$$

とおくとき 素因子の積 $p_1p_2\cdots p_s$ を n の根基 (radical) といい rad(n) と書く.

rad(n) は環論で考えるとイデアル (n) の根基の生成元である.

abc 予想とは 自然数 a, b, c は $a + b = c$ を満たし $a < b, (a, c, b)$ は互いに素なとき任意の実数 $\varepsilon > 0$ についてある定数 K_ε が存在しすべての a, b, c(上記の条件を満たす) について $R =$ rad (abc) とおくと

$$c < K_\varepsilon R^{1+\varepsilon}$$

が成り立つ.

abc-予想が解けると 非 Wieferich 素数は無限にあることが分かる (Silverman 1988). 望月新一さんによって abc-予想が示された現在, 非 Wieferich 素数は無限にあることが分かった.

Wieferich 素数は 2 個しか見つからない現在, 非 Wieferich 素数は無限にあることは肯定しやすい結果と言ってよい. このようなごく理解しやすい結果でも,abc-予想を使わないと示すことができない. これは数学の奥深さを示唆している.

ここでは $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ が p^2 の倍数になる場合の素数 p を 強い意味での Wieferich の素数という.

計算機での実行例:

```
 ?- wieferich_loop3(2,1=<20000).
wieferich = 1093
wieferich = 3511
```

これは Wieferich の素数 は 1093,3511. を意味する

```
 ?- wieferich_loop2(2,1=<20000).
wieferich2 = 3511
```

強い意味での Wieferich の素数は 3511.

3.1.2 Wieferich の素数と完全数の関係

完全数については「p:素数のときメルセンヌ数 2^p-1 には平方因子があるか.」という問題があり, たぶん無いと想像されている.

素数 $p>2$ に対して 2^p-1 が素数の平方 Q^2 で割れるとき

$$2^p-1\equiv 0 \mod Q^2$$

Fermat によれば $2^{Q-1}-1\equiv 0 \mod Q$ なので $Q-1=pk$. Q,p は奇数なので k は偶数. $k=2k'$ と書けることより $2^{\frac{Q-1}{2}}-1=2^{pk'}-1\equiv 0 \mod Q^2$. それゆえ Q は強い意味での Wieferich の素数になる.

ここに希少価値の高い強い意味での Wieferich の素数が出てきたことに感動を覚える.

強い意味での Wieferich の素数は $Q=3511$ ただ 1 つ, しか発見されていない.

$Q=3511$ に対して $Q-1=2pk'$ によって p が定まる.

$3511-1=3510$ の素因数分解は $2*3^3*5*13$.

よって $p=5$ または 13.

$p=5$ のとき $2^p-1=31$

$p=13$ のとき $2^p-1=8191$ 素数なので平方因子を持たない.

残りの Wieferich の素数 1093 でも計算してみよう.

$1093-1=1092$ の素因数分解は $2^2*3*7*13$.

$p=3$ のとき $2^p-1=7$. 素数なので平方因子を持たない.

$p=7$, のとき $2^p-1=127$.

素数なので平方因子を持たない.

しかし, 10^{17} より大きな Wieferich の素数が発見されてここから平方因子があるメルセンヌ数がみつかる可能性が残る.

しかし, 多分平方因子があるメルセンヌ数は無いと思われる.

3.1.3 P を底とする弱完全数

ここで, 古典的な完全数の研究をあきらめて究極の完全数の場合, すなわち, 奇素数 P を底とする弱完全数に戻る.

そこで $P=3$ の数表を見ると 2 番目のところに早くも,$p=5$ に関して平方数 $N_p=121=11^2$ が出ている.

平方因子がある一般のメルセンヌ数がかくも簡単に見つかったのだ.

ついでながら, 第 3 番目の数 $\frac{3^7-1}{2}=1093$ は Wieferich の素数である. 何という偶然であろうか.

これはうれしい結果である. 次に底をいろいろ変えて N_p が平方因子を持つ場合を探してみよう.

表 3.1: $p = e + 1, N_p = (3^p - 1)/2$:素数

e	3^e=素因数分解	N_p	N_p の素因数分解
2	$3^2 = 9$	13	[13]
4	$3^4 = 81$	121	$[11^2]$
6	$3^6 = 729$	1093	[1093]

3.2 奇素数 P を底とする Wieferich 素数

奇素数 P に対して P と相異なる素数 Q は $P^{Q-1} - 1$ が Q^2 の倍数になる場合素数 Q を P を底とする **Wieferich 素数**という.

より簡単に一般の Wieferich 素数ともいう.

奇素数 Q は $P^{\frac{Q-1}{2}} - 1$ が Q^2 の倍数になる場合 P を底とする 強い意味の **Wieferich 素数**という.

3.2.1 $Q = 2$ の場合

底 が奇素数 P なので $Q = 2$ となることもある.

$P - 1$ が 4 の倍数になる場合すなわち $P \equiv 1 \mod 4$ のとき 2 が P を底とする **Wieferich の素数**になる.

しかしこのとき 奇素数 p について N_p は 4 を平方因子に持たない. これを以下で証明する.

p : 奇素数のとき, 各 k について $P^k \equiv 1 \mod 4$ によって

$$N_p = (P^p - 1)/\overline{P} = 1 + P + \cdots + P^{p-1} \equiv p \mod 4.$$

ゆえに N_p が 4 を平方因子に持つとすると $N_p \equiv 0, N_p \equiv p \mod 4$ によれば $p = 2$. 矛盾. これは N_p は 4 を平方因子に持たないことを意味する.

$p = 2$ なら $N_2 = P + 1$.

$P \equiv 1 \mod 4$ のとき, $N_2 = P + 1 = 2 + 4L$. よって N_2 は 4 を平方因子に持たない.

$P \equiv 3 \mod 4$ のとき, N_2 が 4 を平方因子に持つとき $N_2 = P + 1 = 4k$ と書けるので $P = 4k - 1$ が素数になる場合を拾い上げる.

例は次の通り.

表 3.2: $p=2, Q=2, P=3+4k$

$P=3+4k$	$N_2=P+1$ の素因数分解
3	$[2^2]$
7	$[2^3]$
11	$[2^2, 3]$
19	$[2^2, 5]$
23	$[2^3, 3]$
31	$[2^5]$
43	$[2^2, 11]$
47	$[2^4, 3]$
59	$[2^2, 3, 5]$
67	$[2^2, 17]$
71	$[2^3, 3^2]$
79	$[2^4, 5]$
83	$[2^2, 3, 7]$
103	$[2^3, 13]$
107	$[2^2, 3^3]$
127	$[2^7]$
131	$[2^2, 3, 11]$
139	$[2^2, 5, 7]$
151	$[2^3, 19]$
163	$[2^2, 41]$
167	$[2^3, 3, 7]$
179	$[2^2, 3^2, 5]$
191	$[2^6, 3]$
199	$[2^3, 5^2]$

これらの N_2 は平方因子を持つ. 平方因子を持つことは決して例外的な現象ではない.

3.2.2 一般の弱完全数と 一般の Wieferich の素数

奇素数 P を底にする弱完全数において $p=e+1$ が素数のとき, $N_p=\frac{P^p-1}{P}$ が素数の平方 Q^2 を因子として持つとする. このとき

$$P^p \equiv 1 \mod Q^2.$$

1) $P \equiv 1 \mod Q$ でないなら, Q を法として, P の位数は p. 一方, $P \neq Q$ なのでフェルマの小定理により

$$P^{Q-1} \equiv 1 \mod Q.$$

$Q \geq 3, p \geq 3$ のとき $Q-1 = 2pL$ と整数 L を用いて書ける. よって

$$P^{\frac{Q-1}{2}} = P^{pL} \equiv 1 \mod Q^2.$$

したがって, 素数 Q は底が P の 強い意味での Wieferich の素数になる.

$p \geq 3$ を仮定しているので, $Q = 1 + 2pL \geq 7$. $Q - 1 = 2pL \geq 2p$ により $Q-1$ の奇数素因子 p について $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ の素因数分解を行い, Q^2 が因数になるものを探索すればよい.

これは簡単にはできない. 後で組織的に行う.

2) p が偶数なら $p = 2$. $Q = 1 + 2k$.

たとえば $k = 1, 2, 3, 5, 6$ に応じて $Q = 3, 5, 7, 11, 13$

$N_2 = 1 + P$ なのでこれが Q^2 で割れる場合を以下, 列挙する. 平方因子を含む場合がこのように簡単に得られる.

3.2.3 N_2 が平方因子を含む例

表 3.3: $P = -1 + 9N$

P	$N_2 = P + 1$ の素因数分解
17	$[2, 3^2]$
53	$[2, 3^3]$
71	$[2^3, 3^2]$
89	$[2, 3^2, 5]$
107	$[2^2, 3^3]$
179	$[2^2, 3^2, 5]$
197	$[2, 3^2, 11]$

表 3.4: $P = -1 + 5^2N$

P	$N_2 = P + 1$ の素因数分解
149	$[2, 3, 5^2]$
199	$[2^3, 5^2]$
349	$[2, 5^2, 7]$
449	$[2, 3^2, 5^2]$
499	$[2^2, 5^3]$
599	$[2^3, 3, 5^2]$

表 3.5: $P = -1 + 7^2N$

P	$N_2 = P + 1$ の素因数分解
97	$[2, 7^2]$
293	$[2, 3, 7^2]$
587	$[2^2, 3, 7^2]$
881	$[2, 3^2, 7^2]$

表 3.6: $P = -1 + 11^2N$

P	$N_2 = P + 1$ の素因数分解
241	$[2, 11^2]$
967	$[2^3, 11^2]$

表 3.7: $P = -1 + 13^2N$

P	$N_2 = P + 1$ の素因数分解
337	$[2, 13^2]$
1013	$[2, 3, 13^2]$

3.2.4 $Q > 2$ の場合

3) $P \equiv 1 \mod Q$ なら, 各 j につき $P^j \equiv 1 \mod Q$ により

$$N_p = 1 + P + \cdots + P^{p-1} \equiv p \mod Q.$$

$N_p \equiv 0 \mod Q^2$ によると $p \equiv 0 \mod Q$ が成り立つので $p = Q$.
$P = 1 + Qk$ とおくと

$$P^j = 1 + Qkj + \cdots \equiv 1 + Qkj \mod Q^2.$$

$$N_p = 1 + P + \cdots + P^{p-1} \equiv p + \frac{p(p-1)}{2} \times Qk \equiv p = Q \mod Q^2.$$

このとき $N_p \equiv 0 \mod Q^2$ に矛盾. よってこの場合は起きない.

4) $P \not\equiv 1 \mod Q$ なら, $N_p \equiv 0 \mod Q$ によると Q を法として P の位数は p. フェルマ により $P^{Q-1} \equiv 1 \mod Q$. よって $Q - 1 = pk$. $p > 2$ のときは $k = 2L$.
$\frac{Q-1}{2} = pL$ なので

$$P^{\frac{Q-1}{2}} = P^{pL} \equiv 1 \mod Q^2.$$

よって Q は底が P の強い意味での Wieferich の素数になる. これはすでに示した.

3.2.5 (強い意味で)Wieferich の素数の計算

底が P の (強い意味で)Wieferich の素数も希少価値がありそうなのでこれらをコンピュータで探してみよう.

P, Q が 20 を越えると $P^{\frac{Q-1}{2}}-1$ の計算は大変で, うっかりコンピュータを信じて, $P^{\frac{Q-1}{2}}-1$ の素因数分解を実行すると誤差が累積して誤った結果が出るかもしれない.

ここでは, $P^{\frac{Q-1}{2}}-1$ が Q^2 の整数倍かどうかが問題なので累乗の計算を 2 つの積の計算に置き換え, かつ積の計算を Q^2 を法として行う.

表 3.8: 強い意味の Wieferich 素数 $P=3,\cdots,199$ の例, $Q<5000$

P	Q
3	11
19	3
19	137
23	13
31	79
31	6451
37	3
53	47
53	59
53	97
59	2777

表 3.9: 強い意味の Wieferich 素数 $P = 3, \cdots, 199$ の例, $Q < 5000$

P	Q
67	7
71	47
71	331
73	3
79	7
83	4871
101	5
109	3
127	3
137	59
149	5
151	5
163	3
173	3079
179	17
181	3
181	101
191	13
197	7
197	653
199	3
199	5

この表にある P に対して $prime = Q$ で与えられる Q に関して, 奇素数 p なら, $Q - 1 = 2pL$ 満たす. $Q - 1$ の素因子 p について $N_p = \frac{P^p - 1}{P}$ の因数分解を行い, Q^2 が因数になるものを探索する.

3.2.6 プログラム

次のプログラムで実行した結果を以下に書く.

```
wief(P,Q,P0,PP):- Q2 is  Q*Q,
power(PP=P^P0 mod Q2),
write(PP=P^P0),put(9),
write(mod=Q2),put(9),
(   PP=1 -> write(PP=ok); write(no)),
nl.
wief2(P,Q):- P0 is (Q-1)//2,
P0 >=2,
for(2=<P0,PW),
factorize(PW,PW0),
PW0=[PP],
write(prime=PP),put(9),
wief(P,Q,PP,KK),
fail.
wief2(P,Q):-!.
```

実行例

```
8 ?- wief2(23,13).
prime=2 22=23^2 (mod)=169       no
prime=3 168=23^3        (mod)=169       no
prime=5 147=23^5        (mod)=169       no

9 ?- wief2(53,47).
prime=2 600=53^2        (mod)=2209      no
prime=3 874=53^3        (mod)=2209      no
prime=5 867=53^5        (mod)=2209      no
prime=7 1085=53^7       (mod)=2209      no
prime=11        202=53^11       (mod)=2209      no
prime=13        1914=53^13      (mod)=2209      no
prime=17        2093=53^17      (mod)=2209      no
prime=19        1088=53^19      (mod)=2209      no
prime=23        1=53^23 (mod)=2209      1=ok
```

$P = 53, Q = 47, p = 23$ が見つけられた. さらに計算を続けて次の結果をえた.

表 3.10: Q^2 が N_p の因数

P	Q	p
3	11	5
53	47	23
71	47	23
79	7	3
101	5	2
137	59	29
149	5	2
151	5	2
197	7	3
199	5	2

3.3 平方因子をもつ弱完全数の例

以上のデータを基にして平方因子をもつ弱完全数の例をあげる.

3.3.1 $P = 53$

表 3.11: $P = 53$

p	$(2p+1)=$	$N_p =$ 分解	a
2	(5)=5	(54)=2*3^3	2862
3	(7)=7	(2863)=7*409	8042167
5	(11)=11	(8042221)=11*131*5581	63456991998301
7	(15)=3*5	(22590598843)=29*778986167	500706190876621573747
11	(23)=23	(178250690949465223)=178250690949465223	311738124310568242387515485781949 27
13	(27)=3^3	A	B
17	(35)=5*7	C	D
19	(39)=3*13	E	F
23	(47)=47	G	H

$A = (5007061908770478114 61) = 13 * 3297113 * 11681692691969$

$B = 24597637468481768160273653860668729814050 1$

$C = (39508126856977190924247544 81) = 647 * 4013 * 12479 * 121936356626073149$

$D = 153144129363856840298269545521743533506967830282106204 01$

$E = (11097832834124892930621135337183) = 229 * 32688470798197 * 1482545708952391$

$F = 12083808430070544850935301818238321954809558059142938593318608 7$

$G = (875672391188386192961003865764712067 63) = 47^2 * 4969 * 21529 * 16055056483 * 23080289344401529$

$H = 752334171846386320152577501685552265953592059779483528661393037833264739606 7$

$p = 2$ において $N_2 = 54 + 1 = 2 * 3^3$ ここに平方因子 3^2,
G に 47^2 という平方因子があり, $47 = 2p + 1$.
$p = 29$ まですると 59^2 という平方因子がありえるが wxmaxima の能力を超えた.

3.3.2 $P = 71$

表 3.12: $P = 71$

2	(5)=5	(72)=$2^3 * 3^2$	5112
3	(7)=7	(5113)=5113	25774633
5	(11)=11	(25774705)=5*11*211*2221	654978581329105
7	(15)=3*5	(129930287977)=7*883*21020917	16644106779790992717817
11	(23)=23	(3301747030310022361)=23*143554218709131407	10747990727482727047368690334263535561
13	(27)=3^3	A	B
17	(35)=5*7	C	D
19	(39)=3*13	E	F
23	(47)=47	G	H

$A = (16644106779792822721873) = 3202878953 * 5196608121641$

$B = 27312451175774899273898654531941447400995339 3$

$C = (42295473201803245709778876153 7) = 239 * 3652120847 * 484563667343825089$

$D = 17637111793734078180699022458617462600579284312004106099897 7$

$E = (21321148041029016162299531469080 89) = 1900857799450121 * 1121659287043817009$

$F = 44818865866370819355698391573023779564748172141839760217379732555 29$

$G = (54180621257240427046019992014174494350633) = 47^2 * 242329 * 10121453273837111836563693857035 3$

$H = 28941940899639060048490540264976542606198068092929301862261381129262097526594281 53$

$p = 2$ において $N_2 = 2^3 * 3^2$ が 2 つの平方因子 $2^2, 3^2$ を持っている.
$p = 23$ において G に 47^2 という平方因子がある. $47 = 2 * 23 + 1$.

3.3.3 $P = 79$

表 3.13: $P = 79$

p	$(2p+1)=$	$N_p =$ 分解	a
2	(5)=5	$(80) = 2^4 * 5$	6320
3	(7)=7	$(6321) = 3 * 7^2 * 43$	39449361
5	(11)=11	(39449441)=39449441	1536558922354721
7	(15)=3*5	(246203961361)=281*337*1289*2017	59849094506436090124081

$p = 3$ において 7^2 という平方因子がある. $7 = 2 * 3 + 1$.

3.3.4 $P = 137$

表 3.14: $P = 137$

p	$(2p+1)$	$N_p =$ 分解	a
2	(5)=5	(138)=2*3*23	18906
3	(7)=7	(18907)=7*37*73	354865483
5	(11)=11	(354865621)=11*101*319411	125010414744264181
7	(15)=3*5	(6660472840687)=8933*745603139	44038088983707823203728383
11	(23)=23	A	B
13	$(27) = 3^3$	C	D
17	(35)=5*7	E	F
19	(39)=3*13	G	H
23	(47)=47	I	J
29	(59)=59	K	L

A=(2346320474383711003267)=234632047438371100326 7

B= 5465035682610653717879961178365556122821683

$C = (44038088983707871820318461) = 864319 * 19805293 * 2572605139183$

D= 1925197417969549460912161511671456536120639693634141

$E = (155135336944858136640444129863296 81) = 17*103*885981364619406834040229182543 1$

F= 2389130143491441285714104851126852602568450957459175013920626680199 21

G=(291173513911804236660449587340421782827)=29117351391180423666044958734042178282 7

H= 84163168377442927933524042922256325776247704876773687945116498292399482547483

$I = (10257325472691935963088931280264811343764761580 7)$

$= 1381 * 143235060131 * 518550578298278365204966204101137$

$J = 1044447497516199946410760506025153055220870068969628 12$
$--2473847820347076914540604327442655780398 3$
$K = (6781996154114909233501870859276055368802320749546877583665 41)$
$= 59^2 * 616367 * 3160924605365392930438533910600424447165692844394 83$
$L = 4565973846337519033465476544 83[60digits]4754724862614885808346050204 61$

$p = 23$ で $K = 59^2 * 616367 * 3160924605365392930438533910600424447165692844394 83$ 平方因子 59^2.

3.3.5 $P = 197$

表 3.15: $P = 197$

p	$(2p+1)=$	$N_p =$ 分解	a
2	(5)=5	(198)=$2 * 3^2 * 11$	39006
3	(7)=7	(39007)=19*2053	1513822663
5	(11)=11	(1513822861)=661*991*2311	2280026864369614141
7	(15)=3*5	(58749951412747)=7*29*97847*2957767	3434036198152417107087067363

$p = 2$ で 平方因子 3^2.

3.3.6 $P = 199$

表 3.16: $P = 199$

p	$(2p+1)=$	$N_p =$ 分解	a
2	(5)=5	(200)=$2^3 * 5^2$	39800
3	(7)=7	(39801)=3*13267	1576159401

$p = 2$ で 平方因子 $2^3 * 5^2$. 2 重の平方因子.

3.3.7 参考

強い意味の Wieferich 素数 Q はあまりない.

表 3.17: 強い意味の Wieferich 素数 Q の例 ; Q : 500 から 8000 まで

P	prime $= Q$
P=31	prime $= 6451$
P=59	prime $= 2777$
P=71	prime $= 331$
P=83	prime $= 4871$
P=173	prime $= 3079$
P=197	prime $= 653$

表 3.18: Wieferich 素数 $P = 3, \cdots, 59$ の例, $Q < 5000$

P	Q
3	11
7	5
11	71
13	863
17	3
19	3
19	7
19	13
19	43
19	137
23	13
31	7

3.3.8 一般の Wieferich 素数

この表で $P = 5$ のときの Wieferich 素数が出て無いのは不思議なので探索範囲を拡げたら $P = 5, Q = 20771$ が出てきた.

一般に与えられた素数 P に対してこれを底とする Wieferich 素数があることは期待できる.

表 3.19: Wieferich 素数 $P = 3, \cdots, 59$ の例, $Q < 5000$

P	Q
31	79
31	6451
37	3
41	29
43	5
43	103
53	3
53	47
53	59
53	97
59	2777

Mochizuki Theory and Poincare-Segal n-groupoids

Kazuhisa Maehara at Gifu

December 23, 2015

Abstract

In this article the way which Mochzuki's theory is applied to is mainly modified just like the relative Frobenius map. Thus we shall repair a proof of Iitaka-Viehweg conjecture, Secondly, we consider a surjective morphism over a scheme from a product manifold onto a manifold with the automorphism group of general generic fibre algebraic. We apply Poincare-Segal n groupoid to the situation above to prove that the latter manifold is also a product after a certain base-change.

1 Introduction

In the first section we revised a proof of Iitaka-Viehweg conjecture by relative Frobenius like map.To show Iitaka-Viehweg conjecture([I],[Vieh]) $\max_{m\geq 1}\kappa(\det f_*\omega_{X/S}^{\otimes m})\geq \mathrm{var}(X/S)$ if the general generic fibre of X/S is of Kodaira dimension ≥ 0, one constructs a cyclic covering $Y\to X$ such that the general generic fibre of Y/S is of general type and $\max_{m\geq 1}\kappa(\det g_*\omega_{Y/S}^{\otimes m})\geq \mathrm{var}(Y/S)$. One shall show $\mathrm{var}(Y/S)\geq \mathrm{var}(X/S)$ and that $\max_{m\geq 1}\kappa(\det f_*\omega_{X/S}^{\otimes m})=\max_{m\geq 1}\kappa(\det g_*\omega_{Y/S}^{\otimes m})$.

In the second section we briefly explain Poincare-Segal groupoids to apply it toa kind of deformation theory of manifolds with additional property.

2 Iitaka-Viehweg Conjecture

2.1 Application of Mochizuki's Theory

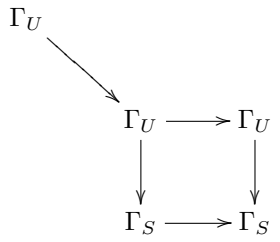
Lemma 2.1. *Let k be a sub-p-adic field. Let S be a variety over k. Let U be a geometrically irreducible and reduced scheme surjective over S. Assume that U is trivial over S,i.e., there exists a variety U_0 such that U is isomorphic to $U_0\times_k S$ over S. Let Γ_U denote the absolute Galois group of the rational function field of U (resp. Γ_S that of S, resp. Γ_k that of k). Then one obtains the next trivial representation*

$$\rho:\Gamma_S\to \mathrm{Aut}_{\Gamma_S}(\Gamma_U)$$

whose representatioin is trivial, i.e., one assoviates an identity homomorphism between Γ_U over Γ_S.

Proof. To each $g\in\Gamma_S$ one has an automorphism of Γ_U fixing $\Gamma_S$such that one associates $(u_0,s)^g=(u_0^g,s^g)=(u_0,gsg^{-1})\in\Gamma_U$ to $(u_0,s)\in\Gamma_U=\Gamma_{U_0}\times_{\Gamma_k}\Gamma_S$ and one has the unique homomorphism which factors the homo-

morphism above on the pull-back through inner automorphism $s \to s^g$ of Γ_S which is Γ_U:



□

$\Gamma_X = \sqcup_{i \in I} x_i \Gamma_U$

$$x_i u_i \mapsto x_i^g u_i^g$$

One constructs a new representation of Γ_S to a topological automorphism group $\mathrm{Aut}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)$ from a usual representation Γ_S to a topological automorphism group $\mathrm{Aut}_{\Gamma_k}(\Gamma_X)$ when one has a continuous homomorphic section of Γ_U/Γ_S. One has a finite representatives $\{x_i\}_I$ in Γ_X such that there exists a cosets decomposition $\Gamma_X = \sqcup_{i \in I} x_i \Gamma_U$

$$x_i u_i \mapsto x_i{}^g u_i{}^g = x_{g(i)} u_{ig}$$

where there exists $u_{ig} \in \Gamma_S$ such that the equality above holds.

Let $\sigma : \Gamma_S \to \Gamma_U \subset \Gamma_X$ be a a continuous homomorphic section of $\pi : \Gamma_X \to \Gamma_S$. Let $g \in \Gamma_S$ and denote $\sigma(g)$ by g. A usual representation Γ_S to a topological automorphism group $\mathrm{Aut}_{\Gamma_k}(\Gamma_X)$ when one has a continuous homomorphic section of Γ_U/Γ_S:

$$x_i u_i \mapsto x_i{}^g u_i{}^g$$

where $x_i^g = \sigma(g) x_i \sigma(g^{-1})$ and $u_i^g = \sigma(g) u_i \sigma(g^{-1})$. One there denotes $u_i = (u_{0i}, s_i) \in \Gamma_U = \Gamma_{U_0} \times_{\Gamma_k} \Gamma_S$. One finds $u_{ig} = (u_{0ig}, s_{ig}) \in \Gamma_U$ such that

$$x_i^g u_i^g = x_{g(i)} u_{ig}$$

where $i \mapsto g(i)$ is a member of a representation of Γ_S to a permutation group of I : $\Gamma_S \to \mathrm{Sym}(I)$. Now one constructs two types of a new representation of Γ_S to a topological automorphism group $\mathrm{Aut}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)$:

1. Recall that $\pi : \Gamma_X \to \Gamma_S$ and σ its continuous homomorphic section and $u_i = (u_{0i}, s_i) \in \Gamma_U = \Gamma_{U_0} \times_{\Gamma_k} \Gamma_S$. Let $s'_{ig} \in \Gamma_S$ such that

   $$\pi(x_i u_i) = \pi(x_i) s_i = \pi(x_{g(i)}) s'_{ig}$$

   The map

   $$x_i u_i \mapsto x_{g(i)} (u_{0ig}, s'_{ig})$$

   gives a representation of Γ_S to $\mathrm{Aut}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)$.

2. Recall $x_i{}^g u_i{}^g = x_{g(i)} u_{ig}$ and denote $\pi(u_{ig}) = s_{ig}$. Let $s"_{ig} \in \Gamma_S$ such that

   $$\pi(x_i) s"_i = \pi(x_{g(i)}) s_{ig} = \pi(x_i^g u_i^g)$$

   The map

   $$x_i(u_{0i}, s"_i) \mapsto x_i^g u_i^g = x_{g(i)} u_{ig} = x_{g(i)}(u_{0ig}, s_{ig})$$

   gives a representation of Γ_S to $\mathrm{Aut}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)$.

Note that I is bijective to Γ_X/Γ_U as sets and it is a finite set by the hypothesis. Since $\mathrm{Sym}(I)$ is a finite group, the cokernel of the representation $\Gamma_S \to \mathrm{Sym}(I)$ is finite. Hence there exists a generically finite morphism $S' \to S$ such that $\Gamma_{S'} \cong \ker(\Gamma_S \to \mathrm{Sym}(I))$. Note that the pull-back Γ_U along the inner automorphism $\Gamma_S \to \Gamma_S : x \mapsto gxg^{-1} = x^g$ is itself Γ_U and it denotes $\Gamma_U^{(g)}$. Note that $\Gamma_U = \Gamma_{U_0} \times_{\Gamma_k} \Gamma_S$. One obtains the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_X & & & & \\ \downarrow & \searrow & & & \\ & & \Gamma_X^{(g)} & \longrightarrow & \Gamma_X \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_S & & = \Gamma_S & \xrightarrow{Inn(g)} & \Gamma_S \end{array}$$

where the right side square is a pull-back and the bottom horizontal arrow is an inner automorphism by $g \in \Gamma_S$. Then one obtains the relative homomorphism $\tilde{g} : \Gamma_X \to \Gamma_X^{(g)} = \Gamma_X$ fixing Γ_S.

Thus one obtains

$$\Gamma_S \to \mathrm{Aut}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)(g \mapsto \tilde{g})$$

One can apply Mochizuki's theory([Mch])

Lemma 2.2. *From Mochizuki's Theorem ([Mch])*

$$\mathrm{Aut}^{open}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)/\ker(\Gamma_X \to \Gamma_S) \cong \mathrm{Aut}^{opp}_{k(S)}(k(X))$$

one obtains

$$\Gamma_S \to \mathrm{Aut}^{open}_{\Gamma_S}(\Gamma_X)/\ker(\Gamma_X \to \Gamma_S) \cong \mathrm{Aut}^{opp}_{k(S)}(k(X)) \to \mathrm{Out}(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}})$$

Note that

$$\mathrm{Out}(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}}) \cong \mathrm{Aut}(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}}/\ker(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}} \to \Gamma_{\overline{k(S)}})$$

The representation$\Gamma_S \to \mathrm{Out}(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}})$ factors through the algebraic group scheme which is the birational automorphism group of $X \times_S \overline{k(S)}$. One can take a subgroup $\Gamma_{S''}$ of finite index of $\Gamma_{S'}$ such that$\Gamma_{S''}$ just maps to a neutral component of the birational automorphism group $\mathrm{Bir}^o(X \times_S \overline{k(S)})$.

Since one has the next isomorphism

$$H^1(\Gamma_S, \mathrm{Bir}^o(X \times_S k(S)) \cong H^1_{et}(\overline{k(S)}/k(S), \mathrm{Bir}^o(X \times_S k(S)))$$

One can find a genrically finite morphism $S' \to S$ such that a torsor with group action by $\mathrm{Bir}^o(X \times_S k(S))$ over $\mathrm{Spec}(k(S))$ associated to an element of $H^1(\Gamma_S, \mathrm{Bir}^o(X \times_S k(S))$ becomes a trivial torsor,that is a neutral element of $H^1(\Gamma_{S'}, \mathrm{Bir}^o(X \times_S k(S'))$ since a torsor with group action by $\mathrm{Bir}^o(X \times_S k(S'))$ over $\mathrm{Spec}(k(S'))$ can have a section. Therefore, the element $H^1(\Gamma_{S'}, \mathrm{Out}(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}}))$ is trivial which is an image of the element

$$H^1(\Gamma_{S'}, (\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}}) \to \mathrm{Aut}(\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}})$$

representing the extension

$$\Gamma_{X \times_S \overline{k(S)}}) \to \Gamma_X \to \Gamma_S$$

2.2 Weak Positivity

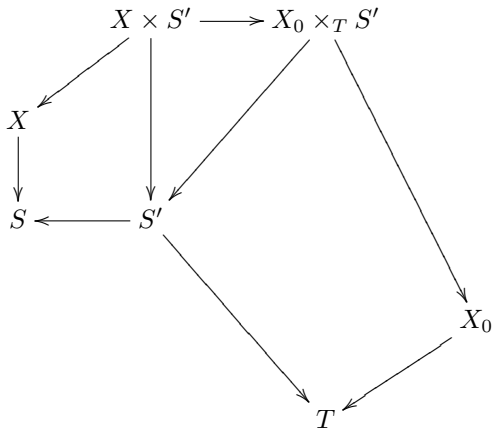
Our main aim was to show the following theorem.

Theorem 2.1. *Let $f : X \to S$ be a fibre space of non singular varieties. Assume that $\kappa(\omega_{X_{\bar{\eta}}}) \geq 0$ for the generic geometric fibre $X_{\bar{\eta}}$. Then there exists an integer $m > 0$ such that $\kappa(\det\ f_*\omega_{X/S}^{\otimes m}) \geq \mathrm{var}(X/S)$. Here $f_*\omega_{X/S}^{\otimes m})$ is taken to be the double dual as the original conjecture.*

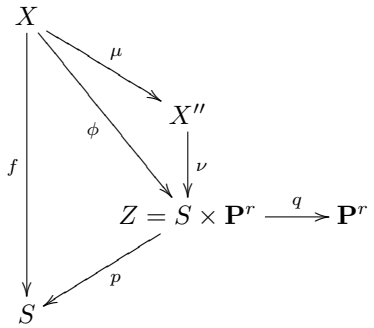
Viehweg's Lemma:

Lemma 2.3. *Let $S' \to S$ be a Kawamata covering with respect to an ample divisor. Let $X \times_S S' \to S'$ be the pull-back. Then $X \times_S S'$ has rational singularity. Further take a desingularization $X^! \to X \times_S S'$. Then $\kappa(\det f!_*\omega_{X^!/S'}^{\otimes m}) \leq \kappa(\det\ f_*\omega_{X/S}^{\otimes m})$.*

We shall prove the theorem above in the following several steps. By Viehweg in order to prove the theorem, we can assume further that $\mathrm{var}(X/S) = \dim S$ and show the theorem.



Let $f : X \to S$ be a fibre space. From the extension of the functon fields $R(X)/R(S)$, we have purely transcendental indeterminates $t_1, \cdots, t_r$ over $R(S)$ such that $R(X)/R(S)(t_1, \cdots, t_r)$ is a finite extension of degree d. Hence we obtain a dominant rational map $X \to S \times \mathbf{P}^r$. Resolving the indeterminacy of the rational map $X \to S \times \mathbf{P}^r$, we have a birational map $X' \to X$ and a morphism $\phi : X' \to S \times \mathbf{P}^r$. We replace X' by X and let Z denote $S \times \mathbf{P}^r$. Let X'' be the integral closure of Z in the function field $R(X)$. Namely, $\mu : X \to X''$ with $\nu : X'' \to Z$ is Stein factoization. Let $\mu : X \to X''$ be the structure morphism.



Recall the next lemma due to Kawamata-Viehweg.

Lemma 2.4. *$\omega_{X/S}$ is weakly positive with respect to f.*

In other words, given any $\alpha > 0$ and any big $\mathbf{Q}$-invertible sheaf L over S, it holds that $\kappa(\omega_{X/S}^{\otimes\alpha} \otimes f^*L) \geq \dim S$.

We have a rational map $X \to \mathbf{P}(\Gamma(X, (\omega_{X/S} \otimes f^*L)^{\otimes m}))$ defined by $\mathcal{O}_X \otimes \Gamma(X, (\omega_{X/S} \otimes f^*L)^{\otimes m}) \to (\omega_{X/S} \otimes f^*L)^{\otimes m}$ for $m >> 0$. Take a resolution of the indeterminacy of the rational map, which is denoted by by $X^* \to X$. Then replace X^* by X. Since X is non singular, there exists an effective $\mathbf{Q}$-cartier divisor D such that $\omega_{X/S}^{\otimes\alpha} \otimes f^*L = \mathcal{O}_X(D)$ for any $\alpha > 0$.

Lemma 2.5. *Let D be an effective $\mathbf{Q}$-divisor on X. There exist an effective $\mathbf{Q}$-divisor E and an effective Weil divisor D' on X'' $D = \mu^*D' + E$ such that E is a μ-exceptional divisor, i.e., the μ image of the support of E in X'' is of codimension ≤ 2.*

Proof. Since $\mu : X \to X''$ is birational, there exists a locus of codimension ≤ 2 outside which the restriction of μ is an isomorphism. Hence we have an effective $\mathbf{Q}$-divisor decomposition $D = \mu^*D' + E$ such that E is a μ-exceptional divisor. □

Lemma 2.6. *There exist $\mathbf{Q}$-ample divisors C_1 and C_2 such that $D' = C_1 - C_2$ in $\mathrm{Z}^{(1)}(X'' \otimes \mathbf{Q}$ up to $\mathbf{Q}$-linear equivalence.*

Proof. There exists a $\mathbf{Q}$-ample divisor C_1 such that $C_1 - D'$ is $\mathbf{Q}$-ample, say, C_2. □

Lemma 2.7. *There exist $\mathbf{Q}$-ample divisors D_1 and D_2 over Z such that $C_1 = \nu^*D_1$ and $C_2 = \nu^*D_2$ up to $\mathbf{Q}$-linear equivalence.*

Proof. We refer to the next lemma.

Lemma 2.8 (EGA4-3)**.** *Let $f : X \to Y$ be a proper flat morphism of finite presentation. The set of $y \in Y$ such that X_y is smooth over $k(y)$ is open.*

Since $f : X \to S$ is a fibre space of non singular varieties, i.e., a projective connected morphism, a general fibre X_s for a closed point $s \in S$ is a non singular variety. Let Div_S be a scheme representing a functor $T \to \mathrm{Div}_{S/k}(T)$. Its components are quasi-projective. Let Γ be the universal relative effective divisor on $S \times \mathrm{Div}_S/\mathrm{Div}_S$. Note that a fibre of a closed point of S for $\Gamma \subset S \times \mathrm{Div}_S \to S$ is an effective divisor on S. A general fibre of a closed point $s \in S$ for $f^{-1}\Gamma \subset X \times \mathrm{Div}_S \to S \times \mathrm{Div}_S \to \mathrm{Div}_S$ is a non singular variety, i.e., smooth and irreducible over $k(s)$. Let Ξ be the universal relative effective divisor on $Z \times \mathrm{Div}_Z$. Since the pullback of the universal relative effective divisor over $\Gamma \subset S \times \mathrm{Div}_S$ to $p^{-1}\Gamma \subset Z \times \mathrm{Div}_S$ gives a morphism $\mathrm{Div}_S \to \mathrm{Div}_Z$, a general fibre of a closed point t of Div_Z for $\phi^{-1}\Xi \subset X \times \mathrm{Div}_Z \to \mathrm{Div}_Z$ is a non singular variety. Hence there exists a dense open set U of Div_Z such that $\phi^{-1}\Xi/\mathrm{Div}_Z|_U$ is smooth and irreducible. Therefore there exists one point in X'' over the generic point of an effective divisor on Z corresponding to a closed point $t \in U$.

A general member of the linear system of a sufficiently ample divoisor on X'' is irreducible and moves freely. Hence the direct image of a general member by ν is able to be a general irreducible divisor on Z, which is associated with a closed point $t \in U$.

Hence there exist a $\mathbf{Q}$-ample divisors D_1 and D_2 over Z such that $C_1 = \nu^*D_1$ and $C_2 = \nu^*D_2$ up to $\mathbf{Q}$-linear equivalence. □

Note that $\mathrm{Pic}(Z) = \mathrm{Pic}(S) \times \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^r)$ and that $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^r) \cong \mathbf{Z}$. Let $p : Z \to S$ and $q : Z \to \mathbf{P}^r$. Let $\phi = \nu \circ \mu : X \to Z$. Now put them together. We have

1. $\omega_{X/S} = \mathcal{O}_X(D - f^*L)$

2. $D = \mu^* D' + E$

3. $D' = C_1 - C_2 = \nu^*(D_1 - D_2)$

4. $D_i = p^* A_i + a_i q^* H$, where A_i is an ample $\mathbf{Q}$-divisor on S, H is a hyperplane section of $\mathbf{P}^r$, a_1 is a rational number and $i = 1, 2$.

5. $\omega_{X/S} = \mathcal{O}_X(-f^*L+E+\phi^*(p^*A_1+a_1q^*H-p^*A_2-a_2q^*H) = \mathcal{O}_X(E+f^*p^*A+bq^*H)$, where $A = -L+A_1-A_2$, $a = a_1 - a_2$.

6. $\mu_*\omega_{X/S}^{\otimes m} = \mu_*\mathcal{O}_X(m(E + f^*p^*A + aq^*H)) = \mu_*\mathcal{O}_X(m(f^*p^*A + aq^*H))$.

Note that $\phi_*\mathcal{O}_X(mE) = \phi_*\mathcal{O}_X$.

Lemma 2.9. $\phi_*\mathcal{O}_X \subset \oplus^d \mathcal{O}_Z$

Proof. We apply the next lemma to a finite morphism X''/Z. We refer to Weierstrass preparation lemma.

Lemma 2.10. *Let a convergent series $g \in k\{x_1, \cdots, x_n\}$ such that $g(0, \cdots, x_n) \neq 0$ and order p. Then $B = k\{x_1, \cdots, x_n\}/(g)$ is a free module over the ring $A = k\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ and has a basis of classes $(1, x_n, \cdots, x_n^{p-1})$ mod (g).*

The convergent series rings are strictly henzelian. Hence X''/Z is Kummer gerbe ,i.e., cyclic cover, with respect to the etale topology. We have $\nu_*\mathcal{O}_{X''} = \oplus_{i=0}^{i=d-1}\mathcal{O}_Z(-iD)$, where D is an effective divisor with respect to the etale topology. Note, however, that the composition of the morphisms $X'' \to Z$ and $Z \to \mathbf{P}^r$ is a connected morphism.

□

2.3 Cyclic Covering

Let $L = \mathcal{O}_X(\phi^*q^*(bH))$. Here $b > 0$ is taken sufficiently large. Choose a non singular irreducible divisor D such that $L^{\otimes m} = \mathcal{O}_X(D)$. Take a cyclic cover $Y = \operatorname{Spec} \oplus_{0\leq i\leq n-1} L^{\otimes i}$ of X, which denotes $\tau : Y \to X$. Note that Y is a non singular variety and Y/S is a fibre space. By adjunction formula, $\mathcal{O}_Y(K_Y) = \mathcal{O}_Y(\tau^*K_X \otimes \tau^*L^{\otimes(n-1)})$. It is well known $\tau_*\mathcal{O}_Y = \oplus_{0\leq i\leq n-1}(L^{-1})^{\otimes i}$. Hence by projection formula, $\tau_*\omega_{Y/S}^{\otimes m} = \tau_*\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\omega_{X/S}^{\otimes m}) \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes m(n-1)}$. Let $g = f \circ \tau$. One obtains $g_*\omega_{Y/S}^{\otimes m} \subset \oplus_{0\leq i\leq n-1} f_*\omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes L^{\otimes(m(n-1)-i)}$ and $\det g_*\omega_{Y/S}^{\otimes m} \subset \otimes^d \otimes_{0\leq i\leq n-1} \det f_*\omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes(m(n-1)-i)}$.

Proposition 2.1. $g_*\omega_{Y/S}^{\otimes m} = f_*(\tau_*\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_X(\omega_{X/S}^{\otimes m})) \otimes L^{\otimes m(n-1)} \subset \oplus^d \oplus_{0\leq i\leq n-1} \oplus \mathcal{O}_S^{r_i} \otimes \mathcal{O}_S(mA)$, *where* $r_i = \dim \Gamma(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}((ma + b(m(n-1) - i))H)$

Proof. From the argument above, we have $g_*\omega_{Y/S}^{\otimes m} \subset \oplus_{0\leq i\leq n-1} f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m} \otimes L^{\otimes(m(n-1)-i)} \subset \oplus_{0\leq i\leq n-1} p_*\phi_*\mathcal{O}_X(mE) \otimes \mathcal{O}_Z((maq^*H + mp^*A + b(m(n-1) - i))H \subset \oplus^d \oplus_{0\leq i\leq n-1} p_*\mathcal{O}_Z((ma + b(m(n-1) - i))q^*H) \otimes p^*\mathcal{O}_S(mA) = \oplus^d \oplus_{0\leq i\leq n-1} \oplus \mathcal{O}_S^{r_i} \otimes \mathcal{O}_S(mA)$. Here $r_i = \dim \Gamma(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}((ma + b(m(n-1) - i))H)$. See the following lemma.

Lemma 2.11. $p_*\mathcal{O}_Z((ma + b(m(n-1) - i))q^*H) = \oplus \mathcal{O}_S^{r_i}$, *where* $r_i = \dim \Gamma(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}((ma + b(m(n-1) - i))H)$.

□

We may assume that if b is taken sufficiently large, the generic geometric fibre of Y/S is of general type, if necessary, the canonical invertible sheaf over the generic geometric fibre of Y/S is abundant with $R^i g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m} = 0$ for $i > 0$. The composite map $\tau \circ \nu \circ \mu : Y \to Z$ is generically finite and the invertible sheaf q^*H is relatively ample with respect to $p : Z \to S$.

Lemma 2.12. *Let S be a non singular variety. Let L be an invertible sheaf and E' and E locally free sheaves of finite rank over S. Given the exact sequence $0 \to E' \to E \otimes L$ and $E \cong \mathcal{O}^n$ for some $n > 0$, then $\kappa(L^{\otimes r} \otimes (\det E')^{-1}) \geq 0$, where $r = \mathrm{rank} E'$.*

Proof. Take the dual and we have a homomorphism $(E \otimes L)^* \to (E')^*$ and let the image be F and K the kernel. F and K are torsion free and locally free outside a closed subset of codimension ≥ 2, which we denote S^o. F is of the same rank as E'. We have the exact sequences $0 \to (E \otimes L)^* \to F \to 0$ and $0 \to K \otimes L \to (E)^* \to F \otimes L \to 0$ over S^o. Thus $F \otimes L$ is globally generated and $F \otimes L \to (E')^* \otimes L$ is an isomorphism over S^o. Hence $\det(F \otimes L) \subset \det((E')^* \otimes L)$. Note that $\det((E')^* \otimes L) = L^{\otimes r} \otimes (\det E')^{-1}$, where $r = \mathrm{rank} E'$. Therefore $\kappa(L^{\otimes r} \otimes (\det E')^{-1}) \geq 0$. □

Proposition 2.2. $\kappa(\mathcal{O}_S(mA)) \geq \kappa(\det g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m})$

Proof. Apply the lemma above to the following formula, $g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m} \subset \oplus^d \oplus_{0 \leq i \leq n-1} \oplus \mathcal{O}_S^{r_i} \otimes \mathcal{O}_S(mA)$, where $r_i = \dim \Gamma(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}((ma + b(m(n-1) - i))H)$. □

Consider the case when $m = 1$. Let D be a classifying space for a variation of Hodge structure and let Γ be the monodromy group, which is a subgroup of the arithmetic group of all linear automorphism group of $H^{\dim X_s}(X_s, \mathbf{C})$ which preserve a certain condition. Let $\Phi : S \to \Gamma \setminus D$ be a holomorphic period mapping satisfying the Grifiths' transeversality relation. A period mapping Φ gives rise to a variation of Hodge structure by pulling back the universal family over $\Gamma \setminus D$. Since the generic geometric fibre of Y/S is of general type and $\mathrm{var}(Y/S) \geq \dim S$, the period mapping Phi is a finite to one mapping. Hence we obtain $\kappa(A) \dim S$.

One obtains $g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m} \subset \oplus_{0 \leq i \leq n-1} f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes L^{\otimes (m(n-1)-i)}$ and

$$\det g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m} \subset \otimes^d \otimes_{0 \leq i \leq n-1} \det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes (m(n-1)-i)}$$

. Consider the following homomorphism

$$\theta : p^* \otimes^d \otimes_{0 \leq i \leq n-1} \det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\otimes (m(n-1)-i)} \to p^* \otimes^d \otimes_{0 \leq i \leq n-1} \det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes (m(n-1)-i)}$$

- The θ is isomorphic on the $Z \setminus q^{-1}\mathrm{support} H$.
- The θ is isomorphic on the $Z \setminus p^{-1}\mathrm{support} \otimes^d \otimes_{0 \leq i \leq n-1} \det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes (m(n-1)-i)}$.
- Hence θ is isomorphic on the whole Z.
- $$\kappa(\det g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m}) \leq \kappa(\det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes (m(n-1)-i)})$$
- $$\kappa(\det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes (m(n-1)-i)}) = \kappa(\det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\otimes (m(n-1)-i)})$$
- $$\kappa(\det g_* \omega_{Y/S}^{\otimes m}) \leq \kappa(\det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\otimes (m(n-1)-i)}) = \kappa(\det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m})$$

This implies

$$\mathrm{var}(X/S) \leq \mathrm{var}(Y/S) = \kappa(\det g_* \Omega_{Y/S}^{\otimes m}) \leq \kappa(\det f_* \omega_{X/S}^{\otimes m})$$

We therefore show the revised version of Iitaka-Viehweg Conjecture.

3 Poincare-Segal n-Groupoids

In this section we briefly introduce the notion of Poincare-Segal n-groupoids which we refer to Carlos Simpson's Homotopy Thory of Higher Categories([S3]).

Recall that a groupoid is a category where the morphisms are all invertible.

Definition 3.1. *The following definitions are given by mutual induction on $n \geq 1$:*

- *a strict n-category $\mathcal{A}$ is a* strict n-groupoid *if for all $x, y \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x, y)$ is a strict $(n-1)$-groupoid and for any 1-morphism $u : x \to y$ in* A *the two morphism of composition with u*

$$\mathcal{A}(y, z) \to \mathcal{A}(x, z), \qquad \mathcal{A}(w, x) \to \mathcal{A}(w, y)$$

  are equivalences of strict $(n-1)$-groupoids;

- *a morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ between n-groupoids is essentially surjective if for every $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ there exists $z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ and an arrow $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(z, f(x))$ is nonempty;*

- *a morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ between n-groupoids is fully faithful if for all $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ the map $\mathcal{A}(x, y) \to \mathcal{B}(f(x), f(y))$ is an equivalence of $(n-1)$-groupoids;and*

- *a morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ between n-groupoids is an equivalence if it is fully faithful and essentially surjective.*

Theorem 3.1. *A strict n-category $\mathcal{A}$ is an n-groupoid if and only if for $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ the $(n-1)$-category of morphisms $\mathcal{A}(x, y)$ is an $(n-1)$-groupoid.*

If $\mathcal{A}$ is an n-groupoid, $\pi_0(\mathcal{A})$ (resp. $\tau_{\leq 0}(\mathcal{A})$) is defined to be the quotient of $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ by the relation of inner equivalence. A truncated 1-category $\tau_{\leq 0}(\mathcal{A})$ is defined to be

$$\mathrm{Ob}(\tau_{\leq 1}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$$

$$(\tau_{\leq 1}(\mathcal{A})(x, y) = \pi_0(\mathcal{A}(x, y)).$$

Theorem 3.2. *If $\mathcal{A}$ is an n-groupoid, for any $0 \leq k \leq n$ there exists a strict k-groupoid $\tau_{\leq k}\mathcal{A}$ the i-morphism of which are those of $\mathcal{A}$ for $i < k$ and k-morphisms of which are the equivalence classes of k-morphisms of $\mathcal{A}$ under the equivalence relation of inner equivalence.There exists the natural projection $\mathcal{A} \to \tau_{\leq k}\mathcal{A}$ which is a morphism of n-categories.*

Let nSTRGPD be the category of strict n-groupoids and Top the category of topological spaces.

Definition 3.2. *A realization functor for strict n-groupoids is a functor*

$$\mathcal{R} : \mathrm{nSTRGRD} \to \mathrm{Top}$$

together with the following natural transformation:

$$r : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}(\mathcal{A})$$

$$\zeta_i(\mathcal{A}, x) : \pi_i(\mathcal{A}, x) \to \pi_i(\mathcal{R}(\mathcal{A}), r(x))$$

the latter including $\zeta_0(\mathcal{A}) : \pi_0(\mathcal{A}) \to \pi_0(\mathcal{R}(\mathcal{A}))$ such that $\zeta_i(\mathcal{A}, x)$ and $\zeta_0(\mathcal{A})$ are isomorphisms for $0 \leq i \leq n$ such that ζ_0 takes the isomorphism class of x to the connected component of $r(x)$ and such that the $\pi_i(\mathcal{R}(\mathcal{A}), y)$ vanish for $i > n$.

Theorem 3.3. *There exists a realization functor $\mathcal{R}$ for strict n-groupoids.*

Let $\mathcal{M}$ be a category and X a set.

Definition 3.3. *An $\mathcal{M}$-precategory over a set X is a functor $\mathcal{F} : \Delta_X^\circ \to \mathcal{M}$ such that $\mathcal{F}(x_0) \cong *$ is the coinitial object of $\mathcal{M}$ for any $x_0 \in X$. Let $\mathcal{PC}(X, \mathcal{M})$ denote the category of $\mathcal{M}$-precategories over X with morphisms which are natural transformations of diagrams.*

$$\mathcal{PC}(X, \mathcal{M}) = \mathrm{Func}(\Delta_X^\circ / X, \mathcal{M})$$

One says that an $\mathcal{M}$-precategory satisfies Segal conditions if the Segal maps are weak equivalences $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$: the Segal maps at $(x_0, \ldots, x_n)$

$$\mathcal{A}(x_0, \ldots, x_n) \to \mathcal{A}(x_0, x_1) \times \cdots \times \mathcal{A}(x_{n-1}, x_n).$$

When $\mathcal{M} = \mathcal{K}$ is Kan-Quillen model category of simplicial sets,it is a tractable left proper cartesian model category. A $\mathcal{K}$-precategory is called a Segal precategory and if it satisfys Segal conditions it is called a Segal category. When $\mathcal{K}$ is the category of presheaves on Δ, one has a natural identification

$$\mathcal{PC}(\mathcal{K}) \cong \mathrm{Presheah}(\mathbf{Cone}(\Delta)) \subset \mathrm{Presheaf}(\Delta \times \Delta)$$

A Segal precategory is a pair $(X, \mathcal{A})$, where $X \in$ SET and $\mathcal{A}$ is a collection of simplicial sets $\mathcal{A}(x_0, \ldots, x_n)$ for sequences of $x_i \in X$.Note that $\mathbf{Cone}(\Delta)$ is a quotient of $\Delta \times \Delta$.

Definition 3.4. *A Segal groupoid is a Segal category such that $\tau_{\leq 1}(\mathcal{A})$ is a groupoid.*

Given a fibrant object X in $\mathcal{K}$,i.e., a Kan simplicial set, one can define the Poincare-Segal groupoid $\Pi_S(X)$, which is a Segal groupoid.It is constructed as the right adjoint of the diagonal realization functor. The diagonal $d : \Delta \to \Delta \times \Delta$ equips a pullback functor

$$d^* : \mathrm{Presheaf}(\Delta \times \Delta) \to \mathrm{Presheaf}(\Delta) = \mathcal{K}$$

composing the functor above one obtains the realization functon

$$|\ | : \mathcal{PC}(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$$

Theorem 3.4. *If X is a fibrant simplicial set then $\Pi_S(X)$ is fibrant, so it is a Segal category. It is in fact a Segal groupoid and the counit of the adjunction*

$$|\Pi_S(X)| \to X$$

is a weak equivalence. Conversely, if $\mathcal{A} \in \mathcal{PC}(\mathcal{K})$ is a Segal groupoid and $|\mathcal{A}| \to Y$ is a fibrant replacement in $\mathcal{K}$, then the adjunction

$$\mathcal{A} \to \Pi_S(Y)$$

is a global equivalence of Segal categories.

A morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ between Segal groupoids is a global equivalence if and only if $\pi_0(\mathcal{A}) \to \pi_0(\mathcal{B})$ is surjective and for each $i \geq 1$ and each object $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, the induced maps $\pi_i(\mathcal{A}, x) \to \pi_i(\mathcal{B}, f(x))$ are isomorphisms. If $\mathcal{A}$ is a Segal groupoid then $\pi_0(\mathcal{A}) = \pi_0(|\mathcal{A}|)$ and for any $i \geq 1$ and $x \in x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$,

$$\pi_i(\mathcal{A}, x) = \pi_i(|\mathcal{A}|, x).$$

When $\mathcal{M}$ is a tractable left proper cartesian model category, the model category $\mathcal{PC}_{Reedy}(\mathcal{M})$ of $\mathcal{M}$-enriched precategories with Reedy cofibrations and global weak equivalences is again a tractable left proper cartesian model category. Therefore one can iterate the construction to obtain various versions of model categories for n-categories and similar objects. For any $n \geq 0$ define by induction $\mathcal{PC}^0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ and for $n \geq 1$

$$\mathcal{PC}(\mathcal{M}) = \mathcal{PC}(\mathcal{PC}^{n-1}(\mathcal{M}).$$

This is the model category of $\mathcal{M}$-enriched n-precategories.

Definition 3.5. *An $\mathcal{M}$-enriched n-precategory $\mathcal{A} \in \mathcal{PC}(\mathcal{M})$ satisfis the full Segal condition if it satisfies the Segal condition as an $\mathcal{PC}^{n-1}(\mathcal{M})$-precategory, and furthermore inductively for any sequence of objects $x_0, \ldots, x_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ the $\mathcal{M}$-enriched $(n-1)$-precategory*

$$\mathcal{A}(x_0, \ldots, x_m) \in \mathcal{PC}^{n-1}(\mathcal{M})$$

satisfies the full Segal condition.

If $\mathcal{A}$ is a fibrant object in the model structure on $\mathcal{PC}^n(\mathcal{M})$, then $\mathcal{A}$ satisfies the full Segal condition.

Let $\mathcal{M} = \mathcal{K} = \mathrm{Presheaf}(\Delta)$. One has

$$\mathcal{PC}^n(\mathcal{K}) = \mathrm{Presheaf}(\mathrm{Cone}^n(\Delta))$$

This is the model category of Segal n-precategories. If $\mathcal{M} = \mathrm{Set}$, $\mathcal{PC}(\mathcal{M})^n$ is called the category of n-prenerves or n-precategories.An n-nerve or n-category is an n-prenerve $\mathcal{A}$ satisfying the full Segal condition.

The Poincare-Segal groupoid functor

$$\Pi_S : \mathcal{K} \to \mathcal{PC}(\mathcal{K})$$

can be iterated to give a right Quillen functor

$$\Pi_{n,S} : \mathcal{K} \to \mathcal{PC}^n(\mathcal{K})$$

which is called the Poincare-Segal n-groupoid. The functor $\Pi_{n,S}$ has a left adjoint $|\cdot|$, which is the multidiagonal realization on $(n+1)$-simplicial sets.

Theorem 3.5. *If $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ is a morphism of Segal n-groupoids, then it is a weak equivalence if and only if $|\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ is a weak equivalence. Suppose $X \in \mathcal{K}$ is a fibrant simplicial set. Then*

$$|\Pi_{n.S}(X)| \to X$$

is a weak equivalence of simplicial sets. Conversely, if $\mathcal{A} \in \mathcal{PC}^n(\mathcal{K})$ is a fibrant Segal n-groupoid, then

$$\mathcal{A} \to \Pi_{n,S}(\mathbf{Ex}^\infty|\mathcal{A}|)$$

is a weak equivalence in $\mathcal{PC}^n(\mathcal{K})$. The pair of these functors provids an equivalence between

$$\mathrm{ho}(\mathcal{K}) \cong \mathrm{ho}(\mathrm{Top})$$

and the homotopy category given by localizing the subcategory of Segal n-groupoids in $\mathcal{PC}^n(\mathcal{K})$ with weak equivalences.

For n-nerves, the right Quillen functor

$$\Pi_n : \mathcal{K} \to \mathcal{PC}^n(\mathrm{Set})$$

is the Poincare n-groupoid the left adjoint of which is denoted $|\cdot|$. The truncation functor $\tau_{\leq 0}$ is left adjoint to the inclusion $\mathrm{Set} \to \mathcal{K}$ since sets are consided as discrete simplicial sets. Note that the truncation functor $\tau_{\leq 0} : \mathcal{K} \to \mathrm{Set}$ induces

$$\tau_{\leq n} : \mathcal{PC}^n(\mathcal{K}) \to \mathcal{PC}^n(\mathrm{Set})$$

and

$$\Pi_n(X) = \tau_{\leq n}\Pi_{n,S}(X)$$

Thus $\tau_{\leq n}$ is left adjoint to the following map

$$\mathcal{PC}^n(\mathrm{Set}) \to \mathcal{PC}^n(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$$

This composition is the realization fon n-groupoids which are n-nerves that satisfy the groupoid condition in all dimension. We finally refer to the following theorem about limits and colimits.

Theorem 3.6. *The $(n+1)$-category n*Cat *of all small n-categories, admits limits (resp. colimits) indexed by small $(n+1)$-categories. The Segal $(n+1)$-categoriy 0f all small Segal n-categories n*SeCat *admits limits(resp. colimits) indexed by small Segal $(n+1)$-categories.*

3.1 Deformation of Differential manifolds

It is known that for each compact manifold M the diffeomorphism group $\mathrm{Diff}(M)$ is a regular Lie group and that its Lie algebra is the space $\mathfrak{X}(M)$ of all smooth vector fields on M, with the negative of the usual bracket as Lie bracket.

Diffeomorphism groups of compact manifolds of larger dimension are regular Frechet Lie groups; very little about their structure is known.

For finite dimensional manifolds M and N with M compact, the space $\mathrm{Emb}(M, N)$ of all smooth embeddings of M into N, is open in $C^\infty(M,))$, so it is a smooth manifold. The diffeomorphism group $\mathrm{Diff}(M)$ acts freely and smoothly from the right on $\mathrm{Emb}(M, N)$.

Theorem 3.7. $\mathrm{Emb}(M, N) \to \mathrm{Emb}(M, N)/\mathrm{Diff}(M)$ *is a principal fiber bundle with structure group* $\mathrm{Diff}(M)$.

The identity component of any Lie group is an open normal subgroup, and the quotient group is a discrete group. The universal cover of any connected Lie group is a simply connected Lie group, and conversely any connected Lie group is a quotient of a simply connected Lie group by a discrete normal subgroup of the center. Any Lie group G can be decomposed into discrete, simple and abelian groups in a canonical way as follows. Write G_{con} for the connected component of the identity G_{sol} for the largest connected normal solvable subgroup G_{nil} for the largest connected normal nilpotent subgroup so that we have a sequence of normal subgroups

$$1 \lhd G_{nil} \lhd G_{sol} \lhd G_{con} \lhd G.$$

Then

- G/G_{con} is discrete

- G_{con}/G_{sol} is a central extension of a product of simple connected Lie groups.
- G_{sol}/G_{nil} is abelian. A connected abelian Lie group is isomorphic to a product of copies of R and the circle group S_1.
- $G_{nil}/1$ is nilpotent, and therefore its ascending central series has all quotients abelian.

The semi-simple complex Lie group is an algebraic group.

Theorem 3.8. *Let S be a scheme algebraic over a field k of characteristic 0. Let X and Y be stacks over S. Suppose that X is a trivial stack,i.e.,X is isomorphic to a product $X_0 \times S$ where X_0 is defined over k and that there exists a strictly epimorhic morphism $f : X \to Y$ defined over S. Assume that the fibres of Y/S are differentiable manifolds (resp. with additional structure spectral triple (A, H, D) consisting of a representation of a C^*-algebra A on a Hilbert space H, together with an unbounded operator D on H, with compact resolvent, such that [D,a] is bounded for all a in some dense subalgebra of A) and that the automorphism groups of the fibres if the base field is changed to an algebraically closed field $\bar{k}$ are isomorphic to complex semi-simple Lie groups. Then Y is also trivial over S.*

Proof. Let $\Pi_{n,S}(X)$, $\Pi_{n,S}(Y)$ and $\Pi_{n,S}$ be the Poincare-Segal n-groupoids of X,Y and S, respectively. Here n is taken to be large enough. Then one has the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{n,S}X & \longrightarrow & \Pi_{n,S}Y \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Pi_{n,S}S & \end{array}$$

For the simplicity, η denotes a generic point of S. The extension of $\Pi_{n,S}(Y_\eta) \to \Pi_{n,S}(\eta)$ is to be considered, which has the kernel Poincare-Segal n-groupoid $\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}})$ where $\bar{\eta}$ denotes the point associated to the algebraic closure in an algebraically closed field which contains $k(\eta)$. Note that $\Pi_{n,S}(\eta) = \Pi_1(\eta, e\bar{t}a)$. Since $\Pi_{n,S}(\eta)$ is the limit of Poincare-Segal n-groupoids $\Pi_{n,S}(U)$ where U runs over all open sets of η, it equals to a usual Poincare group, which is an absolute Galois group. The extension

$$\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}}) \to \Pi_{n,S}(Y_\eta) \to \Pi_{n,S}(\eta)$$

is determined by the Breen cohomology([Breen2])

$$H^1(\Pi_1(\eta, \bar{\eta}), (\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{Aut}(\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}}))))$$

On the other hand $\Pi_{n,S}(X)$ admits a section over $\Pi_{n,S}(S)$, so does $\Pi_{n,S}(Y)$. Thus one can consider the cohomology

$$H^1(\Pi_1(\eta), \mathrm{Aut}(\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}})))$$

By hypothesis the automorphism group of $Y_{\bar{\eta}}$ is isomorpihic to a complex semi-simple group, which is algebraic. Note that

$$\mathrm{Aut}(\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}})) \cong \mathrm{Aut}_{\bar{k}}(Y_{\bar{\eta}})$$

Hence replacing S by S' where S'/S is generically finite morphism,the element associated to the section is trivial in the cohomology

$$H^1(\Pi_1(\eta), \mathrm{Aut}(\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}})))$$

The canonical homomorphism

$$H^1(\Pi_1(\eta), \mathrm{Aut}(\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}}))) \to H^1(\Pi_1(\eta, \bar{\eta}), (\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{Aut}(\Pi_{n,S}(Y_{\bar{\eta}}))))$$

implies the triviality of the extension questioned above. One obtains the proof by vertue of the theory of Poincare-Segal n-groupoids. □

It is a fact that the automorphism group of a projective flat scheme over a locally noetherian scheme is a scheme by Grothendieck using Hilbert scheme method. Hence one has the following theorem in the same argument above:

Theorem 3.9. *Let S be a locally noetherian scheme. Let $f : X \to Y$ be a surjective morphism between projective flat schemes over S. Suppose X is isomorphic to a product $X_0 \times S$ where X_0 is a projective scheme.Then Y is also a product over a scheme S' where $S' \to S$ is a generically finite morphism.*

References

[AM] Adem, A. and Milgram, R., *Cohomology of finite groups.*, Grundlehren math. Wiss. 309, p. 317 (1991).

[BBD] Beilinson A.A., Bernstein I.N., Deligne P., *Faisceaux pervers.*, Analyse et Topologie sur les espaces singuliers(I), Conférence de Luminy, juillet 1981, Astérisque 100(1982).

[Berth] Berthelot, P., *Altérations de variétés algébraiques d'après A.J. DE JONG*, Séminaire Bourbaki 48, n° 815, pp.273-311(1997).

[BJ] Borceux, F. and Janelidze, G. *Galois Theories.*, cambridge studies in advanced math. 72 pp.341 ISBN 0 521 80309 8 2001

[Breen1] Breen, L., *Théorie de Schreier supériure.*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 25, pp. 465-514(1992).

[Breen2] Breen, L., *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, 225 Astérisque Société Mathématique p. 160 (1994).

[Brz] Brzezinski, T., Wisbauer, R., *Corings and Comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, Cambridge University Press, 2003.

[Cohn] Cohn, P.M., *Skew Fields*, Theory of general division rings, Encyclopedia of mathematics and applications 57.

[Fuj] Fujita, T., *On Kähler fibre spaces over curves.*, J. Math.Soc. Japan 30, pp. 779-794(1978).

[Gir] Giraud, J., *Cohomologie non abélienne.*, Grundlehren math. Wiss., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 467,(1971).

[SGA] Grothendieck, A. et al., *Sémiaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, SGA1, SGA4 I,II,III, SGA41/2, SGA5, SGA7 I,II, Lecture Notes in Mat., vols. 224,269-270-305,569,589,288-340, Springer-Verlag, New York, 1971-1977.

[GG] Grothendieck, A., *Fondaments de la géométrie algébrique.*, Secrétrariat mathématique, 11 rue Pierre Curis, Paris 5e, p. 236 (1962).

[Dix] Grothendieck A., Giraud J., Kleiman S., Raynaud M., Tate J., *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, Paris, 1968, pp.386.

[HS] Hirshowits, A. and Simpson, C., *Descente pour les n-champs.*, arXiv:math. AG/9807049v3 13 Mar 2001

[I] Iitaka, S., *Introduction to birational geometry.*, Graduate Textbook in Mathematics, Springer-Verlag, p. 357 (1976).

[Laum] Laumon, G., Moret-Bailly, L., *Champs algébraiques.*, Université de Paris-sud Mathématiques, p. 94 (1992).

[Kato] Kato, K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory., The Johns-Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, pp. 191-224(1989).

[Kaw] Kawamata, Y., *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fibre spaces.*, J. Reine Angew. Math. 363, pp. 1-46 (1985).

[1] KKMS Kemf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B., *Troidal embeddings I.*, Springer Lecture Notes, 339(1973).

[Ko1] Kollár, J., *Shafarevich maps and automorphic forms.*, Princeton university press, Princeton, New Jersey pp.201 1995.

[Ko2] Kollár, J., *Rational curves on algebraic varieties.*, Springer, Berlin-Heiderberg-Newyork-Tokyo, (1995)

[Kon] Kontsevich, M., Rosenberg A. *Noncommutative smooth spaces.*, arXiv:math.AG/9812158v1 30Dec 1998.

[Km1] Maehara, K., *Diophantine problems of algebraic varieties and Hodge theory in International Symposium Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and related Topics in Honor of Professor Shoshichi Kobayashi on his 60th birthday.*, R.I.M.S., Kyoto University October 26-30, Organizer: Junjiro Noguchi(T.I.T.), pp. 167-187 (1992).

[Km2] Maehara, K., *Algebraic champs and Kummer coverings.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.18, No.1, pp.1-9(1995).

[Km3] Maehara, K., *Conjectures on birational geometry.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.24, No.1, pp.1-10(2001).

[Mats] Matsuki, K., Introduction to the Mori Program., Universitext p. 468 Springer 2000

[Mat] Matsumura, H., On algebraic groups of birational transformations.,Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie VIII,34, 151-155 (1963).

[MO] Matsumura, H.and Oort, F., Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes, Inventiones Mathematicae, 1967 - Springer.

[MP] Miyaoka, Y., Peternel T., Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties., DMV Seminar Band 26 Birkhäiser p. 213 1997

[Mch] Mochizuki, S., The local Pro-p Anabelian Geometry of Curves., Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University RIMS-1097(1996).

[Mum] Mumford D., Selected Papers: On the classification of varieties and moduli spaces., Springer p. 795 2003

[Nak] Nakayama, N., Invariance of the plurigenera of algebraic varieties under minimal model conjectures., Topology 25(1986) 237-251.

[Ro] Rosenlicht, M., Some basic theorems on algebraic groups., xxxxx pp.401-443

[RBZL] Ribes, L., Zalesskii, P., Profinite Groups., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge Vol.40 Springer(1991).

[Ws] Schmid, W., *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping.*, Inventiones math., 22., pp. 211-319(1973).

[Se] J-P. Serre. Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics. , **5** 4th Ed. 1973.

[S1] Simpson, C., *Algebraic (geometric) n-stacks.*, arXiv:math. AG/9609014

[S2] Simpson, C., *A closed model structure for n-categories, internal Hom, n-stacks and generalized Seifer-Van Kampen.*, arXiv:math: AG/9704006 v2 17 Mar 2000

[S3] Simpson, C., *Homotopy Theory of Higher Categories, From Segal Categories to n-Categories and Beyond*, Cambridge University Press, ISBN 987-0-521-51695-2, p. 634, (2012)

[Shatz] Shatz, S., *Profinite groups, arithmetic, and geometry.*, Annals of Math. studies, N. 67, Princeton Uni. Press, p. 252,(1972).

[Vieh] Viehweg, E. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge.Band 30, p. 320 (1991).

[Zuo] Zuo, K., Representations of fundamental groups of algebraic varieties., Lecture Notes in Math. 1708, Springer, ISBN 3-540-66312-6.

CLOSED POLYNOMIALS IN POLYNOMIAL RINGS

TAKANORI NAGAMINE

Abstract. Let R be an integral domain. In this paper, we study closed polynomials in $R^{[n]}$. We give some sufficient conditions for a non-constant polynomial to be closed in $R^{[n]}$.

1. Introduction

Let R be an integral domain with unit and let $R^{[n]}$ be the polynomial ring in n variables over R. We denote by K the quotient field of R. A non-constant polynomial $f \in R^{[n]} \setminus R$ is said to be *closed in* $R^{[n]}$ if the ring $R[f]$ is integrally closed in $R^{[n]}$. When R is a field, closed polynomials in $R^{[n]}$ have been studied by several mathematicians. See, e.g., Nowicki [7], Nowicki–Nagata [8], Ayad [2], Arzhantsev–Petravchuk [1], Jędrzejewicz [3], etc. In particular, in the case where $n = 2$, some sufficient conditions for a non-constant polynomial to be closed in $R[x, y]$ is known. Let $f, g \in R[x, y] \setminus R$ be non-constant polynomials. By virtue of [2], we know that if $\gcd(f_x, f_y) = 1$, then f is closed in $R[x, y]$. In [7], it is proved that, if f is primitive homogeneous (see Section 2 for the definition of primitive homogeneousness), then f is closed. Also, if $f_x g_y - f_y g_x$ is non-zero constant, then f and g are closed.

In this paper, we study closed polynomials in $R^{[n]}$ for any integral domain R based on the paper [6]. For a non-constant polynomial $f \in R^{[n]} \setminus R$ such that $K[f] \cap R^{[n]} = R[f]$, we give in Propositions 2.10 and 2.11 some sufficient conditions on f to be closed in $R^{[n]}$.

2. Closed polynomials

Let R be an integral domain and let $A = R^{[n]} = R[x_1, ..., x_n]$ be the polynomial ring in n variables over R. When a non-constant polynomial $f \in A \setminus R$ is given, it is difficult to estimate the closedness of f. In the case where R is a field of characteristic zero, the following result is well known.

Date: August 11, 2015.

Key words and phrases. Closed polynomial; Derivation.

Proposition 2.1. (cf. [2, Proposition 14] or [3, Proposition 4.2]) *Assume that R is a field of characteristic zero. Let $f \in A \backslash R$ be non-constant polynomial. If $\gcd\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1$, then f is closed in A.*

In this section we give some sufficient conditions for a non-constant polynomial $f \in A \setminus R$ to be closed in A.

Let f and g be polynomials in A. Then we write $f \sim g$ if $f = ag$ for some $a \in R \setminus \{0\}$. Now we represent f as

$$f = \sum_{\boldsymbol{a} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} u_{\boldsymbol{a}} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n},$$

where $u_{\boldsymbol{a}} \in R$ and $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. Then we denote by $\mathrm{Supp}(f)$ the set $\{\boldsymbol{a} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid u_{\boldsymbol{a}} \neq 0\}$. Let $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$ be an element of $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. We say that the $\mathbf{w}$-*degree of* f, denoted by $\deg_{\mathbf{w}} f$, is the maximal element of the set $\{\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{w} \mid \boldsymbol{a} \in \mathrm{Supp}(f)\}$, where $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{w} = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$. We assume that the $\mathbf{w}$-degree of the zero-polynomial is $-\infty$.

A polynomial $f \in A$ is said to be $\mathbf{w}$-*homogeneous* if $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{w} = \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{w}$ for any $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{Supp}(f)$. We say that $f \in A$ is a *primitive* $\mathbf{w}$-*homogeneous polynomial* if f is a $\mathbf{w}$-homogeneous polynomial and there exist no $\mathbf{w}$-homogeneous polynomials $h \in A$ such that $f \sim h^m$ for some $m \geq 2$. If $\deg_{\mathbf{w}} f \geq 2$, then we denote by $\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)$ the minimal element of $\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 2 \text{ and } m \mid \deg_{\mathbf{w}} f \}$. For example, if $\deg_{\mathbf{w}} f$ is a prime number, then $\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f) = \deg_{\mathbf{w}} f$.

We denote the set $\{R[f] \mid f \in R^{[n]} \setminus R\}$ by $\mathrm{M}(R, n)$. It is clear that the set $\mathrm{M}(R, n)$ is ordered by inclusion. For a polynomial $f \in R^{[n]}$, we denote the set $\{g \in R^{[n]} \mid R[f] \subset R[g]\}$ by $\mathrm{M}_f(R, n)$. From Lemma 2.2 to Corollary 2.7 below, we assume that R is a UFD. We denote by K the quotient field of R. We show the following three lemmas.

Lemma 2.2. *Let $f \in A \setminus R$ be a non-constant polynomial such that $K[f] \cap A = R[f]$. Let $g \in A$ be a polynomial. If $f \sim g$, then $R[f] = R[g]$.*

Proof. Suppose that $f \sim g$. Then $f = ag$ for some $a \in R \setminus 0$ and so $R[f] \subset R[g]$. On the other hand, we have

$$R[f] = K[f] \cap A = K[ag] \cap A = K[g] \cap A \supset R[g].$$

Therefore $R[f] = R[g]$. □

Lemma 2.3. *Let $f \in A \setminus R$ be a non-constant polynomial and let $\mathbf{w}$ be an element of $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. Assume that $\deg_{\mathbf{w}} f > 0$. Set $p = \gcd(f_{x_1}, ..., f_{x_n})$. We represent f as $f = u(g)$ for some $g \in \mathrm{M}_f(R, n)$ and $u(t) \in R^{[1]}$, where $u(t) = \sum_{i=0}^{m} u_i t^i, u_i \in R$ and $u_m \neq 0$. Then the following assertions hold true.*

(1) $\deg_{\mathbf{w}} f = m\deg_{\mathbf{w}} g$, *where* m *is the degree of* $u(t)$.
(2) $\deg_{\mathbf{w}} p \geq \deg_{\mathbf{w}} u'(g)$.
(3) *If the characteristic of* R *equals zero, then* $\deg_{\mathbf{w}} p \geq \frac{m-1}{m}\deg_{\mathbf{w}} f$.

Proof. (1) If $\deg_{\mathbf{w}} g = 0$, then $\deg_{\mathbf{w}} f = \deg_{\mathbf{w}} u(g) = 0$. This contradicts the assumption $\deg_{\mathbf{w}} f > 0$. Thus, we have $\deg_{\mathbf{w}} g > 0$ and $\deg_{\mathbf{w}} f = m\deg_{\mathbf{w}} g$.

(2) Since $f = u(g)$, we know $f_{x_i} = u'(g)g_{x_i}$ for every $i = 1, 2, ..., n$. Then $u'(g) \mid p$. So the assertion follows.

(3) Since the characteristic of R equals zero, $\deg_{\mathbf{w}} u'(g) = (m-1)\deg_{\mathbf{w}} g$. It follows from (1) and (2) that

$$\deg_{\mathbf{w}} p \geq \deg_{\mathbf{w}} u'(g) = (m-1)\deg_{\mathbf{w}} g = \tfrac{m-1}{m}\deg_{\mathbf{w}} f.$$

□

Lemma 2.4. *Let* $\mathbf{w}$ *be an element of* $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ *and let* $f \in A \setminus R$ *be a non-constant polynomial. Assume that* f *is* $\mathbf{w}$*-homogeneous and* $\deg_{\mathbf{w}} f > 0$. *Let* g *be a polynomial in* $\mathrm{M}_f(R, n)$ *such that* $g(0, ..., 0) = 0$. *Then the following assertions hold true.*

(1) g *is* $\mathbf{w}$*-homogeneous.*
(2) $f \sim g^m$ *for some positive integer* m.

Proof. Since f is $\mathbf{w}$-homogeneous and $\deg_{\mathbf{w}} f > 0$, we see $f(0, ..., 0) = 0$. Now we write as

$$f = u(g) = \sum_{i=1}^{m} u_i g^i = g \sum_{i=1}^{m} u_i g^{i-1},$$

where $u_i \in R, u_m \neq 0$ and m is a positive integer. Since f is $\mathbf{w}$-homogeneous, g and $\sum_{i=i}^{m} u_i g^{i-1}$ are $\mathbf{w}$-homogeneous. Put $g_1 = \sum_{i=1}^{m} u_i g^{i-1}$. Then $g_1(0, ..., 0) = \sum_{i=1}^{m} u_i\big(g(0, ..., 0)\big)^{i-1} = u_1$ and $\deg_{\mathbf{w}} g_1 = (m-1)\deg_{\mathbf{w}} g \geq 0$. If $m = 1$, then $f = u_1 g$ and hence $f \sim g$. Otherwise, we have $u_1 = 0$ and

$$g_1 = g \sum_{i=2}^{m} u_i g^{i-2}.$$

Hence $\sum_{i=2}^{m} u_i g^{i-2}$ is $\mathbf{w}$-homogeneous. Using the same argument repeatedly, we have $f = u_m g^m$, which implies $f \sim g^m$. □

The following two results are the main results of this section.

Theorem 2.5. *Let* R *be a UFD and* $A := R[x_1, ..., x_n]$ *the polynomial ring in* n *variables over* R. *Let* $\mathbf{w}$ *be an element of* $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. *For a* $\mathbf{w}$*-homogeneous polynomial* $f \in A \setminus R$ *such that* $\deg_{\mathbf{w}} f > 0$ *and* $K[f] \cap A = R[f]$, f *is primitive if and only if* f *is closed in* A.

Proof. It is clear that, if f is not primitive, then f is not closed in A.

Now we prove the "only if" part of the assertion. According to [4, Theorem 1.1], it suffices to prove the maximality of the ring $R[f]$ in $\mathrm{M}(R,n)$.

Let g be any polynomial in $\mathrm{M}_f(R,n)$. Without loss of generality we may assume that $g(0,...,0)=0$. By Lemma 2.4, we see g is $\mathbf{w}$-homogeneous and $f\sim g^m$ for some positive integer m. Since f is primitive, we have $m=1$. Hence $f\sim g$. By Lemma 2.2, we have $R[f]=R[g]$. Therefore, $R[f]$ is a maximal element of $\mathrm{M}(R,n)$. □

Theorem 2.6. *Let R be a UFD of characteristic zero and $A:=R[x_1,...,x_n]$ the polynomial ring in n variables over R. Let $f\in A\backslash R$ be a non-constant polynomial such that $K[f]\cap A=R[f]$. Set $p=\gcd(f_{x_1},...,f_{x_n})$. If there exists an element $\mathbf{w}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ such that $\deg_{\mathbf{w}} f=1$ or $\deg_{\mathbf{w}} f\geq 2$ and $\deg_{\mathbf{w}} p<\frac{\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)-1}{\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)}\deg_{\mathbf{w}} f$, then f is closed in A.*

Proof. We prove the maximality of the ring $R[f]$ in $\mathrm{M}(R,n)$. Let g be any polynomial in $\mathrm{M}_f(R,n)$. Then $f=u(g)$, where $u(t)=\sum_{i=0}^m u_i t^i\in R^{[1]}, u_i\in R$ and $u_m\neq 0$. If $\deg_{\mathbf{w}} f=1$, then it follows from Lemma 2.3 that $m=1$. Otherwise, by Lemma 2.3, we have

$$\tfrac{m-1}{m}\deg_{\mathbf{w}} f\leq \deg_{\mathbf{w}}\bar{f}<\tfrac{\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)-1}{\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)}\deg_{\mathbf{w}} f.$$

Therefore $1\leq m<\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)$ and so $m=1$. By Lemma 2.2, we have $R[f]=R[g]$. □

Using Theorem 2.6, we have the following.

Corollary 2.7. *Let the notations and assumptions be the same as Theorem 2.6. If $f_{x_i}\neq 0$ and $f_{x_j}\neq 0$ for some $i\neq j$ and $p=\gcd(f_{x_1},...,f_{x_n})\in R[x_1]\cup\cdots\cup R[x_n]$, then f is closed in A.*

Proof. Without loss of generality we may assume that $f_{x_1}\neq 0, f_{x_2}\neq 0$ and $p\notin R[x_1]$. Put $\mathbf{w}=(1,0,...,0)$. We know that $\deg_{\mathbf{w}} f\geq 1$ and $\deg_{\mathbf{w}} p=0$. By Theorem 2.6, we see that f is closed in A. □

Let $f\in A\setminus R$ be a non-constant polynomial. In the case where R is a field, the assumption $K[f]\cap A=R[f]$ is satisfied for any $f\in A$. So Corollary 2.7 is stronger than Proposition 2.1 and Theorem 2.5 includes [7, Theorem 2.3]. Furthermore, using Corollary 2.7, we can easily prove [7, Theorem 2.2].

Corollary 2.8. (cf. [7, Theorem 2.2]) *Let k be a field of characteristic zero. Let f and g be polynomials in $k[x,y]$. If $f_xg_y-f_yg_x\in k\setminus\{0\}$, then f and g are closed in $k[x,y]$.*

Proof. If $f_x = 0$, then $f_y g_x \in k \setminus \{0\}$. Then $f_y \in k \setminus \{0\}$ and so $f = ay + b$ for some $a, b \in k$ and $a \neq 0$. Hence f is closed.

Suppose that $f_x \neq 0$ and $f_y \neq 0$. Put $p = \gcd(f_x, f_y)$ and $f_x = h_1 p, f_y = h_2 p$, where $h_1, h_2 \in k[x, y]$. Then $p(h_1 g_y - h_2 g_x) = f_x g_y - f_y g_x \in k \setminus \{0\}$ and so $p \in k \setminus \{0\}$. It follows from Corollary 2.7 that f is closed in $k[x, y]$. By symmetry, g is closed too. □

In the rest of this section, we generalize Theorems 2.5 and 2.6 and Corollary 2.7 over an integral domain under some conditions.

Let R be an integral domain. We set $A_K = K \otimes_R A = K^{[n]}$, where K denotes the quotient field of R.

Lemma 2.9. *Let $f \in A \setminus R$ be a non-constant polynomial such that $K[f] \cap A = R[f]$. Then f is closed in A if and only if f is closed in A_K.*

Proof. The implication "⇒" is clear. We prove the part "⇐". Suppose that f is closed in A_K. It follows from [1, Theorem 1] that $K[f]$ is a maximal element of $M(K, n)$. By the assumption on f and [5, Theorem 3.1], we know that f is closed in A. □

Let $f \in A \setminus R$ be a non-constant polynomial. We may assume that f and each f_{x_i} are elements of A_K. Then we can define the greatest common divisor of $f_{x_1}, ..., f_{x_n}$ as an element of A_K.

Proposition 2.10. *Let R be an integral domain and $A := R[x_1, ..., x_n]$ the polynomial ring in n variables over R. Let $\mathbf{w}$ be an element of $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. For a $\mathbf{w}$-homogeneous polynomial $f \in A \setminus R$ such that $\deg_{\mathbf{w}} f > 0$ and $K[f] \cap A = R[f]$, f is primitive in A_K if and only if f is closed in A.*

Proof. Using Theorem 2.5 in the case $R = K$, f is primitive in A_K if and only if f is closed in A_K. Hence, by virtue of Lemma 2.9, we obtain the assertion. □

The following proposition is proved by using the same argument in the proof of Proposition 2.10.

Proposition 2.11. *Let R be an integral domain of characteristic zero and $A := R[x_1, ..., x_n]$ the polynomial ring in n variables over R. Let $f \in A \setminus R$ be a non-constant polynomial such that $K[f] \cap A = R[f]$. Set $p = \gcd(f_{x_1}, ..., f_{x_n})$ as an element of A_K. If one of the following conditions (1) and (2) holds true, then f is closed in A.*

(1) *There exists $\mathbf{w} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ such that $\deg_{\mathbf{w}} f = 1$ or $\deg_{\mathbf{w}} f \geq 2$ and $\deg_{\mathbf{w}} p < \frac{\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f) - 1}{\mathrm{LD}_{\mathbf{w}}(f)} \deg_{\mathbf{w}} f$.*
(2) *$f_{x_i} \neq 0$ and $f_{x_j} \neq 0$ for some $i \neq j$ and $p \in K[x_1] \cup \cdots \cup K[x_n]$.*

References

[1] I. V. Arzhantsev and A. P. Petravchuk, Closed polynomials and saturated subalgebras of polynomial algebras, Ukrainian Math. J., **59** (2007), 1783–1790.
[2] M. Ayad, Sur les plynômes $f(X, Y)$ tels que $K[f]$ est intégralement fermé dans $K[X, Y]$, Acta Arith., **105** (2002), 9–28.
[3] P. Jędrzejewicz, Positive characteristic analogue of closed polynomials, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 50–56.
[4] M. Kato and H. Kojima, Closed polynomials in polynomial rings over unique factorization domains, Comm. Algebra, **43** (2015), 1935–1938.
[5] H. Kojima and T. Nagamine, Closed polynomials in polynomial ring over integral domain, J. Pure Appl. Algebra, **219** (2015), 5493–5499.
[6] T. Nagamine, Derivations having divergence zero and closed polynomials over domains, preprint.
[7] A. Nowicki, On the equation $J(f, g) = 0$ for polynomials in $k[x, y]$, Nagoya Math. J., **109** (1988), 151–157.
[8] A. Nowicki and M. Nagata, Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ., **28** (1988), 111–118.

(T. Nagamine) Graduate School of Science and Technology, Niigata University, 8050 Ikarashininocho, Nishi-ku, Niigata 950-2181, Japan
E-mail address: f14a056k@mail.cc.niigata-u.ac.jp

PV number による
n次元ファレイ空間の結晶理論

赤松昌俊(情報工学科 4 年)

小林祐志(電気電子工学科 4 年)

[要約]

PV number による n 次元ファレイ空間の結晶理論

研究目的:ファレイ数列によって，単独ニューロンモデルの理論や実際の複雑な生命現象のモデル化へのアプローチがなされており，ファレイ数列の理論に大きな可能性を感じたため，ファレイ数列の高次元理論を構築することで，将来の科学の数理基礎の一つを提示できるのではないかと考えた．そのため，研究目的を**「ファレイの既約分数理論の高次元化」**とした．

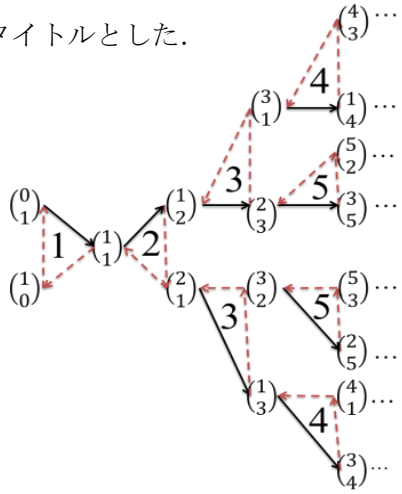
そのために，ファレイの既約分数理論のようなn次元ファレイ点の理論構築と，それをもとにファレイ点の数学的構造を幾何学的に研究することを行った．

研究方法：ファレイの既約分数理論とは 2 つの分数$\frac{0}{1}$と$\frac{1}{1}$を初期値とし，それらの分子同士，分母同士をそれぞれ足し算して次の既約分数をつくり，この操作をくり返して 0 と 1 の間のすべての既約分数を生み出すものである．より具体的には，ステップ 0 のファレイ数列を$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}$とする．ステップ 1 のファレイ数列は$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$を加えた$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\}$である．ステップ 2 以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ，隣り合った 2 つの分数から新しい分数を上の演算で作っていく．したがって，ステップ 2 のファレイ数列は$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\}$で，ステップ 3 のファレイ数列は$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right\}$というようになる．そして，この操作を無限に繰り返すことで全ての既約分数が生まれるのである．

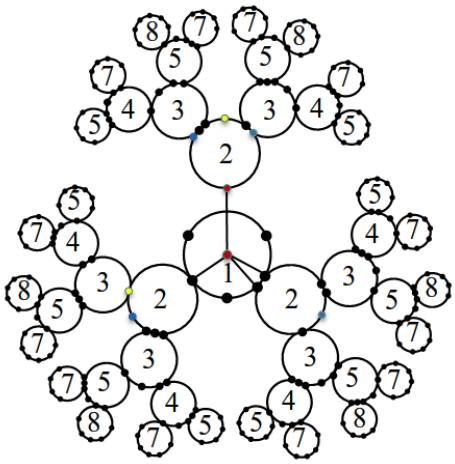
私達は，既約分数$\frac{a}{b}(a>0,b>0)$を，分数ではなく点(a,b)と考えることで，その研究対象をn個の自然数からなる既約点$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$に拡張した．この点を**n 次元ファレイ点**と呼び，n次元ファレイ点全体を**n次元ファレイ空間**と呼んだ．そして，S.Kim と S.Ostlund の論文を読んでいく中で，ファレイ点が PV number に収束するということを知り，PV number の多項式を固有多項式にもつ行列によって，n次元ファレイ点を生み出せるのではないかと考えた．

研究結果：2 次元ファレイ空間においては，$(0,1)$ **から全てのファレイ点を生み出す行列を発見することに成功した**．それはより一般的なn次元ファレイ点においても，有限個のファレイ点からすべてのファレイ点を生み出す行列理論への拡張に繋がった．

この発見の後，私達が行ったファレイ空間の構造研究における主たる研究結果は，2 次元では 3 つの点$(0,1),(1,0),(1,1)$から構成される**基本ファレイ原子**の存在の発見である．**そして，その相似な原子で 2 次元ファレイ空間は埋め尽くされていたのである．3 次元では 7 つの点から構成される基本ファレイ原子が存在し，そしてその相似な原子で 3 次元ファレイ空間は埋め尽くされていた．**私達にはそれがまるで結晶のように見えたため，それを研究タイトルとした．



2 次元ファレイ空間の結晶構造



3 次元ファレイ空間の結晶構造

1．はじめに

私達はファレイ数列の構成法と既約性に興味を持ち，ファレイ数列について調べていくなかで，“神経回路モデルのカオス”[1]という本に出会った．その本では，ファレイ数列を用いた単独ニューロンモデルの理論が書かれてあった．そして，実際の複雑な生命現象のモデル化へのファレイ数列によるアプローチはとても刺激的であった．私達はファレイ数列の理論の大きな可能性を感じたため，ファレイ数列の高次元理論を構築することで，将来の科学の数理基礎の一つを提示できるのではないかと考えた．以上のことから**「ファレイの既約分数理論を高次元化する」**これが私達の目標となった．

ファレイの既約分数理論とは 2 つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし，それらの分子同士，分母同士をそれぞれ足し算して次の既約分数をつくり，この操作をくり返して 0 と 1 の間のすべての既約分数を生み出すものである．より具体的には，ステップ 0 のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}$ とする．ステップ 1 のファレイ数列は $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ を加えた $\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\}$ である．ステップ 2 以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ，隣り合った 2 つの分数から新しい分数を上の演算で作っていく．したがって，ステップ 2 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\}$ で，ステップ 3 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right\}$ というようになる．そして，この操作を無限に繰り返すことで全ての既約分数が生まれるのである．

私達は，既約分数 $\frac{a}{b}\,(a>0,b>0)$ を，分数ではなく点 (a,b) と考えることで，その研究対象をn個の自然数からなる既約点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ に拡張した．この点を **n 次元ファレイ点**と呼び，n次元ファレイ点全体を**n次元ファレイ空間**と呼んだ（§2 参照）．そして，ファレイの既約分数理論のようなn次元ファレイ点の理論構築と，それをもとにファレイ点の数学的構造を幾何学的に研究することを目標とした．

今年度は，インターネットで見つけた S.Kim と S.Ostlund の論文[2]を読んでいく中で，ファレイ点が PV number に収束するということを知った．そして，その新しい観点からファレイ空間の研究をスタートさせた．その結果，2 次元ファレイ空間においては，$(0,1)$ **から全てのファレイ点を生み出す行列を発見することに成功した**．それはより一般的なn次元ファレイ点においても，有限個のファレイ点からすべてのファレイ点を生み出す行列理論への拡張に繋がった．

この発見の後，私達が行ったファレイ空間の構造研究における主たる研究結果は，2 次元では 3 つの点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ から構成される**基本ファレイ原子**の存在の発見である．**そしてその相似な原子で 2 次元ファレイ空間は埋め尽くされていたのである．3 次元では 7 つの点から構成される基本ファレイ原子が存在し，そしてその相似な原子で 3 次元ファレイ空間は埋め尽くされていた**．私達にはそれがまるで結晶のように見えたため，それを研究タイトルとした．以下，これらの発見を中心にファレイ空間の結晶構造について詳しく論じていく．

2．n次元ファレイ点の定義

まず，私達が研究対象とするn次元ファレイ点と，n次元ファレイ空間$\Im_n$を定義する．

定義 1．点$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$が**n次元ファレイ点**とは，次の 2 つの条件を満たすものをいう．

① $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \cdots a_n \geq 0$　② $\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$（ただし，$r \leq n$で，$a_j = 0$であるものは含まない．）

定義 2．n次元ファレイ空間$\Im_n$とは，n次元ファレイ点全体のことをいう．

インターネットで論文を検索した結果，私達と同じように高次元ファレイ点を研究している論文が 2 つ見つかった．1 つは,S.Kim と S.Ostlund の論文[2]で，もう一つは A.Nogueira と B.Sevennec 論文[3]である．[3]は特殊線形群$SL(n,\mathbb{Z}_+)$の立場から高次元ファレイ数列を論じたものであるが，詳細は 3 次元までの一部の議論で終わっているように見えた．[2]では，ある変換行列を使って高次元ファレイ空間の構造の研究が行われていた．そして，彼らの定義した超黄金比により，ファレイ点列の収束が研究された．しかし，各次元での超黄金比の定義の複雑さと幾何学条件の制約などにより，5 次元までの議論で終わっていた．しかし，今回この研究で用いられた PV number が私達の研究の鍵となっている．以下で詳しく論じることになるが，私達はn次元ファレイ空間を，フィボナッチ数列や，その類似な数列の並列空間と見て，その構造を研究することに取り組み，高次元への拡張にある意味で成功したのである．

3．PV number によるファレイ生成行列

n次元ファレイ空間$\Im_n$の構造を研究する上で私達は PV number に関する多項式に着目した．PV number xとは，正数xをn乗していくと，そのxのn乗に最も近い整数をとの距離が 0 になっていくもののことである．

具体的には，PV number を小さい順に並べると，それらは以下の多項式の正数解である．

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x^3 - x - 1 = 0$$
$$x^4 - x^3 - 1 = 0$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$$
$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$
$$x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1 = 0$$
$$\vdots$$

特に，この多項式の中の$x^2 - x - 1 = 0$の解は、黄金比である．この意味で PV number は黄金比の一般化（超黄金比）と考える見方もある．

4．2 次元ファレイ点の生成行列

2 次元ファレイ点について論じる．2 次元においての PV number の多項式は　$x^2 - x - 1 = 0$　である．この多項式を固有多項式としてもつ行列は，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$となる．そして，これを 2 次元ファレイ生成行列とする．

$$U_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

2 次元ファレイ生成行列

私達は，最小の PV number を解にもつ多項式から生み出された行列 U_2をうまく利用すれば，全ての 2 次元ファレイ点を生み出す理論が得られるかもしれないと考えた．

定義 3． 変換 $F:\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}$，**初期値**$:\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ は，次の 2 つの操作のどちらかを行う．

① f_1: $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}\mapsto U_2\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}$　　② f_2: $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}\mapsto U_2\begin{pmatrix}-a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n'\\ b_n'\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}|a'|\\ |b'|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}$

（注意） $F^{-1}:\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a'\\ b'\end{pmatrix}$ は，次の操作$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\mapsto U_2^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}|a_1|\\ |b_1|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'\\ b'\end{pmatrix}$を意味する．

変換 F をすると，図 1 のようにファレイ点が生み出される．

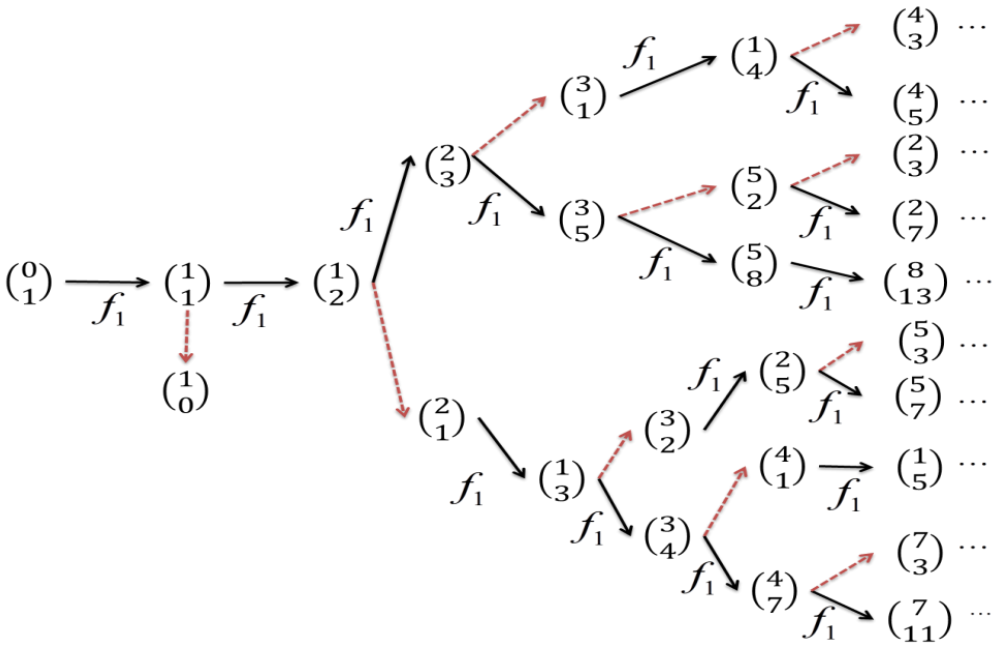


図 1　（変換 F から生み出される 2 次元ファレイ空間）

5．変換 F から生み出される 2 次元ファレイ空間の構造

私達は，操作 F を繰り返すことで，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ からすべての 2 次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した．

主結果 1． 2 次元ファレイ空間 $\Im_2$ の任意のファレイ点は，操作 F を繰り返すことで，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ から生み出される．逆にいえば，任意のファレイ点は有限回の操作 F^{-1} で $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に変換される．

（証明）　$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ が F^{-1} で $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に変換されることを示す．

①ある k が存在し $a<b<ka$ とすると

$$F^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-a\\a\end{pmatrix},\ F^{-1}\begin{pmatrix}b-a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-2a\\b-a\end{pmatrix},\ F^{-1}\begin{pmatrix}b-2a\\b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b-2a\end{pmatrix},$$
$$F^{-1}\begin{pmatrix}a\\b-2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-3a\\a\end{pmatrix},\ \cdots\ ,F^{-1}\begin{pmatrix}a\\b-(k-2)a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-(k-1)a\\a\end{pmatrix}.$$

$a'=b-(k-1)a,\ \ b'=a$ とおくと $a>a',\ \ b>b'$ かつ $b'>a'$ が成り立つ．これは F^{-1} を繰り返すことで $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に変換されることを示す．②$b\le a$ を仮定すると，$F^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-a\\a\end{pmatrix}$ で $b-a<a$ であるので①に帰着する．既約性に関しては初等的な整数論を使えば証明できる．（証明終）

6．2 次元のファレイ原子と結晶構造について

主結果 1 の変換の様子を詳細に研究した結果，ファレイ空間 $\Im_2$ は，操作 F によって右の図のような三角形に分割された構造を持つことがわかった．

右図における棒矢印は f_1 ，点線矢印は f_2 を表す．これに関して私達は $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ というように 3 点 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が連結ループ構造をもつことを発見した．この 3 点連結ループ構造を**ファレイ原子**と呼ぶ． そして，すべてのファレイ点においてファレイ原子が構成されていた．これが主結果 2 である．主結果 2 を定式化すると次のようになる．

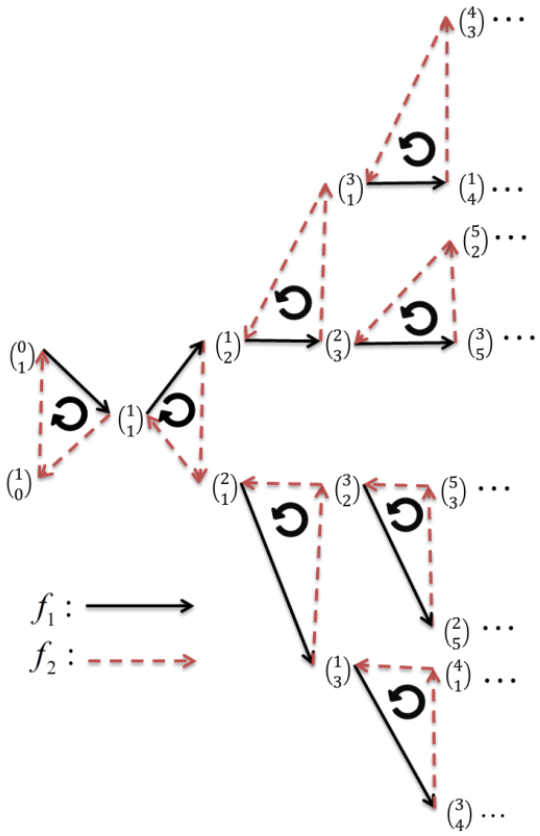


図 2　(2 次元ファレイ原子と結晶構造)

主結果 2.（ファレイ結晶構造定理）

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を任意のファレイ数とすると，

$$(f_2 \circ f_2 \circ f_1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \left(\text{ただし} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

すなわち，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ が連結なループ構造を作る．

（**注意**）特に，ファレイ原子 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を**基本ファレイ原子**と呼ぶ．実は基本ファレイ原子だけは F^{-1} でループする．つまり，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっている．

7．ファレイ原子のインデックス

主結果 2 より，2 次元ファレイ空間 $\Im_2$ は，3 点からなるファレイ原子が繰り返しパターンで配置されていることがわかる．そしてファレイ原子である 3 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ により，ファレイ原子を特徴づける以下の主結果 3 を発見した．

主結果 3．ファレイ原子を構成する 3 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ をベクトルとして足すと，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = 2(a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

定義 4．ファレイ原子 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ に対して $a+b$ をファレイ原子の**インデックス**という．（図 3 参照）

私達は，2 次元ファレイ空間 $\Im_2$ のファレイ原子配置をインデックスだけに着目し，インデックス構造を研究した．次の図 5 がインデックス構造であり，これを**インデックスツリー**と名付けた．

主結果 5．インデックスツリーはファレイツリーと類似の構造をもつ．（図 4 と図 5 参照）

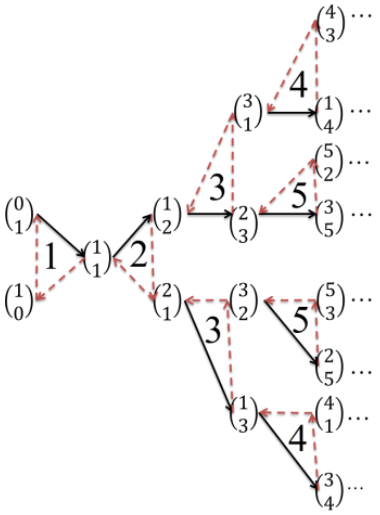


図 3（ファレイ原子のインデックス）

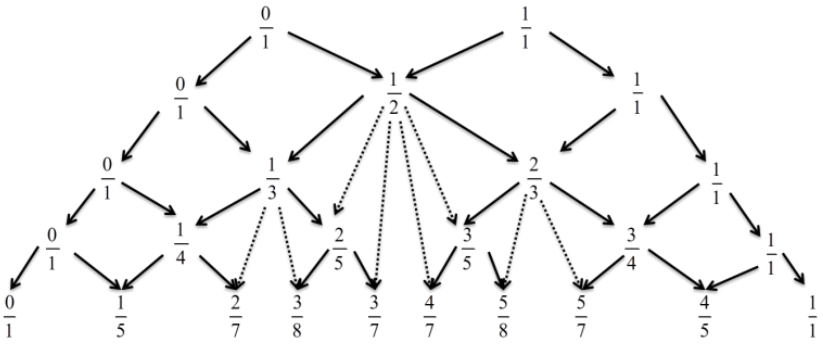


図 4（ファレイツリー）

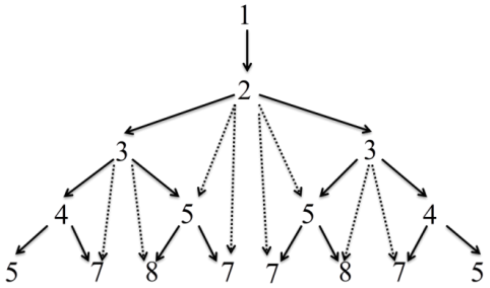


図 5 （インデックスツリー）

8．3 次元ファレイ空間の結晶構造について

3 次元での，PV number の多項式は$x^3 - x - 1 = 0$である．この固有多項式を持つ行列は数多く存在していたが，その中から生成される 3 次元ファレイ点の構造が 2 次元と類似している行列を選択した．3 次元ファレイ生成行列は以下とする．

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 次元ファレイ生成行列

定義 5.

変換F: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$は，次の２つの操作のいずれかを行う．

① f_1: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto U_3 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

② f_2: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto U_3 \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

任意の 3 次元ファレイ点$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$から新たなファレイ点を生み出す場合の符号の組み合わせには，

$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$の 8 種類がある．

しかし，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a+b \end{pmatrix}$となり，符号の違いが関係してくるのは$a$と$b$だけである．変換Fでは絶対値をとるため，$|a+b| = |-a-b|$, $|a-b| = |-a+b|$となり，符号の組み合わせは$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}$の 2 種類のみでよいことがわかる．

さらに，私達は 2 次元のときと同様に，操作Fを繰り返すことで，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$からすべての 3 次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した．そして，次の主結果を得た．

主結果 6．

3 次元ファレイ空間$\Im_3$の任意のファレイ点は，変換Fを繰り返すことで，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$から生み出される．そして，任意のファレイ点は有限回の変換F^{-1}で 7 点からなるファレイ原子のループに落ち込む．

（証明）　主結果 1 と同様の議論で示される．（証明終）

さて，3 次元においてもファレイ原子は存在するのだろうか．これが私達の次なるテーマとなった．コンピュータで調べた結果，すぐにわかったことは 7 点$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$が$F^{-1}$で連結され，ループ構造を形成していたことである．そして，私達は 2 次元における主結果 2 と同様なファレイ結晶構造があることを期待した．実際コンピュータでの計算結果はいつも肯定的であった．主結果 6 より，右の 7 点の連結ループ構造は，基本的であるため，これを基本ファレイ原子と呼ぶことにした．

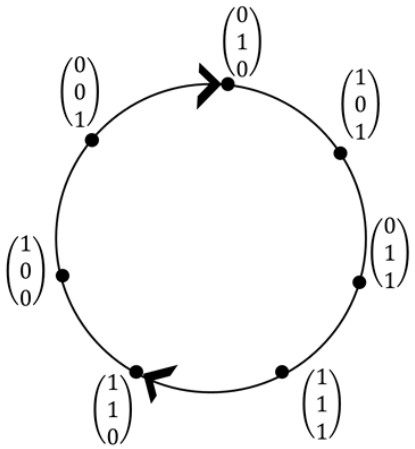


図 6　(7 点の基本ファレイ原子)

主結果 7(予想)．$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$を 3 次元ファレイ点とすると，それを含む連結なループ構造が存在し，それは最低 7 点で構成される．1 つのループには異なる 3 つのループが連結する．ただし，すべてのファレイ点がループ構造をもつわけではない．

図 7 におけるループ[1]は基本ファレイ原子である．以下にその他のループを構成しているファレイ点を書き出す．

ループ[2]$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

ループ[3]$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

ループ[4]$\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$

ループ[5]$\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$

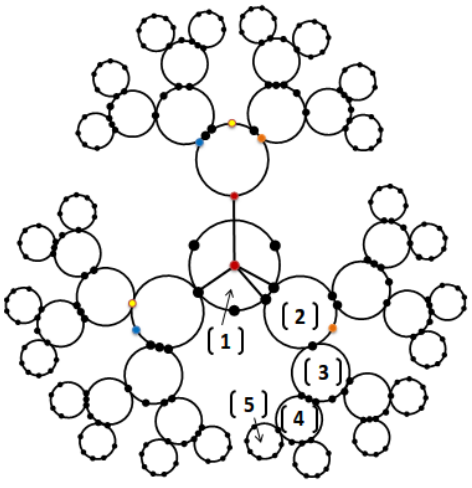


図 7　(3 次元ファレイ空間のループ構造)

そしてループ[1]の 7 つの構成点をベクトルと考えた時の 7 点の総和は $\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ となる．ループ[2]における 7 点の総和は $\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix}$，ループ[3]は $\begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix}$，ループ[4]は $\begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix}$ になる．そこでこのループの総和を 4 で割ったものをそのループのインデックスとした．

また，主結果 7 で述べたように，ループを持たない 3 次元ファレイ点が存在する．予想ではあるが，図 8 のようにループとループをつなぐバイパスのような構造をしているのではないかと考えているが，現在のところ研究中である．

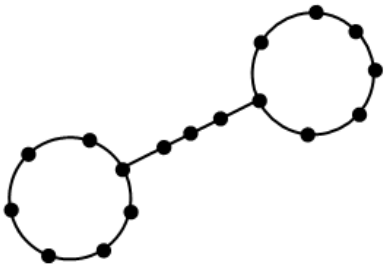


図 8 (バイパスのイメージ図)

3 次元においても，2 次元と同様なインデックス構造をしているのか研究を進めた．

主結果 8. 3 次元でのインデックス構造は 2 次元と同様にファレイツリーと類似した構造をもつ．（図 4 と図 9 参照）

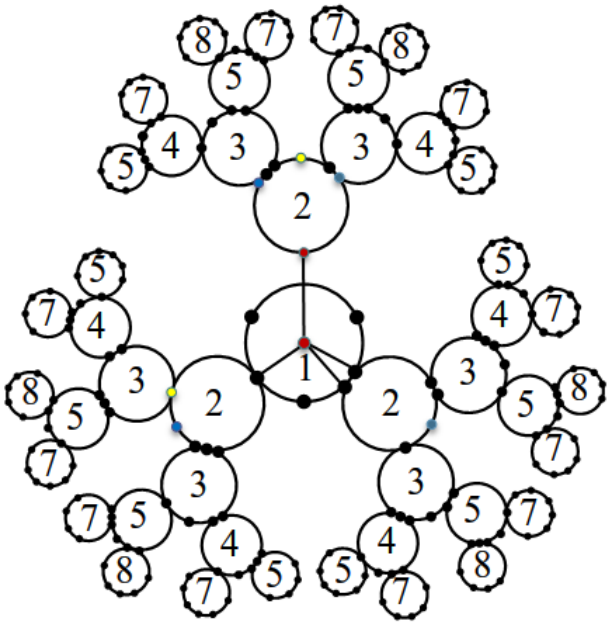


図 9 (3 次元ファレイ空間のインデックス構造)

ループ構造とバイパスをもつ 3 次元ファレイ結晶構造は，すべての 3 次元ファレイ点から構成されていると考える．そのことから，以下のことを予想した．

予想.
3 次元ファレイ結晶構造は 3 次元ファレイ空間である．

9．4 次元以上のファレイ空間の結晶構造

ファレイ生成行列を決定するには，以下の条件を満たす必要がある．

① 任意のファレイ点から新たなファレイ点を生み出す．

② 任意のファレイ点に有限回の変換$\mathbf{F^{-1}}$をするとただ 1 つの基本ファレイ原子に落ち込む．

③ PV number を解にもつ多項式を固有多項式にもつ．

④ 生み出されたファレイ点の構造が 2 次元ファレイ点の構造と類似している．

4 次元のファレイ生成行列は PV number の$x^4 - x^3 - 1 = 0$を固有多項式に持ち，上の条件から次の行列と考えている．

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 次元ファレイ生成行列

4 次元でも 2 次元，3 次元と同様に 4 次元ファレイ生成行列から全てのファレイ点が生み出されるのではないかと考えた．

5 次元では，PV number の$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$を固有多項式に持ち，条件から次の行列を 5 次元ファレイ生成行列と考えている．

$$U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 次元ファレイ生成行列

6 次元ファレイ生成行列となりうる PV number は$x^3 - x^2 - 1 = 0$，$x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1 = 0$のどちらか 1 つではないかと考えている．

n 次元ファレイ空間$\Im_n$の結晶構造の今後の研究課題

① 6 次元以上の PV number によるファレイ生成行列を発見する．

② 固有多項式から生み出された行列の選択による結晶構造の違いを調査する．

③ ループをもつファレイ点とそうでないファレイ点の違いを調査する．

参考文献

[1] 畑正義，神経回路モデルのカオス，朝倉書店,(1998),pp.50-52

[2] Seung-hwan Kim, Stellan Ostlund, Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems, Physical Review A Volume 34, Number 4, 1986,pp.3426-3434

[3] Arnaldo Nogueira , Bruno Sevennec, Multidimensional Farey partitions, Indagationes Mathematicae Volume17, 2006 ,pp.437-456

[4]秋山茂樹,Pisot 数,数の不思議-科学を語るためのキーワード,数理科学 2008 年 8 月号 No.542,(2008)

Pascal Zeta-Functionの研究

津山工業高等専門学校

中野　日向

(情報工学科 3年)

１．はじめに

１年生の時，整数論に関する本[K]を眺めていて，リーマンゼータ関数$\zeta(\mathrm{s}) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$から得られる等式$1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}$, $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$に，驚きと不思議な興味を覚えた．これらは発散級数であるにも関わらず値が定められている．後で知ったことであるが，この計算結果は解析接続によって定まるものであり，現代物理においては，くり込み理論というものに関係があるということである．そして自分もこのような発散級数の研究がしたいと考えていた．

今回の研究は，「数の事典」という本に載っていたライプニッツの調和三角形がきっかけとなった．

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

図１（ライプニッツの調和三角形）

上の図がライプニッツの調和三角形の一部であるが，これは，どの数もそのすぐ左下の数から右下斜めに無限に続く数列の和になるという性質を持つ．例えば，$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots$ や $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots$などとなっている．このことから，例えば $L(s)=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{12^s}+\frac{1}{20^s}+\ldots$ という新しいタイプのゼータ関数を考えれば，$L(1) = 1$が得られ，さらに$L(0)$, $L(-1)$, $L(-2)$などについては，どのような値をとるのか，といった研究ができるのではないかと考えた．そして研究を進めていくうちに，この研究の核となるものが．パスカル三角形からつくられるゼータ関数であることに気が付いた．

パスカル三角形は，0 列目がすべて 1 からなり，1 列目は自然数が並ぶ．それを

$$P_1(s)=1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots$$

とする．明らかに$P_1(s)$はリーマンゼータ関数$\zeta(s)$である．

2 列目は三角数が並ぶ．それを

$$P_2(s)=1^{-s}+3^{-s}+6^{-s}+10^{-s}+15^{-s}+\cdots$$

とする．3 列目は三角錐数が並び，

$$P_3(s)=1^{-s}+4^{-s}+10^{-s}+20^{-s}+35^{-s}+\cdots$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

図２（パスカル三角形）

とする．このようにしてn列目のパスカルゼータ関数 $P_n(s)$ が定義できる．以下，パスカル三角形の n 列目から作られるゼータ関数$P_n(s)$のことを，n 列目の**パスカルゼータ関数**と呼ぶことにする．

今回の研究により，

$$P_2(-1)=1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}+\cdots=-\frac{1}{24}$$

$$P_2(-2)=1^2+3^2+6^2+\cdots+\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\cdots=\frac{1}{240}$$

などの公式を得ることができた．そして，これらは一般化でき，s が負の整数であるとき，以下の２列目と３列目から作られるゼータ関数 $P_2(s)$ と $P_3(s)$ の値に関する公式を得ることができた．以下において，記号$\binom{a}{b}$はaとbのコンビネーションを表し，記号$\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$は$e$と$f$の第１種スターリング数を表す．２列目と３列目から作られるゼータ関数の公式は，

$$P_2(s)=2^s\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\zeta(2s+k),$$

$$P_3(s)=6^s\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\binom{-s-k}{l}2^k3^l\zeta(3s+2k+l)$$

である．より一般に，

$$P_n(s)=(n!)^s\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=0}^{\infty}\binom{-s}{k_1}\binom{-s-k_1}{k_2}\cdots\binom{-s-k_1-\ldots-k_{n-2}}{k_{n-1}}\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}^{k_1}\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}^{k_2}\cdots\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}^{k_{n-1}}\zeta(ns+(n-1)k_1+\ldots+k_{n-1})$$

も導いた．特に，$P_n(s)$ の公式から，

$$P_n(-1)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\zeta(-k)$$

が得られた．これはフーリエ変換を思わせる式になっている．

以下に，上に列挙した $P_n(s)$ の公式を論じ，同時に研究で浮かび上がった多くの課題についても説明する．

２．フィボナッチゼータ関数 $F(s)$について

本研究では，L. Navas[N]の論文で扱われた研究手法を参考にしている．その概要を説明する．

まず，$\{F_n\}$をフボナッチ数列として，

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^{-s}$$

を，フィボナッチゼータ関数と呼ぶ．そして，$\Phi(x)=\max\{n\geq 0\mid F_n\leq x\}$ とすると，$F(s)$は，

$$F(s)=s\int_0^{\infty}\Phi(x)x^{-s-1}dx \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

であることが示された．そして，$F(s)$が$\mathrm{Re}\,s>0$で収束することを示した後，複素平面全領域で解析接続できることが示された．さらに，$F(s)$は無限個の点で極をもつ有理型関数であることも示された．その後，

整数sに関する$F(s)$の公式が研究された．φを黄金比$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$とし，ビネの公式を使って，

$$F(s)=5^{s/2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}(-1)^{k(n+1)}\varphi^{-n(2+k)} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

と変形する．ここで，重要な点は，$\sigma=\mathrm{Re}\,s$とすると，不等式

$$\sum_{n\geq 1,k\geq 0}^{\infty}\left|\binom{-s}{k}(-1)^{k(n+1)}\varphi^{-n(2+k)}\right|\leq(1-\varphi)^{-|s|}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{-n\sigma}<\infty$$

が成り立つことから，式(2.1)の総和の順序を変更した．これより，公式

$$F(s)=5^{s/2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\frac{1}{\varphi^{s+2k}+(-1)^{k+1}} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

が得られた．以上が，Navas が行った研究で，特に本研究に関係する部分である．

残念ながら，本研究では，n 列目のパスカルゼータ関数$P_n(s)$に対して，フィボナッチゼータ関数$F(s)$での式(2.1)のような積分表示は得られていない．したがって，**$P_n(s)$が複素平面全体に解析接続可能なのかどうか分かっていない**．しかし，本研究では，これを仮定して研究を進めた．

３．2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ について

主結果１．sを負の整数とする．このとき，2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の値は，

$$P_2(s)=2^s\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\zeta(2s+k)$$

で与えられる．

$P_2(s)$が複素平面全体に解析接続可能であることを仮定して，主結果１が，どのようにして得られるのか，について解説する．以下の計算は L Navas [N]の研究手法を参考にした．

パスカル三角形の２列目は 3 角数の列 a_n であり，それは，$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ で与えられる．一方，a_n^{-s}を$(n+1)^{-s}$の二項展開に注意して変形すると，

$$a_n{}^{-s}=\frac{n^{-s}(n+1)^{-s}}{2^{-s}}=2^s n^{-s}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}n^{-s-k}=2^s\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}n^{-2s-k}$$

となる．したがって，2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ は，

$$P_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^{-s}=2^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}n^{-2s-k}$$

となる．ここで総和の順序の交換を行う．このことが可能であるのかどうかが課題として残る．　しかし，これを信じ，議論を続ける．

総和の順序が交換可能とすると，

$$P_2(s)=2^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}n^{-2s-k}=2^s\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2s-k}$$

となる．ここで，$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-k} = \zeta(2s+k)$ であるので，

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k) \qquad \cdots\cdots (3.1)$$

を得る．（主定理１の解説終）

主定理１より，2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の値は，よく知られているリーマンゼータの値を用いて得られることを示している．さらに，負の整数 s については，式(3.1)の右辺は有限和となるため，意味を持つ．以下において，具体的な負の整数 s に関する $P_2(s)$ の値を求める．

（例１） $P_2(-1) = -\dfrac{1}{24}$ であることを示す．

$$P_2(-1) = 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1}{k} \zeta(-2+k) = \frac{1}{2} \left\{ \binom{1}{0} \zeta(-2) + \binom{1}{1} \zeta(-1) \right\}$$

である．ここで，リーマンゼータの値 $\zeta(-2) = 0,\ \zeta(-1) = -\dfrac{1}{12}$ を用いると，$P_2(-1) = -\dfrac{1}{24}$ であることがわかる．

（例 2） $P_2(-2) = \dfrac{1}{240}$ であることを示す．

$$P_2(-2) = 2^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{k} \zeta(-4+k) = \frac{1}{4} \left\{ \binom{2}{0} \zeta(-4) + \binom{2}{1} \zeta(-3) + \binom{2}{2} \zeta(-2) \right\}$$

である．ここで，リーマンゼータの値 $\zeta(-4) = \zeta(-2) = 0,\ \zeta(-3) = \dfrac{1}{120}$ を用いると，$P_2(-2) = \dfrac{1}{240}$ であることがわかる．

４．3 列目のパスカルゼータ関数について

主結果２． s **を負の整数とする．このとき，3 列目のパスカルゼータ関数** $P_3(s)$ **の値は，**

$$P_3(s) = 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} \cdot 2^k \cdot 3^l \cdot \zeta(3s+2k+l)$$

で与えられる．

やはり，$P_3(s)$が複素平面全体に解析接続可能であることを仮定して，主結果２について解説する．

パスカル三角形の 3 列目は 3 角錐数の列 a_n であり，それは，$a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ で与えられる．一方，a_n^{-s} を変形すると，

$$a_n{}^{-s} = \frac{n^{-s}(n+1)^{-s}(n+2)^{-s}}{6^{-s}} = 6^s n^{-s}(n^2+3n+2)^{-s} = 6^s n^{-s}\{(n+3)n+2\}^{-s}$$
$$= 6^s n^{-s}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}2^k n^{-s-k}(n+3)^{-s-k} = 6^s\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}2^k n^{-2s-k}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s-k}{l}3^l n^{-s-k-l}$$
$$= 6^s\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\binom{-s-k}{l}2^k 3^l n^{-3s-2k-l}$$

となる．したがって，3 列目のパスカルゼータ関数 $P_3(s)$ は，

$$P_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{-s} = 6^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\binom{-s-k}{l}2^k 3^l n^{-3s-2k-l}$$

となる．総和の順序が交換可能であることを仮定すると，

$$P_3(s) = 6^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\binom{-s-k}{l}2^k 3^l n^{-3s-2k-l} = 6^s\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\binom{-s-k}{l}2^k 3^l\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3s-2k-l}$$

となる．$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3s-2k-l} = \zeta(3s+2k+l)$ であるので，

$$P_3(s) = 6^s\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\binom{-s-k}{l}2^k 3^l \zeta(3s+2k+l)$$

を得る．（主定理 2 の解説終）

５．n 列目のパスカルゼータ関数について

2 列目と 3 列目のパスカルゼータ関数と同様の方法で，n 列目のパスカルゼータの一般項に関する公式も得られた．ここでは結果だけ述べる．

主結果３．s を負の整数とする．このとき，以下が成り立つ．

$$P_n(s) = (n!)^s\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=0}^{\infty}\binom{-s}{k_1}\binom{-s-k_1}{k_2}\cdots\binom{-s-k_1-\ldots-k_{n-2}}{k_{n-1}}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}^{k_1}\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}^{k_2}\cdots\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}^{k_{n-1}}\zeta\left(ns+(n-1)k_1+\ldots+k_{n-1}\right)$$

特に，主結果３において，$s=-1$ の場合を考えると，次の結果を得る．

主結果４．s を負の整数とする．このとき，以下が成り立つ．

$$P_n(-1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\zeta(-k)$$

主結果 4 は，フーリエ変換を思わせる式になっている．つまり，$P_n(-1)$ をゼータ関数$\zeta(-k)$で分解したとき，スペクトルとなる係数がスターリング数$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$となっているのである．このことから，この逆変換公式ができないかという問題も考えられる．

主結果３を用いて，具体的な$P_n(s)$の値を$0 \le n \le 5, -5 \le s \le -1$について計算した．その結果が以下である．

表１($P_n(s)$の値)

$n \backslash s$	-1	-2	-3	-4	-5
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{2240}$	$\frac{1}{20160}$	$-\frac{1}{177408}$
3	$-\frac{19}{720}$	$\frac{2}{945}$	$-\frac{1207}{3991680}$	$\frac{2257}{60147360}$	$\frac{28631951}{190546836480}$
4	$-\frac{3}{160}$	$\frac{9}{8960}$	$-\frac{81}{2928640}$	$\frac{1647}{1394032640}$	$-\frac{71128520893}{61787987509248}$
5	$-\frac{863}{60480}$	$\frac{16}{31185}$	$-\frac{81400667}{141145804800000}$	$-\frac{17973043411}{19339689600000}$	$\frac{141828972683913871}{532921392267264000000}$

この表から読み取れることは，各nについて，符号に周期性があること，sが小さくなるにしたがい，$P_n(s)$の値が0に近づいている点にある．これが一般的にいえるかどうかについては今後の課題として残された．

６．実数に関するパスカルゼータ関数

これまで，パスカルゼータ関数$P_n(s)$のsはつねに負の整数値としてきたが，Γ関数を用いることで，sを負の実数としても扱うことができる．すなわち，$\binom{-s}{k} = \frac{(-s)!}{k!(-s-k)!} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$に注意すると，$P_2(s)$に関する公式は以下となる．

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k}_{\Gamma} \zeta(2s+k) \qquad \cdots\cdots (5.1)$$

ここで，$\binom{-s}{k}_{\Gamma} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$とした．ところで，**ここで大きな問題が起こっている．それは，式(5.1)の右辺は収束するのかという問題である**．これに関して，Srivastava[S]の研究結果を紹介する．それは，Ramanujan の結果などを用いたリーマンゼータ関数の無限和に関する研究で，

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s)_k}{k!} \frac{\zeta(s+k)}{2^{s+k}} \qquad \cdots\cdots (5.2)$$

というものである。ここで，$(s)_k = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}$である．二つの式(5.1)と(5.2)の右辺は非常に似ている式であ

り，これからの研究に対して指針を示すものと考えている．

ここでも，式(5.1)の収束性を仮定して，具体的な計算を行う．例えば，$s=-0.1$の場合，式(5.1)より，

$$P_2(-0.1)=2^{-0.1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{0.1}{k}_{\Gamma}\zeta(-0.2+k)$$

である．したがって，$P_2(-0.1)$の近似値

$$P_2(-0.1)=2^{-0.1}\{0.1\,\zeta(-0.2)-0.045\,\zeta(0.8)+0{,}0285\,\zeta(1.8)+\cdots\}\sim-0.7985$$

が得られる．同様に計算して，$P_2(-0.2)$の近似値は，

$$P_2(-0.2)=2^{-0.2}\{0.2\,\zeta(-0.4)-0.08\,\zeta(0.6)+0{,}048\,\zeta(1.6)+\cdots\}\sim-0.6791$$

となる．$\binom{-s}{k}_{\Gamma}$はkが大きくなるにつれ0に近づき，$\zeta(k+2s)$はkが大きくなるにつれ 1 に近づくことが分かっているため，右辺は収束するものと考えている．

下のグラフは，横軸がs，縦軸が$P_2(s)$としたときのグラフである．

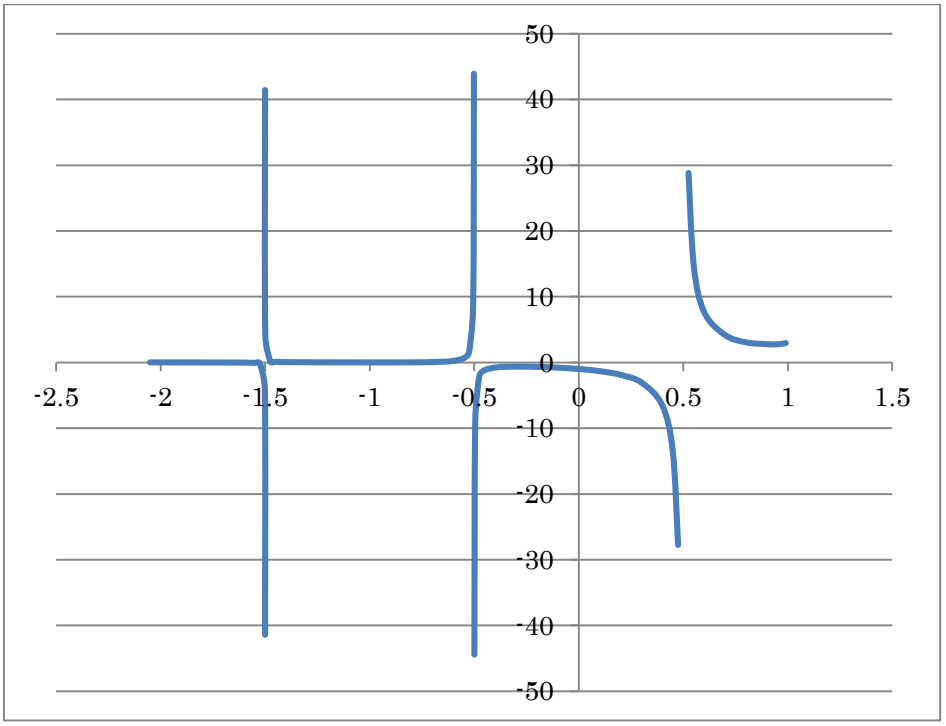


図３（$P_2(s)$のグラフ）

７．パスカルゼータ関数$P_2(s)$のグラフに関する考察

図３の$P_2(s)$のグラフは，ガンマ関数のグラフ（図４）に非常に似ている．

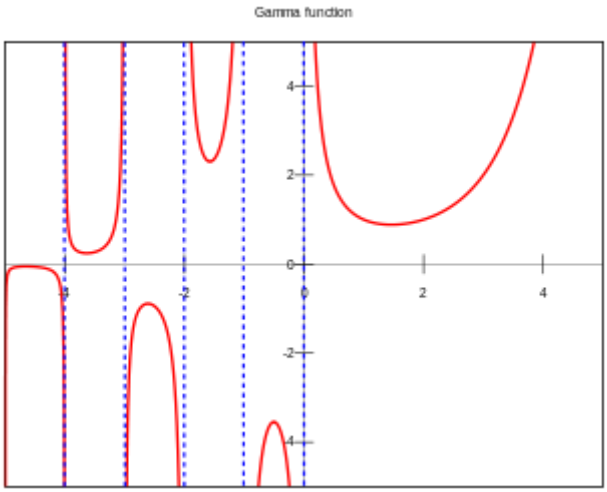


図４（ガンマ関数のグラフ，出典：Wikipedia）

特に，類似性があるところは，$P_2(s)$のグラフの　$s = 0.5, 0, -0.5, -1.0, -1.5, -2.0$ の付近であるので，それについて考察する．$P_2(s)$を計算すると，

$$P_2(0.5) = 2^{0.5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0.5}{k}_{\Gamma} \zeta(1+k), \qquad P_2(0) = 2^{0} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0}{k}_{\Gamma} \zeta(0+k),$$

$$P_2(-0.5) = 2^{-0.5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-0.5}{k}_{\Gamma} \zeta(-1+k), \quad P_2(-1) = 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}_{\Gamma} \zeta(-2+k),$$

$$P_2(-1.5) = 2^{-1.5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1.5}{k}_{\Gamma} \zeta(-3+k), \quad P_2(-2) = 2^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}_{\Gamma} \zeta(-4+k)$$

となる．どの右辺にも，必ず$\zeta(1) = \pm\infty$ の項が含まれる．特に，s が非整数の場合の$P_2(s)$は確定できない．しかし，図３をみると，$P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$の近傍と，$P_2(0.5)$, $P_2(-0.5)$, $P_2(-1.5)$の近傍は様子が異なることがわかる．以下は考察である．

(1) $P_2(0.5)$, $P_2(-0.5)$, $P_2(-1.5)$の近傍について

これらの近傍では，$+\infty, -\infty$に発散している．この理由は，$\zeta(1) = \pm\infty$が影響しているからと推測される．そして，もし，$P_2(s)$が有理型関数であるならば，$s = 0.5, -0.5, -1.5, \cdots$は極となっていると考えられる．つまり，$P_2(s)$は無限個の極をもつのではないかと考えられる．

(2) $P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$の近傍について

これらの近傍では，理解できない現象が起こっている．それは，$P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$の近傍は，限りなく 0 に近い値をとるのに，$P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$自身の値は 0 ではない．すなわち，$P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$らは特異点になっていると考えられる．例えば，$P_2(-2)$と$P_2(-2.1)$の計算式を見ると，

$$P_2(-2) = \frac{1}{4}\{\zeta(-4) + 2\zeta(-3) + \zeta(-2)\} = \frac{1}{240} = 0.0042$$

$$P_2(-2.1)=\frac{1}{2^{2.1}}\left\{\binom{2.1}{0}\zeta(-4.2)+\binom{2.1}{1}\zeta(-3.2)+\binom{2.1}{2}\zeta(-2.2)+\binom{2.1}{3}\zeta(-1.2)+\cdots\right\}\sim 0.000686$$

である．ところで，$P_2(-2.1)$の展開式の 4 項目以降を無視すると，

$$P_2(-2.1)=\frac{1}{2^{2.1}}\left\{\binom{2.1}{0}\zeta(-4.2)+\binom{2.1}{1}\zeta(-3.2)+\binom{2.1}{2}\zeta(-2.2)\right\}\sim 0.004621$$

となり，$P_2(-2)$と$P_2(-2.1)$の差に違和感がなくなり，$P_2(-2)$は特異点ではなくなるような気もする．

このように，$P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$らは，本当に特異点となっているかどうか課題として残る．

８．2 列目パスカルゼータ関数$P_2(s)$ の積分表示

リーマンゼータ関数の積分表示は，

$$\zeta(s)=\frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma(s)}\int_0^\infty \psi(x)\,x^{s-1}dx$$

であることは良く知られている．ここで，$\psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$であり，プサイ関数と呼ばれている．

主結果５．

$$P_2(\mathrm{s})=\frac{1}{2\Gamma(s)}\int_0^\infty\left(\sqrt[8]{e^x}\,\theta_2\left(0,e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)x^{s-1}dx\qquad\left(Re\,(s)>1\right)$$

ここで，$\theta_2(0,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}$で，ヤコビの楕円テータ関数と呼ばれるものである。

証明．　ガンマ関数の定義から

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}=\Gamma(s)\frac{1}{n^s}$$

であり，$n_T=\frac{n(n+1)}{2}$　とおくと，

$$\int_0^\infty e^{-n_Tx}x^{s-1}=\Gamma(s)\frac{1}{(n_T)^s}$$

となる。$\sum_{n=1}^{\infty}$を両辺に作用させると，

$$\int_0^\infty(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n_Tx})x^{s-1}=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n_T)^s}=\Gamma(s)\mathrm{P}_2(\mathrm{s})$$

を得る。ところで，

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n_Tx}=\frac{1}{2}\sqrt[8]{e^x}\vartheta_2\left(0,\sqrt{e^{-x}}\right)$$

であるので，

$$P_2(\mathrm{s})\Gamma(s)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\sqrt[8]{e^x}\,\theta_2\left(0,e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)x^{s-1}dx$$

が得られる．（証明終）

９．今後の研究計画

調べた限りパスカルゼータ関数というものはまだ研究されていなかった．本研究では，数学の知識が非常に不足していることはわかっていたが，それでも挑戦してみた．いくつかの論文を比較しながら，多くのことを仮定しつつ，やれる範囲で研究を進めてきた．しかし，これから行わなければならない課題が多く残された．今後の研究のために，以下に特に重要な課題について列挙する．

（１）$P_n(s)$の積分表示を見つけ，解析接続の問題に取り組むこと．

（２）式(5.1)に潜んだ問題，つまり係数付きゼータ関数の総和の収束性の問題に取り組むこと．

（３）$P_2(s)$のグラフにおいて，負の整数sにおける点$(s, P_2(s))$は，特異点となるかどうかという問題に取り組むこと．

（４）$s \geq 1$も含めて，一般的な$P_n(s)$のグラフの研究を進めること．

（５）$P_n(-1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \zeta(-k)$の逆変換が存在するかという研究を行うこと．

謝辞

今年の８月に岐阜で代数学小研究会が行われた際，元学習院大学教授の飯高茂先生及びその関係の数学研究者の方々から色々なアドバイスをいただいた．また，9 月には高知大学での高専数学教育シンポジウムにおいて，高知大学教授の福間慶明先生および数学教育研究者の方々からも貴重なアドバイスをいただいた．ここに感謝の意を記す．

参考文献

[N] L Navas，Analytic continuation of the Fibonacci Dirichlet series, Fibonacci Q. 39, 409-418 (2001)

[S] H. M. Srivastava, Sum of certain series of the Riemann Zeta function, Journal of mathematical analysis and applications 134, 129-140(1988)

[H] ハロルド・M・エドワーズ, ゼータ関数とリーマン予想, 講談社(2012)

[G] Gamma Function, wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

[K] 黒川信重,数学の夢　素数からのひろがり,岩波書店(1998)

[U] D. ウエルズ，数の辞典，東京図書(1987)

Pisot numbers, Farey spaces and Pearl curves

Osamu Matsuda
(Tsuyama Kosen)

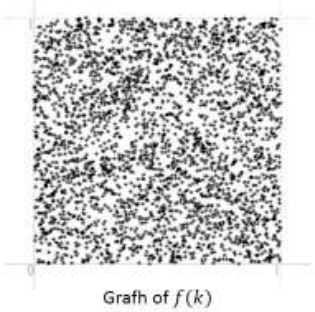
Pisot numbers (Introduction 1)

Example 1. Put $\alpha = 5/3$.

Let $\mathrm{Fp}(\alpha^k)$ be **the fractional part** of α^k.

Consider the function

$$f(k) = \mathrm{Fp}(\alpha^k).$$



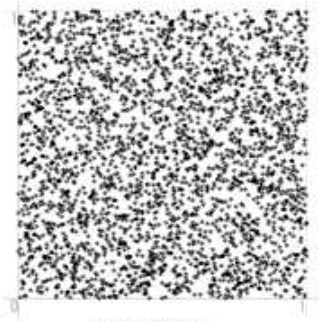
Grafh of $f(k)$

Pisot numbers (Introduction 2)

Example 2. Put $\alpha = 11/6$.

Consider the function

$$f(k) = \mathrm{Fp}(\alpha^k).$$



Grafh of $f(k)$

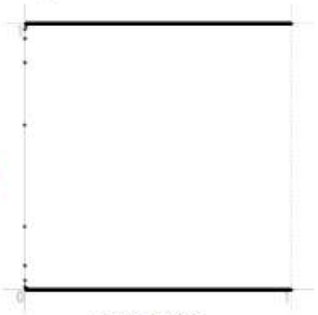
Pisot numbers (Introduction3)

Example 3. Put $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$.

Consider the function

$$f(k) = \mathrm{Fp}(\alpha^k).$$

Namely, α^∞ means **almost Integer**.



Grafh of $f(k)$

Pisot numbers (Definition)

ピゾ・ヴィジャヤラガヴァン数

An algebraic integer of degree n is a root α of an irreducible monic polynomial $P(x)$ of degree n with integer coefficients, its minimal polynomial. The other roots of $P(x)$ are called the conjugates of α .

If $\alpha > 1$ but all other roots of $P(x)$ are real or complex numbers of absolute value less than 1, so that they lie strictly inside the circle $|x| = 1$ in the complex plane, then α is called a **Pisot number**, Pisot–Vijayaraghavan number, or simply PV number.

Note. If α is a Pisot number then α^∞ means almost Integer.

Small Pisot numbers

(1) 1.32471795724474; $x^3 - x - 1$

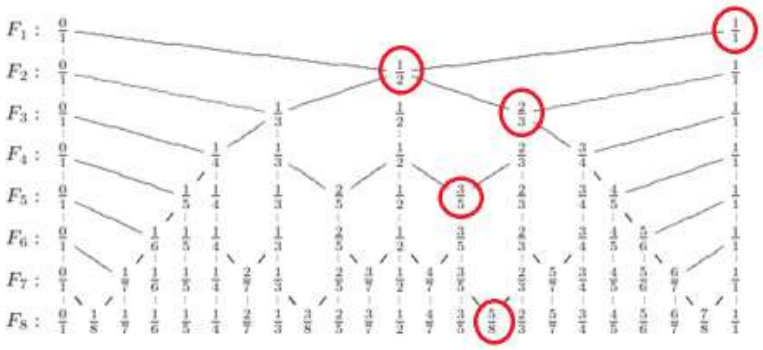
(2) 1.38027756909761; $x^4 - x^3 - 1$

(3) 1.44326879127037; $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1$

(4) 1.46557123187676; $x^3 - x^2 - 1$

(5) 1.50159480353908; $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1$

Farey tree



There is the fibonacci sequence in the Farey tree.
(by M. Akamatsu and Y. Kobayashi (my students), 2014)

13

2 dimensional Farey space $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{N}, \gcd(a,b) = 1 \right\}$$

$$G_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

The characteristic polynomial of G_2 is

$$P(x) = x^2 - x - 1.$$

A root of $P(x)$ is the golden ratio or a Pisot number.

15

$$f_1\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] := G_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad f_2\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] := \mathrm{ABS}\left(G_2 \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

- $f_1\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $f_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{ABS}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f^{-1}\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] := \mathrm{ABS}\left(G_2^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

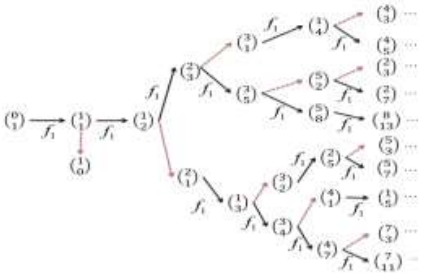
- $f^{-1}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{ABS}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

17

Theorem 1 (M. Akamatsu, Y. Kobayashi, 2014)

Let $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ be a Farey point on $\mathcal{F}_2$.

After a finite succession of transformations ${G_2}^{-1}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is transformed into $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



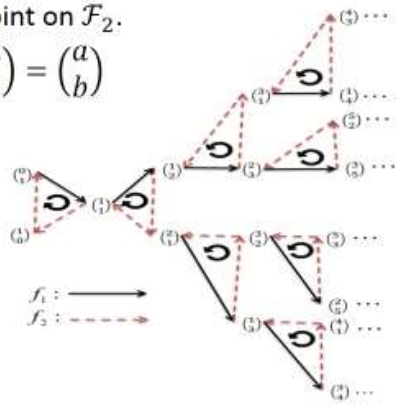
19

Loop structure

Let $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ be a Farey point on $\mathcal{F}_2$.

Then $(f_2 \circ f_2 \circ f_1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Where $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



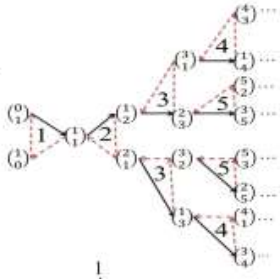
21

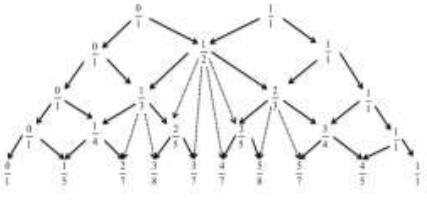
Index tree

For any loop $L = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}\right\}$,

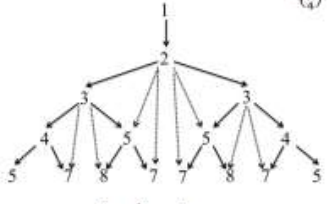
define $index(L) = a + b$.

Note. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix}$





Farey tree



Index tree

23

3 dimensional Farey space $\mathcal{F}_3$

$$\mathcal{F}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N}, \gcd(a, b, c) = 1 \right\}$$

$$G_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The characteristic polynomial of G_3 is

$$P(x) = x^3 - x - 1.$$

A root of $P(x)$ is a Pisot number.

25

$$f_1\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] := G_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad f_2\left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] := \mathrm{ABS}\left(G_2 \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

- $f_1\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $f_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{ABS}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f^{-1}\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] := \mathrm{ABS}\left(G_3^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

- $f^{-1}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{ABS}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

27

Theorem2 (M. Akamatsu, Y. Kobayashi, 2015)

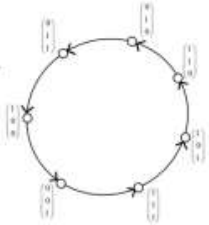
Let $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ be a Farey point on $\mathcal{F}_3$.

After a finite succession of transformations G_3^{-1},
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ is transformed into $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

29

Loop structure

There exist many loops consisting of seven points on $\mathcal{F}_3$ by f_1 or f_2.



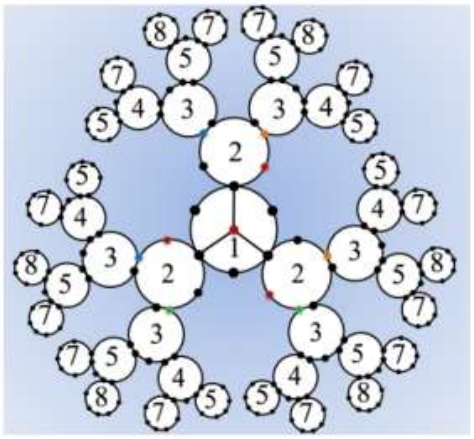
Moreover, for any loop $L = \left\{ \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} \right\}$, there exist natural number d such that

$$\sum_{j=1}^{7} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4d \\ 4d \\ 4d \end{pmatrix}$$

Define $index(L) = d$.

31

Index structure of $\mathcal{F}_3$



33

Pearl curves

$$C\colon\ y^m = x^\alpha (1-x)^\beta$$

where α, β, m are positive integers and $\gcd(\alpha, \beta, m) = 1$.

After performing some plane birational transformations, we may assume that $1 \le \alpha \le \beta \le m - (\alpha + \beta)$.

Question. Classify pearl curves.

$y^4 = x^2(1-x)^3$

35

Birational geometry of pairs (S, C)

S: a non singular rational surface.

C: an irreducible curve on S.

Two pairs (S, C) and (S_1, C_1) are birationally equivalent

$\Leftrightarrow$ (1) $f: S \to S_1$ is a birational map.

(2) the proper image $f[C]$ coincides with C_1.

37

Minimal models of pairs

(S, D) : a non singular pair, i.e., D is nonsigular curve.

(S, D) is **relatively minimal**

$\Leftrightarrow D.E \geq 2$ for any exceptional curve (of the fist kind) E on S such that $E \neq D$.

39

minimal pairs

Σ_b: a Hizebruch surface of degree $b \geq 0$.

C: a curve on X.

$$C \sim \sigma\Delta_\infty + eF_e$$

where Δ_∞ is a section such that $\Delta_\infty^2 = -b$ and F_u is fiber of the $\mathbf{P}^1$-bumdle $\Sigma_b \to \mathbf{P}^1$.

A pair (Σ_b, C) is **#-minimal**

$\Leftrightarrow$ **$\sigma \geq 2\nu_1$ and $e \geq \sigma + b\nu_1$. If $b = 1$ then $e - \sigma > 1$,** where ν_1 is the highest multiplicity of singular point on C.

41

Theorem (by S.Iitaka)

Assume that (S, D) is relatively minimal with $\kappa[D] \geq 0$. Then $S = \mathbf{P}^2$ or (S, D) is derived to a #- minimal pair (Σ_b, C) by a finite succession of blowing ups.

Note. $\kappa[D] = \kappa(D + K_S, S)$, K_S is canonical divisor of S.

43

Notations

Σ_b: a Hizebruch surface of degree $b \geq 0$.

C: a curve on X.

$$C \sim \sigma\Delta_\infty + eF_e$$

$[\sigma * e, b; \nu_1, \cdots, \nu_r]$: the type of (Σ_b, C) , where $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_r$.

$g(C)$: the genus of C.

$$\tilde{b} := \begin{cases} 2e - \sigma b & (b \geq 2) \\ e - \sigma - \nu_1 & (b = 1) \\ e - \sigma & (b = 0) \end{cases} \quad \Longrightarrow \ \tilde{b} \geq 0.$$

Note. $(\Sigma_{b_\#}, C_\#)$ is #-minimal and $(\Sigma_{b_\#}, C_\#)$ and (Σ_b, C) are birationally equivalent $\Leftrightarrow \tilde{b_\#} \leq \tilde{b}$.

45

A projective model $\bar{C}$ of the Pearl curve

$$C: \ y^m = x^\alpha (1 - x)^\beta$$

where a, b, m are positive integers and $\gcd(\alpha, \beta, m) = 1$, $1 \leq \alpha \leq \beta \leq m - (\alpha + \beta)$.

Introducing two homogeneous coordinates $x_0 : x_1$ and $y_0 : y_1$ such that $x = x_1/x_0$, $y = y_1/y_0$, we obtain a projective model $\bar{C}$ defined by

$$x_0^{\alpha+\beta} y_1^{\ m} = x_1^\alpha (x_0 - x_1)^\beta y_0^m$$

which is an irreducible curve on $\Sigma_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. If $\alpha > 1$ then $\bar{C}$ has three singular points

$$Q_1(1:0,1:0), Q_2(1:1,1:0), Q_3(0:1,0:1)$$

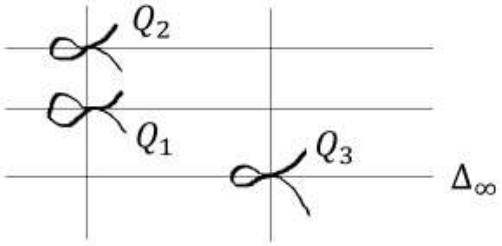
on Σ_0.

47

Figure of the curve $\bar{C}$

$$x_0{}^{\alpha+\beta}y_1{}^{m} = x_1^{\alpha}(x_0 - x_1)^{\beta}y_0^{m} \text{ on } \Sigma_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$$

$$Q_1(1:0,1:0), Q_2(1:1,1:0), Q_3(0:1,0:1)$$



49

The type of the pearl curve $\bar{C}$

The type of the pearl curve $\bar{C}$ defined by
$x_0{}^{\alpha+\beta}y_1{}^{m} = x_1^{\alpha}(x_0 - x_1)^{\beta}y_0^{m}$ is

$$[\gamma * m, 0; Q_3\{\alpha, \nu_1, \cdots, \nu_r\}, Q_2\{b, \mu_1, \cdots, \mu_s\}, Q_1\{a, m_1, \cdots, m_t\}]$$

where $\gamma = \alpha + \beta$ and $Q_k\{u, u_1, \cdots, u_d\}$ means the multiplicities of Q_k, which is defined by $y^m = x^u + \text{higher term}$.

(by H. Yanaba and S. Iitaka, 2003)

51

Yanaba's example (2003)

$$\bar{C}\colon\ y^{99} = x^{10}(1-x)^{30}$$

#-minimal type of $\bar{C}$:

$$[30 * 60,2; Q_3\{2^9\}, Q_2\{11,9^3,3^3\}, Q_1\{10^{12},9^2\}]$$

$$\tilde{b} = 60, \qquad g(\bar{C}) = 48$$

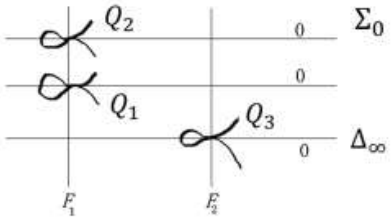
53

Elementary transformations

EX. $y^{65} = x^{37}(1-x)^{49}$

$y^{65} = x^{21}(1-x)^{28}$ (birational)

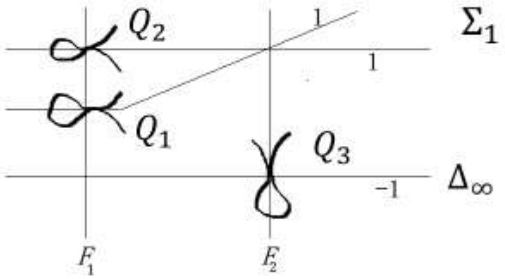
Type: $[49 * 65,0: Q_3\{49,16^3\}, Q_2\{28^2, 9^3\}, Q_1\{21^3, 2^{10}\}]$



Blowing up at Q_3 and contracting F_2'.

55

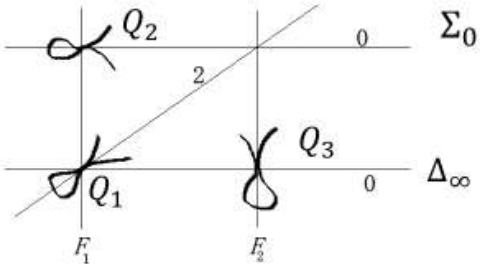
$\Rightarrow [49 * 65,1: Q_3\{16^3\}, Q_2\{28^2, 9^3\}, Q_1\{21^3, 2^{10}\}]$



Blowing up at Q_2 and contracting F_1'.

57

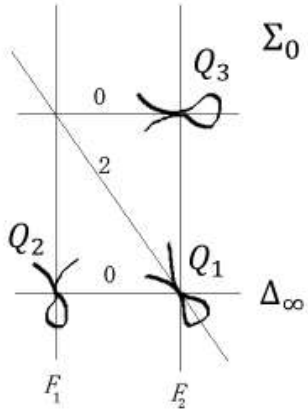
$\Rightarrow [49 * 37,0: Q_3\{16^3\}, Q_2\{28, 9^3\}, Q_1\{21^4, 2^{10}\}]$



Switch 49 and 37.

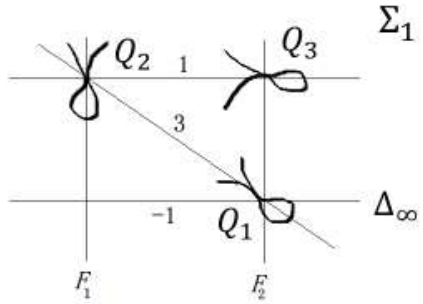
59

$\Longrightarrow [37 * 49,0: Q_3\{16^3\}, Q_2\{28, 9^3\}, Q_1\{21^4, 2^{10}\}]$



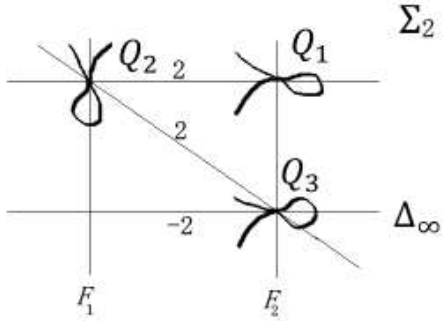
Blowing up at Q_2
and contracting $F_1{}'$.

$\Longrightarrow [37 * 58,1: Q_3\{16^3\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{21^4, 2^{10}\}]$



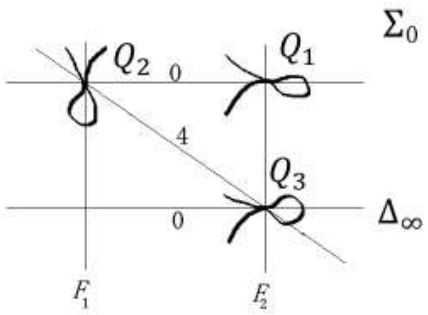
Blowing up at Q_1
and contracting $F_2{}'$.

$\Longrightarrow [37 * 53,2: Q_3\{16^4\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{21^3, 2^{10}\}]$



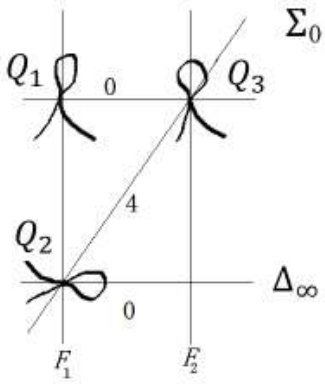
Blowing up at Q_1
and contracting $F_2{}'$.

$\Longrightarrow [37 * 32,0: Q_3\{16^6\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{21, 2^{10}\}]$



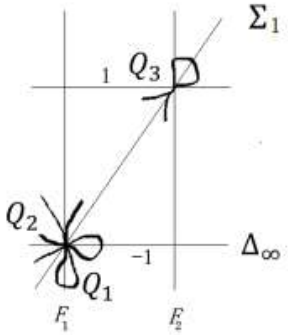
Switch 37 and 32.

$\Longrightarrow [32 * 37,0: Q_3\{16^6\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{21, 2^{10}\}]$



Blowing up at Q_1 and contracting F_1'.

$\Longrightarrow [32 * 48,1: Q_3\{16^6\}, Q_2\{9^4\}, Q_1\{2^{10}\}]$ (#-minimal)



$$\tilde{b} = e - \sigma - \nu_1$$
$$= 48 - 32 - 16$$
$$= 0$$

$$g(\bar{C}) = 32$$

Fibonacci sequence and pearl curves.

$$\bar{C}_n\colon\ y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$\tilde{b}_n$
1	(1,1,2)	$[1*2,0;1]$	0	1
2	(1,2,3)	$[1*3,0;1]$	0	2
3	(2,3,5)	$[1*2,0;1]$	0	1
4	(3,5,8)	$[1*2,0;1]$	0	1
5	(5,8,13)	$[1*2,0;1]$	0	1
6	(8,13,21)	$[1*2,0;1]$	0	1

73

Fibonacci sequence and pearl curves

Proposition 1. Let

$$\bar{C}_n\colon\ y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-2}}(1-x)^{\alpha_{n-1}}$$

where, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.
Then $\bar{C}_n$ are rational curves. Moreover, the #-minimal types of $\bar{C}_n$ are as follows:

(1) $[1*3,0;1]$ when $n = 2$, (2) $[1*2,0;1]$ when $n \neq 2$.

Proof. By easy calculations.

75

General Fibonacci sequence and pearl curves

Proposition 2. Let

$$\bar{C}_n\colon\ y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-2}}(1-x)^{\alpha_{n-1}}$$

where, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$.
Then $\bar{C}_n$ are rational curves. Moreover, the #-minimal types of $\bar{C}_n$ are as follows:

(1) $[1*\alpha_2, 0;1]$ when $\alpha_1 = 1$, (2) $[1*2,0;1]$ when $\alpha_1 \neq 1$.

Proof. By easy calculations .

77

3 Fibonacci sequence and pearl curves

3 Fibonacci sequence:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3},\ (F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2)$$

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24 \cdots$$

Pearl curves $\bar{C}_n$: $y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$

where $m_n = \alpha_n + \beta_n + m_{n-1}$

79

3 Fibonacci sequence and pearl curves

$$\bar{C}_n: y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$$

Data

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$\tilde{b}_n$
1	(1,1,2)	$[2*2,1;1]$	0	1
2	(1,2,4)	$[2*3,1;1]$	1	1
3	(2,4,7)	$[3*4,1;1]$	1	3
4	(4,7,13)	$[5*7,1;2^8]$	6	0
5	(7,13,24)	$[10*14,1;4^4,3,2^5,3^2]$	10	0
6	(13,24,44)	$[18*25,1;7^8,5^3,4^5,3,2^4]$	20	0
7	(24,44,81)	$[33*46,1;13^8,9^3,7^5,6,3^6,2^3]$	39	0

$\sigma_n = m_n - 2\alpha_n$, $e_n = \sigma_n + \alpha_{n-1}$, $\tilde{b}_n = 0\ (n \geq 4)$

$\sigma_n = \sigma_{n-1}+\sigma_{n-2}+\sigma_{n-3}$, $e_n = e_{n-1}+e_{n-2}+e_{n-3}$

81

3 Fibonacci sequence and pearl curves

Proposition 3. Let

$$\bar{C}_n: y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-2}}(1-x)^{\alpha_{n-1}}$$

where, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = 2$.

Then for any $n \geq 4$,

$\sigma_n = m_n - 2\alpha_n$, $e_n = \sigma_n + \alpha_{n-1}$,

$\sigma_n = \sigma_{n-1}+\sigma_{n-2}+\sigma_{n-3}$, $e_n = e_{n-1}+e_{n-2}+e_{n-3}$,

$\tilde{b}_n = 0\ (n \geq 4)$

Proof. By easy calculations.

83

3 dimensional Farey sequence and pearl curves

3 dimensional Farey sequence:

$$\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\\ m_n\end{pmatrix} = G_3\begin{pmatrix}\alpha_{n-1}\\ \beta_{n-1}\\ m_{n-1}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ m_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

where

$$G_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

The characteristic polynomial of G_3 is

$$P(x) = x^3 - x - 1.$$

3 dimensional Farey sequence and pearl curves $\bar{C}_n$: $y^{m_n} = x^{\alpha_n}(1-x)^{\beta_n}$

Data 1

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$\tilde{b}_n$
1	(1,1,2)	$[1*2,0;1]$	0	1
2	(1,2,2)	$[1*2,0;1]$	0	1
3	(2,2,3)	$[2*3,1;1]$	1	0
4	(2,3,4)	$[2*3,1;1]$	1	0
5	(3,4,5)	$[2*3,0;1]$	2	1
6	(4,5,7)	$[4*6,1;2^6]$	3	0
7	(5,7,9)	$[4*6,1;2^6]$	3	0

Data 2

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$\tilde{b}_n$
8	(7,9,12)	$[6*9,1;3^6,2^4]$	3	0
9	(9,12,16)	$[8*12,1;4^6,3,2^4]$	6	0
10	(12,16,21)	$[10*15,1;5^6,3^5]$	6	0
11	(16,21,28)	$[14*21,1;7^6,5,4^4]$	9	0
12	(21,28,37)	$[18*27,1;9^6,6,5^4]$	18	0
13	(28,37,49)	$[24*36,1;12^6,8,7^4]$	21	0
14	(37,49,65)	$[32*48,1;16^6,11,9^4]$	32	0
15	(49,65,86)	$[42*63,1;21^6,14,12^4,2^{24}]$	42	0

$\sigma_n = 2(m_n - \beta_n)$, $e_n = 3(m_n - \beta_n)$, $\tilde{b}_n = 0\ (n \geq 6)$

$\sigma_n = \sigma_{n-2}+\sigma_{n-3}$, $e_n = e_{n-2}+e_{n-3}$

3 dimensional Farey sequence and pearl curves

Proposition 4. Let

$$\bar{C}_n\colon\ y^{\alpha_n} = x^{\alpha_{n-2}}(1-x)^{\alpha_{n-1}}$$

where, $\alpha_n = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_2 = 2$.

Then for any $n \geq 6$,

$$\sigma_n = 2(m_n - \beta_n),\ e_n = 3(m_n - \beta_n),$$
$$\tilde{b}_n = 0\,,\ \sigma_n = \sigma_{n-2}+\sigma_{n-3},\ \ e_n = e_{n-2}+e_{n-3}.$$

Proof. By easy calculations.

91

Data 3

n	(α_n, β_n, m_n)	#-minimal type	$g(\bar{C}_n)$	$\tilde{b}_n$
15	(49,65,86)	$[42*63{,}1; 21^6, 14, 12^4, 2^{24}]$	42	0
15′	(65,86,16)	$[4*7{,}1; 2^5]$	7	1
15′a	(86,16,151)	$[48*69{,}1; 21^2, 16^{12}, 7^2, 4^{13}, 2^{13}]$	75	0
15′b	(16,151,102)	$[32*57{,}1; 16^8, 9^3, 6^2, 4^{15}, 2^2]$	50	9
15′c	(151,102,167)	$[37*53{,}0; 16^{12}, 9^4, 7^2, 5^{16}, 2^3]$	83	16
16′	(16,65,86)	$[21*48{,}3; 6^2, 5^{22}, 4, 2^{12}]$	42	33
16′a	(65,86,81)	$[16*68{,}6; 5^{23}, 4^2, 3]$	40	40

93

Reference

[1] Pisot Vijayaraghavan number, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pisot%E2%80%93Vijayaraghavan_number

[2] PV number によるn次元ファレイ空間の結晶理論，本報告書，pp 66-77

[3] Iitaka, S., On irreducible plane curves, Saitama Math. J. 1 (1983),47-63.

[4] 飯高茂，築場広子，平面代数曲線の対数的多種数の研究，学習院大学理学部,2003 年 3 月