

代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜
報告集

高専代数幾何学研究会編

(世話役：松田修，北川真也)

2015 年 2 月

はじめに

本論文集は、2015 年 1 月に岐阜県大垣市で開催した代数幾何シンポジウム 2014 の講演の記録と関連論文をまとめたものです。昨年度に引き続きこの会を大垣市で開催することができました。

さらに、有志のご協力をいただきこのような報告集を出すことができました。記して感謝を申し上げます。

また、本シンポジウムの開催にあたり、平成 26- 28 年度日本学術振興会科学研究補助金・基盤研究 (C) 課題番号 26381244 (研究代表者：松田修)、教育研究実施経費 (松田修)、教育研究実施経費 (北川真也) の支援を受けました。

2015 年 2 月 松田修, 北川真也

代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜

— 数学教育の話題もあります。 —

日時：2015 年 1 月 10・11 日 (土・日)

場所：ソフトピアジャパン センタービル 10F 会議室 4 (大垣駅前)

世話人：北川真也, 松田修

1 月 10 日 (土)

9:30-10:30 前原和寿 (東京工芸大学)

ガロア理論による正標数多様体の変形

10:40-11:40 飯高茂 (学習院大学)

究極の完全数と ϕ 完全数

11:40-12:10 飯高茂 (学習院大学)

小平邦彦生誕 100 年記念 —小平先生の生涯と数学—

13:15-14:15 小島秀雄 (新潟大学)

Some results on normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one

14:30-15:30 戸野恵太 (埼玉大学)

有理尖点平面曲線の非特異モデルの自己交点数について

15:45-16:45 白根竹人 (宇部高専)

2 次被覆による平面曲線の引き戻しの分解とザリスキ対について

17:00-17:25 間庭早紀子, 丸尾優佳, 松田修 (津山高専)

周期 T をもつ n 乗根のフラクタル連分数について

17:30-18:00 小林祐志, 赤松昌俊, 松田修 (津山高専)

n 次元ファレイ空間の結晶理論

1 月 11 日 (日)

9:30-10:30 月岡透 (東海大学)

小収縮を持つファノ多様体について

10:45-11:45 吉原久夫 (新潟大学)

代数曲面のガロワ埋め込み

12:45-13:45 高橋剛 (新潟大学)

Galois Points and Galois Weierstrass Points

14:00-15:00 三浦敬 (宇部高専)

Galois points for Lissajous curves (revisited)

15:15-16:00 北川真也 (岐阜高専)

A note on genus two fibrations on rational surfaces of degree seven

目次

飯高 茂：古い数学に新しい生命の息吹を 究極の完全数	1
Kazuhisa MAEHARA : Deformation for Any Characteristic Varieties	17
Hideo Kojima : Some results on normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one	39
戸野 恵太：有理尖点平面曲線の非特異モデルの自己交点数について	53
白根 竹人：2 次被覆による平面曲線の引き戻しの分解とザリスキ対について	59
間庭 早紀子，丸尾 優佳，松田 修：周期 T をもつ n 乗根のフラクタル連分数について	65
小林 祐志，赤松 昌俊，松田 修： n 次元ファレイ空間の結晶理論	79
月岡 透：小収縮を持つファノ多様体について	91
吉原 久夫：射影空間のガロワ埋め込み	97
高橋 剛：ガロア点とガロアワイエルシュトラス点について	101
三浦 敬：Galois points for Lissajous curves (revisited)	113
北川 真也：A note on genus two fibrations on rational surfaces of degree seven	123

古い数学に新しい生命の息吹を 究極の完全数

飯高 茂

1 生き甲斐を求めて

私は 2012 年度末に 70 歳で定年となり引退することになったが、その数年前から引退後の生活をあれこれ想像し、仕事が無くなったら生き甲斐を喪失し精気を失った抜け殻になってしまうのではないかと案じた。そこで、引退 1 年前に自分のホームページにおいて

「2013 年 4 月から退職して暇になります。数学や数学教育についての助言、講演などどんな仕事も無報酬で行います」

というアナウンスを載せた。これはそれなりに話題にのぼり、ツイッタで拡散したこともあったという。しかし実際に「無報酬」と宣伝しても仕事が来ない。半年たっても問い合わせがなかったのである。そして私の生き方は世間から無価値のものとしてしか評価されなかったのかと思い暗澹として正月を過ごした。2 月になるころ都内のある私立高校が「高校生の数学クラブで指導ないし助言をしてもらえないか」と密かに打診してきた。その後、特段の事務手続きは無く、4 月になったので初めの月曜日にさっそく高校に行った。講師控え室に専用の机が用意してあった。ここで弁当が食べれると思ううれしかった。

高校には数学クラブがあり 10 名前後の生徒がいて、グループに別れて研究活動をしている。先生方の説明によると、数年前から高校生もオリジナルな研究を行うこと、研究成果を本当の学会で発表することを国が推奨しているとのことだった。

こんなことも動機となり数学研究のクラブができて、オイラー関数の研究、置換群とくにバイグラスマニアンの研究、微分方程式をもちいて伝染病の拡散の状況のシミュレーションをするなどをそれぞれして校内や校外で研究発表している。私も研究発表には数回参加させてもらった。

高校では自分は助言者であり高校生に直接指図できない。求められれば助言するだけにしないといけないと自己規制した。しかし高校の先生方はも生徒さんも私を特別視することなくフランクに受け入れてくれた。

その結果、私は高校生に理解できる範囲で新しい数学研究を行う必要が生じた。これは私にとって全く新しいチャレンジであって、高校生が理解可能な問題を探し発展させなければいけなくなった。その結果 私自身も成長し新しい数学の研究ができ大きく広がった。

無報酬の仕事ではあるがそこから得られる果実はきわめて大きく真に価値の高いものになりつつある。報酬のある仕事もときどきあるがそれは単発でそこだけの話で終わる。無報酬の仕事は限りなく続けることになる。この違いは巨大である。かくして現役の教授時代に比べて 2 倍も 3 倍も数学研究に時間をさけるようになり至福の時を過ごすようになった。

2012 年の冬、現代数学社から雑誌『理系への数学』をリニューアルし『現代数学』とする予定なので、長期連載をしてくれないか、というメールが届いた。これも私の H P での自爆的広告の効果である。

28 年間学習院大学に勤務したがそこでは学生にそれなりの数学研究をすることを薦め研究成果を卒業論文としてまとめることにした。卒業論文は学生にとっての義務ではなく飯高研究室の流儀

としてうけいれてもらった。学生は最初こそとまどいながらも自分なりの研究成果がでると見違えるほど意欲的になる。そこでコンピュータの役割が大きい。フリーソフトの swi-prolog を用いて数学研究プログラムを自分で作り実行した結果、数学的に意味のある成果ができればそれを証明しある程度まとまったら論文にする。自分で出した結果を証明するのだからこんなに張り合いのある仕事は他にない。その上、学生卒業論文を HP に載せて全面公開した。学生は公開されることを喜びこしすれ反対することはなかった。

『現代数学』にはそれらの結果を紹介することを主な目的とし連載の題名は「数学の研究はじめよう」とした。最初の原稿は「10 のべきの階乗の研究」、「オイラー関数の評価」、「誕生日を遊ぶ」、「完全数の一般化」などになった。

「完全数の一般化」の原稿(印刷前)はとくに高校生を意識し彼らにも読める形で書いた。ゼミの形で読んでもらったところミスプリントをいくつか指摘してくれた。これは高校生がきちんと読んでいることの証拠である。

2 完全数と3点セット

自然数 a の約数の和を記号 $\sigma(a)$ で表すことはすでに確立されたことあるがこれを自然数 a の関数とみてユークリッド関数と呼びたい。

素数べき $a = p^e$ のとき $\sigma(p^e) = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}$ がわかる。一般には a, b が互いに素ならば

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

が成り立つ。これを $\sigma(a)$ は乗法性を持つと言う。

2.1 等比数列の和

$a = 2^e$ とし、等比数列の和の公式を用いると

$$\sigma(a) = \sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1 = 2a - 1.$$

と書けるから $a = 2^e$ なら $\sigma(a) = 2a - 1$ を満たす。

これはごく初等的なことであるが、等比数列の和の公式が用いられていることに注意を払いたい。そこで数学の世界によくあることだが、この逆を問題として考える。

$\sigma(a) = 2a - 1$ を満たす自然数 a は $a = 2^e$ に限るか? この性質をもつ自然数を概完全数 (almost perfect number) という。

概完全数の数表を観察すると 2 のべきがでてきた。しかし 2 のべき以外に概完全数があるかは、未だに解決されることなく、一見やさしそうで意外に難しい問題として残されている。

2.2 3点セット

関連して次の問題を合わせて考え、 $a = 2^e$ に関しての 3 点セットと言う。

- (1) $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たす自然数は何か、(これは完全数で次項でふれる)
- (2) $\sigma(a) - 2a = -1$ を満たす自然数は何か、(概完全数)
- (3) $\sigma(a) - 2a = 1$ を満たす自然数は何か。

$\sigma(a) - 2a; a < 2000; |\sigma(a) - 2a| < 10$ の順に並べた表をみて見よう。

表 1: $\sigma(a) - 2a$ の値が 1 桁

a	素因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a) - 2a$
22	[2, 11]	36	−8 ; 8 だけ平行移動の完全数
130	[2, 5, 13]	252	
184	[2 ³ , 23]	360	
1012	[2 ² , 11, 23]	2016	
50	[2, 5 ²]	93	−7
7	[7]	8	−6 ; 6 だけ平行移動の完全数
15	[3, 5]	24	
52	[2 ² , 13]	98	
315	[3 ² , 5, 7]	624	
592	[2 ⁴ , 37]	1178	
1155	[3, 5, 7, 11]	2304	
9	[3 ²]	13	−5
5	[5]	6	−4 ; 4 だけ平行移動の完全数
14	[2, 7]	24	
44	[2 ² , 11]	84	
110	[2, 5, 11]	216	
152	[2 ³ , 19]	300	
884	[2 ² , 13, 17]	1764	

表 2: $\sigma(a) - 2a$ の値が 1 桁

a	素因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a) - 2a$
3	[3]	4	−2 ; 2 だけ平行移動の完全数
10	[2, 5]	18	
136	[2 ³ , 17]	270	
2	[2]	3	−1 ; 2 のべき, 概完全数
4	[2 ²]	7	
8	[2 ³]	15	
16	[2 ⁴]	31	
32	[2 ⁵]	63	
64	[2 ⁶]	127	
128	[2 ⁷]	255	
256	[2 ⁸]	511	
512	[2 ⁹]	1023	
1024	[2 ¹⁰]	2047	

2.3 完全数の問題

$a = 6$ や $a = 28$ は $\sigma(a) = 2a$ を満たす. 実際 $1+2+3+6 = 2 \times 6$, $1+2+4+7 \times (1+2+4) = 2 \times 28$ となる. 一般に $\sigma(a) = 2a$ を満たす自然数 a をユークリッドら古代ギリシャの数学者は完全数 (perfect number) と呼んだ. 完全数の問題とは,

- 偶数の完全数は無限にあるか.
- 奇数の完全数はあるか,

などであるがこれらは未解決の難問で現代数学のパワーを使っても解くことは困難である. 数学史で有名な3大問題 (角の3等分, 正方形と等面積の円の作図, 立方体の倍積問題) よりはるかに難しい.

3 オイラーの解

オイラーは偶数の完全数の形を決定することに成功した. その証明は簡単だが、さすがはオイラーといいたいくなる優れたものである. キーとなる事実は $\sigma(a) = a + 1$ を満たすなら a は素数である, という素数の判定法である.

a を偶数の完全数とすると $a = 2^e L$ (L : 奇数) と書ける.

$$\sigma(a) = \sigma(2^e L) = \sigma(2^e) \sigma(L) = (2^{e+1} - 1) \sigma(L).$$

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと

$$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1) \sigma(L) = N \sigma(L).$$

$\sigma(a) = 2a$ によって

$$N \sigma(L) = (2^{e+1} - 1) \sigma(L) = \sigma(a) = 2a = 2 \times 2^e L = (N + 1)L.$$

そこで $N(\sigma(L) - L) = L$ となる.

$d = \sigma(L) - L$ とおけば, $Nd = L$.

$e > 0$ により $N > 1$. それゆえ $d < L$.

1. $d = 1$ のとき $N = L$, $1 = \sigma(L) - L$.

これは L の約数は $1, L$ を意味し定義により L は素数 p .

2. $d > 1$ のとき $d \neq 1, L$. $1, L$ 以外に L の約数 d のあることを意味し $\sigma(L) \geq 1 + L + d$. その結果 $d = \sigma(L) - L \geq 1 + d$. これは矛盾.

かくして完全数 a は $2^e L = 2^e p$ と書けてこの素数 p は $p = 2^{e+1} - 1$ と表示できる.

高校生はこのような議論を素直に受け入れることができた.

4 ユークリッドの陪関数 $\sigma(a)$

$s(a)$ を a の相異なる素因数の数とする. また q_1 を a の最小の素因数とする.

約数の和関数 (ユークリッド関数) $\sigma(a)$ の陪関数は

$$\tilde{\sigma}(a) = \frac{\sigma(a)}{2^s}$$

で定義されこの関数の値は正の有理数である.

陪関数について次の評価式が成り立つ.

定理 1 $2 \leq s = s(a)$ とするとき $2\tilde{\sigma}(a) < a - 2$ を満たす. ただし, $s = 2, q_1 = 2$ は除外する.

定理 2 $2\tilde{\sigma}(a) - a = -1$ を満たすとき $a = 2^e p$ と書ける. ここで $p = 2^{e+1} + 1$ は素数である.

このとき $e + 1$ は 2^m となる. $F_m = 2^{2^m} + 1$ はフェルマー数.

a を偶数完全数とすると, オイラーにより $a = 2^e p, p = 2^{e+1} - 1$ と書ける.

$$\tilde{\sigma}(a) = \tilde{\sigma}(2^e p) = \frac{(2^{e+1} - 1)(p + 1)}{4} = \frac{p 2^{e+1}}{4} = \frac{a}{2}$$

ゆえに

$$2\tilde{\sigma}(a) - a = 0$$

この逆が成立する.

定理 3 $2\tilde{\sigma}(a) - a = 0$ を満たすとき $a = 2^e p$ と書ける. ここで $p = 2^{e+1} - 1$ は素数である.

すなわち a は偶数完全数である.

5 擬素数

$a = p$ が素数の場合, $\tilde{\sigma}(p) = \frac{p+1}{2}$ なので $2\tilde{\sigma}(p) - p = 1$ が成り立つ. よって a が素数であれば $2\tilde{\sigma}(a) - a = 1$ が成り立つ.

$2^{e+1} - 3$ が素数 p になる場合, $2^e \cdot p$ を指数 e の擬素数とよび $\mathbf{p}_e$ で記す. $a = \mathbf{p}_e$ とおくと $2\tilde{\sigma}(a) - a = 1$.

定理 4 自然数 a が $2\tilde{\sigma}(a) = a + 1$ を満たすとき a は素数または指数 e の擬素数となる.

表 3: 擬素数の表

e	$2^{e+1} - 3 = p$	$2^e \times p = a$
2	$2^3 - 3 = 5$	$2^2 \times 5 = 20$
3	$2^4 - 3 = 13$	$2^3 \times 13 = 104$
4	$2^5 - 3 = 29$	$2^4 \times 29 = 464$
5	$2^6 - 3 = 61$	$2^5 \times 61 = 1952$
8	$2^9 - 3 = 509$	$2^8 \times 509 = 130304$
9	$2^{10} - 3 = 1021$	$2^9 \times 1021 = 522752$
11	$2^{12} - 3 = 4093$	$2^{11} \times 4093 = 8382464$
13	$2^{14} - 3 = 16381$	$2^{13} \times 16381 = 134193152$

意外にも多くの擬素数がある. $e = 2, 3, 4, 5$ と最初の 4 つが出てくるところがすごい.

- (1) $2\tilde{\sigma}(a) = a$ の場合は 偶数完全数になる.
- (2) $2\tilde{\sigma}(a) - a = -1$ の場合はフェルマー素数で書ける.
- (3) $2\tilde{\sigma}(a) - a = 1$ の場合は擬素数になる.

さらに $|2\tilde{\sigma}(a) - a| < 10$ の場合の a の形を決めることができる. 陪関数では話がうまく進むこと驚くばかりである.

5.1 $\sigma(a) - a = 1$

オイラーの証明では $\sigma(a) - a = 1$ なら a は素数ということが有効に使われている. 高校生への課題として $a = 2p; p > 2$ (奇素数の 2 倍) になることを $\sigma(a)$ で判定したらどうかという問題を出してみた. しかし無責任なことはできないので事前に自分でいろいろ調べた.

$a = 2p$ のとき (p : 奇素数) $\sigma(a) = 3(p+1) = 3(\frac{a}{2} + 1)$ となるので $2\sigma(a) = 3a + 6$ になる.

この逆問考える.

すなわち $2\sigma(a) = 3a + 6$ を満たすとき, $a = 2p$ になるか?

意外なことに $a = 2p$ の他 8 が解であった. $a = 4p, 5p, a = P^E p (p \neq P: \text{素数})$ の場合はうまくできた.

しかし, $a = 6p, 28p$ などの場合は特徴づけがきわめて難しいことも明らかになった. ここから高校生でも解ける問題や, 絶対に解けない数多くの問題が派生してきたので, 好適な問題と言えよう. これらについては、『現代数学』に連載し結果を報告した.

5.2 $s(a) = 2$ のときの完全数の証明

a が完全数のとき $s(a) = 2$ を仮定して解こう. (偶数を仮定していないから意味がある)

a を素因数分解し $a = p^e q^f$ とする. $X = p^e, Y = q^f$ とおくと $a = XY$ となる.

$\bar{p} = p - 1, \bar{q} = q - 1$ を使うと

$$\sigma(a) = \frac{(pX - 1)(qY - 1)}{\bar{p}\bar{q}}$$

であり, $A = pX - 1, B = qY - 1, \rho' = \bar{p}\bar{q}$ とおけば

$$\frac{AB}{\rho'} = 2XY.$$

書き直して

$$AB = 2\rho'XY.$$

$AB - 2\rho'XY$ の XY の係数を R とおくと $R = pq - 2\rho'$ となり

$$RXY = pX + qY - 1.$$

この式を基本等式という.

$R = pq - 2\rho' = 2 - (p-2)(q-2)$ であり基本等式から $R > 0$ なので $p = 2$ かつ $R = 2$. したがって $2XY = 2X + qY - 1$ が成り立ち, $Y \geq q$ によって,

$$\begin{aligned} 0 &= 2XY - (2X + qY - 1) = (2X - q)Y - (2X - 1) \\ &\geq (2X - q)q - (2X - 1) \\ &= 2X(q - 1) - (q^2 - 1) \\ &= \bar{q}(2X - q - 1) \end{aligned}$$

よって

$$q + 1 \geq 2X.$$

一方, $(2X - q)Y = (2X - 1)$ によれば $2X - q \geq 1$. すなわち $2X \geq q + 1$. よって $2X = q + 1, q = 2^{e+1} - 1$.

ここで $2X = q + 1$ が成り立ち $Y = q$ が得られた. したがって, $a = XY = 2^e q, q = 2^{e+1} - 1$ になったので a は完全数.

この論法は非常に有効である. ただし $s(a) = 2$ を仮定しているので定理にはならない.

6 完全数の平行移動

$q = 2^{e+1} - 1$ が素数のとき $2^e q$ は完全数になる. 完全数の平行移動とは次の意味である.

別のパラメータ m に対して $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した完全数という. ただし m は偶数の整数.

6.1 完全数の数表

表 4: 完全数の場合

$e \bmod 4$	e	$e + 1$	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2 * 3$	6	6
2	2	3	$2^2 * 7$	28	8
0	4	5	$2^4 * 31$	496	6
2	6	7	$2^6 * 127$	8128	8
0	12	13	$2^{12} * 8191$	33550336 (1456)	6
0	16	17	$2^{16} * 131071$	8589869056 (Cataldi, 1588)	6
2	18	19	$2^{18} * 524287$	137438691328 (Cataldi, 1588)	8
2	30	31	A	B (Euler, 1772)	8
0	60	61	C	D (Pervushin, 1883)	6
0	88	89	E	F (Powers, 1911)	6
0	106	107	G	H (Powers, 1914)	8
0	126	127	I	J (Lucas, 1876)	8

$$A = 2^{30} * 2147483647$$

$$B = 2305843008139952128$$

$$C = 2^{60} * 2305843009213693951$$

$$D = 2658455991569831744654692615953842176$$

$$E = 2^{88} * 618970019642690137449562111$$

$$F = 191561942608236107294793378084303638130997321548169216$$

$$G = 2^{106} * 162259276829213363391578010288127$$

$$H = 13164036458569648337239753460458722910223472318386943117783728128$$

$$I = 2^{126} * 170141183460469231731687303715884105727$$

$$J = 14474011154664524427946373126085988481573677491474835889066354349131199152128.$$

a の末尾の数は 6 か 8. 言い換えると $a \equiv 6$ または $8 \pmod{10}$. これは完全数の持つ周知の性質のひとつ.

数表を観察すると次の結果がわかる. ただし, ここで $e > 1$ の場合しか扱わない.

$e = 1$ は例外の場合として考える.

- $e \equiv 0 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1 \pmod{10}$. $a \equiv 6 \pmod{10}$.
- $e \equiv 2 \pmod{4}$ なら $q \equiv 7 \pmod{10}$. $a \equiv 8 \pmod{10}$.

7 m だけ並行移動した場合の数表

7.1 $m = 2$

2 だけ並行移動した場合を見てみよう. $q = 2^{e+1} + 1$ が素数の場合になる.

表 5: $q = 2^{e+1} + 1$ が素数

e	$e + 1$	$e \bmod 4$	$2^e * q$	a
0	1	0	3	3
1	2	1	$2 * 5$	10
3	4	3	$2^3 * 17$	136
7	8	3	$2^7 * 257$	32896
15	16	3	$2^{15} * 65537$	2147516416

3,5,17,257,65537 らは 5 個のフェルマー素数である.

2 だけ平行移動した場合の $a = 3, 10, 136, 32896, 2147516416$ をフェルマーの完全数と呼んでやりたい.

$e \geq 3$ のとき $q \equiv 7, a \equiv 6 \pmod{10}$. とくに a の末尾の数は 6.

Proof. $e + 1 = 2^r$ により $r \geq 2$ なら $e + 1 = 4N$ と書けるので

$q = 2^{e+1} + 1 \equiv 2 \pmod{5}$. 一方, q は奇数なので $2^e \equiv 3 \times 2^{e+1}$ なので $q \equiv 7 \pmod{10}$.

$a = 2^e * q \equiv 3 * q \equiv 6 \pmod{5}$, a は偶数なので $a \equiv 6 \pmod{10}$.

7.2 $m = 4$

$q = 2^{e+1} + 3$ が素数の場合

表 6: $p = 2, m = 4$

$e \bmod 4$	e	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	5	$2^5 * 67$	2144	4
2	6	$2^6 * 131$	8384	4
3	11	$2^{11} * 4099$	8394752	2
2	14	$2^{14} * 32771$	536920064	4
3	15	$2^{15} * 65539$	2147581952	2
1	17	$2^{17} * 262147$	34360131584	4
3	27	A	B	2
1	29	C	D	4
2	54	E	F	4
2	66	G	H	4
3	83	I	J	2
2	98	K	L	4

$A = 2^{27} * 268435459, B = 36028797421617152$

$C = 2^{29} * 1073741827, D = 576460753914036224$

$$E = 2^{54} * 36028797018963971, F = 576460753914036224$$

$$G = 2^{66} * 147573952589676412931$$

$$H = 649037107316853507609507569598464$$

$$I = 2^{83} * 19342813113834066795298819$$

$$J = 187072209578355573530071687601903897267059558449152$$

$$K = 2^{98} * 633825300114114700748351602691$$

$$L = 200867255532373784442745261543596063265446546273971631816704$$

表を見ると

- $e \equiv 1 \pmod{4}$ なら $q \equiv 7, a \equiv 4 \pmod{10}$.
- $e \equiv 2 \pmod{4}$ なら $q \equiv 1, a \equiv 4 \pmod{10}$.
- $e \equiv 3 \pmod{4}$ なら $q \equiv 9, a \equiv 2 \pmod{10}$.

8 m だけ平行移動した方程式の解

パラメータ m に対して $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した完全数ということにしたがこれの満たす方程式を求めよう. ただし m は偶数の整数.(実際には 1 桁程度に留めるのがよいだろう)

$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = (2^{e+1} - 1)(q + 1), q + 1 = 2^{e+1} + m$ に注意して次の式変形を行う.

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma(2^e q) \\ &= (2^{e+1} - 1)(q + 1) \\ &= (q - m)(2^{e+1} + m) \\ &= q(2^{e+1} + m) - m(2^{e+1} + m) \\ &= 2a + qm - m(q + 1) \\ &= 2a - m.\end{aligned}$$

かくして $\sigma(a) = 2a - m$ がえられた.

方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ の解は偶数完全数の平行移動としてできるか?

という問題を建てる.

m が少し大きいと反例が出やすい. $m = 2$ では反例が出なかった

9 諸例

9.1 $\sigma(a) = 2a - 2$

$m = 2$ すなわち, $\sigma(a) = 2a - 2$ を満たす解の表を作った.

たぶん解はこれだけ.

[研究課題]

$\sigma(a) = 2a - 2$ で a が偶数なら $s(a) = 2$ を満たすか? (オイラーの証明を真似てもうまくいかないうだろう)

表 7: $\sigma(a) = 2a - 2$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
3	[3]	4
10	[2, 5]	18
136	$[2^3, 17]$	270
32896	$[2^7, 257]$	65790
2147516416	$[2^{15}, 65537]$	

$s(a) = 3$ を満たす解があるか.

次に $m = 4$ の場合を扱う.

9.2 $\sigma(a) = 2a - 4$

$\sigma(a) = 2a - 4$ を満たす解の表を作った.

表 8: $\sigma(a) = 2a - 4$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
5	[5]	6
14	[2, 7]	24
44	$[2^2, 11]$	84
110	$[2, 5, 11]$	216
152	$[2^3, 19]$	300
884	$[2^2, 13, 17]$	1764
2144	$[2^5, 67]$	4284
8384	$[2^6, 131]$	16764
18632	$[2^3, 17, 137]$	37260

$a = 5$ は $s(a) = 1$ なので反例になる. この例は微小解として後で扱うことになる.
 $a = 110, 884, 18632$ は $s(a) = 3$ なので反例になる. 反例はさらにありそうである.

[研究課題]

$\sigma(a) = 2a - 4$ で a が偶数なら $s(a) = 2, 3$ を満たすか?

$s(a) = 3$ を満たす解をすべて求めよ.

10 底が3のとき

10.1 $a = 3^e$ の場合

完全数では2のべきが基本であったがここでは3のべきの場合を扱う.

$a = 3^e$ とおくと $\sigma(a) = \sigma(3^e) = \frac{3^{e+1}-1}{2}$, なので $2\sigma(a) = 3^{e+1} - 1 = 3a - 1$.

そこで $2\sigma(a) - 3a = -1$ を満たす a は何かを問題とする. これだけを単独で考えるのはもったいないので 3 点セットにして

(1) $2\sigma(a) - 3a = -1$ を満たす自然数は何か,

(2) $2\sigma(a) - 3a = 1$ を満たす自然数は何か,

(3) $2\sigma(a) - 3a = 0$ を満たす自然数は何か

を問題にする.

10.2 数値計算例

$2\sigma(a) - 3a = -1$ を満たす自然数についてパソコン君に計算してもらう.

表 9: $2\sigma(a) - 3a = -1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
3	4	$[3]$
9	13	$[3^2]$
27	40	$[3^3]$
81	121	$[3^4]$
243	364	$[3^5]$
729	1093	$[3^6]$
2187	3280	$[3^7]$
6561	9841	$[3^8]$
19683	29524	$[3^9]$

この場合は期待にこたえて 3 のべきが並んで出てきた. 言い換えれば $s(a) = 1$ の解だけである. $s(a) = 1$ を仮定したとき a が 3 のべきになることはすぐわかる.

11 3 を底とする完全数

$a = 3^e$ に対して $\sigma(3^e) = \frac{3^{e+1} - 1}{2}$ が素数 q になったとする. このとき $\alpha = aq$ を 3 を底とする完全数と言うことにする.

11.1 3 を底とする完全数の数表

$$A = 3^{70} * 3754733257489862401973357979128773$$

$$B = 9398681223266955568884336291512894246732289173595197254503404033277$$

$$C = 3^{102} * 6957596529882152968992225251835887181478451547013$$

$$D = 322720996484187844746619306273472246597518644973851120620$$

$$--- 67563800310073569424269938090581449997117$$

これらから次の結論を導くことができる.

- $e \equiv 2 \pmod{4}$ のとき q の末尾の数は 3, a の末尾の数は 7.

表 10: 3 を底とする完全数

$e \bmod 4$	e	素因数分解	$q \bmod 10$	a	$a \bmod 10$
2	2	$3^2 * 13$	3	117	7
2	6	$3^6 * 1093$	3	796797	7
0	12	$3^{12} * 797161$	1	423644039001	1
2	70	A	3	B	7
2	102	C	3	D	7

- $e \equiv 0 \pmod{4}$ のとき q の末尾の数は 1, a の末尾の数は 1.

普通の完全数では末尾の数が 4 または 6 であったが 3 を底とする完全数では末尾の数が 7 または 1 になる.

11.2 3 を底とする完全数の方程式

普通の完全数の定義では $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たす数のことでこれが偶数の場合はオイラーにより $a = 2^e \sigma(2^e)$; (ただし, $\sigma(2^e)$ は素数) が証明された.

ここではオイラーの与えた形から出発し $\sigma(3^e)$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ を **3** を底とする完全数と呼ぶことにした. ここが少しずるい.

$$q = \sigma(3^e) = \frac{3^{e+1} - 1}{2} \text{ より } q + 1 = \frac{3^{e+1} + 1}{2} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} 2\sigma(a) &= 2\sigma(3^e)\sigma(q) \\ &= (3^{e+1} - 1)(q + 1) \\ &= q(3^{e+1} + 1) \\ &= 3a + q \end{aligned}$$

ここから q を消すことができないので a の最大素因子を $\text{Maxp}(a)$ と書く記号を導入すると次の方程式の形にまとめられる.

$$2\sigma(a) = 3a + \text{Maxp}(a).$$

次の大きな問題はこの方程式を満たす a は $\sigma(3^e)$ が素数 q になるのをを用いて $a = aq$ と書くことができるか, である.

とりあえず, この問題を **3** を底とする完全数の基本問題と呼ぶ. これは難しそうな問題だが逆に反例をつくりやすいかもしれない.

12 3 を底とする完全数の平行移動

定義によれば $q = \sigma(3^e) = \frac{3^{e+1} - 1}{2}$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ が 3 を底とする完全数である. これを m だけ 平行移動することを考える.

$q = \frac{3^{e+1} - 1}{2} + m$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ を m だけ 平行移動した **3** を底とする完全数という. これらが存在しなければ意味がないのでパソコンで確認する.

12.1 $p = 3.m = 1$

$p = 3.m = 1$ のとき $q = \frac{3^{e+1}+1}{2}$ は素数になる.

表 11: $m = 1$

$e \bmod 4$	e	素因数分解	$q \bmod 10$	a	$a \bmod 10$
1	1	$3 * 5$	5	15	7
3	3	$3^3 * 41$	1	1107	7
3	15	$3^{15} * 21523361$	1	308836705316427	7
3	31	$3^{31} * 926510094425921$	1	X	7
3	63	A	1	B	7

$$X = 572280636715419056279672990187$$

$$A = 3^{63} * 1716841910146256242328924544641$$

$$B = 1965030762956430528586812143569325391583084017460083159697707$$

q の末尾の数は 1, a の末尾の数は 7.

$e + 1 = 2, 4, 16, 64$ などではこれらは 2 の指数が 2 のべきである.

$q = \frac{3^{e+1}+1}{2}$ は次のとおり.

i) 5,

ii) 41,

iii) 21523361,

iv) 926510094425921

v) 1716841910146256242328924544641

これらはフェルマーの素数に類似している. そこで

3 を底とするフェルマー素数という.

5 を除外すると末尾の数は 1.

本来のフェルマー素数と同じく 5 個あるのが不思議でならない.

これらを 3 を底とするフェルマーの完全数という.

15 を除外すると末尾の数は 7 である. 人間は正直な者で名前がつくと研究したくなる.

このようなフェルマーの完全数を研究した人はいないと思う. 研究の処女地と言って良い.

13 m だけ平行移動した完全数の方程式

$q = \frac{3^{e+1}-1}{2} + m$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ とおく. これが満たす完全数の方程式を決定しよう.

$q + 1 = \frac{3^{e+1}+1}{2} + m$ に注意して,

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma(3^e q) \\ &= (3^{e+1} - 1)/2 * (q + 1)\end{aligned}$$

によって

$$\begin{aligned}
2\sigma(a) &= (3^{e+1} - 1)(q + 1) \\
&= 2(q - m)(q + 1) \\
&= 2q(q + 1) - 2m(q + 1) \\
&= q(3^{e+1} + 1 + 2m) - 2mq - 2m \\
&= 3a + q - 2m
\end{aligned}$$

かくして $q = \text{Maxp}(a)$ を使うと方程式

$$2\sigma(a) = 3a + \text{Maxp}(a) - 2m$$

がえられた.

この方程式を満たす解を探す.

一種の逆問題を考えることになる.

14 $\text{Maxp}(a)$ について

底が 3 の m だけ平行移動した完全数の方程式を移項してえられた

$$2\sigma(a) - 3a - \text{Maxp}(a) = -2m$$

に関して $2\sigma(a) - 3a - \text{Maxp}(a)$ を底が 3 の完全度という.

底が 3 の完全度の絶対値が 9 以下の場合 $a \leq 5000$ について数表を作った.

表 12: 底が 3 の完全度 の絶対値が 9 以下

a	[5]	$\sigma(a)$	完全度	特性
5	[5]	6	-8	$m = 4$ 平行移動
153	$[3^2, 17]$	234	-8	
26	[2, 13]	42	-7	
21	[3, 7]	32	-6	$m = 3$ 平行移動
1161	$[3^3, 43]$	1760	-6	
22	[2, 11]	36	-5	
3	[3]	4	-4	$m = 2$; 微小解
9	$[3^2]$	13	-4	
27	$[3^3]$	40	-4	
81	$[3^4]$	121	-4	
243	$[3^5]$	364	-4	
729	$[3^6]$	1093	-4	
2187	$[3^7]$	3280	-4	

表 13: 底が 3 の完全度 の絶対値が 9 以下

2	[2]	3	-2	$m = 1$ 平行移動
15	[3, 5]	24	-2	
741	[3, 13, 19]	1120	-2	
1107	[3 ³ , 41]	1680	-2	
14	[2, 7]	24	-1	完全数
4	[2 ²]	7	0	
117	[3 ² , 13]	182	0	
10	[2, 5]	18	1	$m = -2$ 平行移動
6	[2, 3]	12	3	
8	[2 ³]	15	4	
99	[3 ² , 11]	156	4	$m = -3$ 平行移動
759	[3, 11, 23]	1152	4	
999	[3 ³ , 37]	1520	6	$m = -4$ 平行移動
147	[3, 7 ²]	228	8	
3185	[5, 7 ² , 13]	4788	8	

この結果から面白い性質が見えるだろうか.

15 究極の完全数

15.1 究極の完全数とその平行移動

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を底が P の 究極の完全数と呼ぼう.

このとき $q = \frac{P^{e+1}-1}{P}$ となる. 言葉ができると諒解しやすくまた研究したくなるという効果がある.

究極の完全数を整数 m だけ平行移動する.

$q = \frac{P^{e+1}-1}{P} + m$ は素数として $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の完全数と呼ぶ.

16 諸例

16.1 $[p = 5, m = 0]$

$A = 2524354896707237777317531408904912382240581$

-7918479442596435546875 ¹

$B = 5^{126} * 146936793852785938496092067152780709727333194596510940$

$-18859396328480215743184089660644531$

$C = 172723371101888892507727037256[117digits]66189579945057630538940$

-4296875

この表によると q の下 2 桁は, 31 または 81.

¹ --- は引き続いている数を示す

表 14: $P = 5, m = 0$

e	素因数分解	a
2	$5^2 * 31$	775
6	$5^6 * 19531$	305171875
10	$5^{10} * 12207031$	119209287109375
12	$5^{12} * 305175781$	74505805908203125
46	$5^{46} * 177635683940025046467781066894531$	A
126	B	C

16.2 $[p = 7, m = 0]$

表 15: $P = 7, m = 0$

e	素因数分解	a
4	$7^4 * 2801$	6725201
12	$7^{12} * 16148168401$	223511436608353935601
130	A	B

$$A = 7^{130} * 850534611647968019495395416395[50digits]146$$

$$-930307290253537320447270457$$

$$B = 620064964809565522477522001004[160digits]1498675110124641$$

$$-86481525314793$$

$e \equiv 0 \pmod{4}$ なら a, q は末尾が 1.

$e \equiv 2 \pmod{4}$ なら $q \equiv 7, b \equiv 3 \pmod{10}$.

17 究極の完全数の満たす方程式

平行移動も許した究極の完全数の満たす方程式を作る.

$$q = \frac{P^{e+1}-1}{P} + m \text{ であって}$$

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$$

になり, $q + 1 = \frac{P^{e+1}+P-2}{P} + m$ を用いて次のように式変形する.

$$\begin{aligned}
 \sigma(a) &= \frac{P^{e+1}-1}{P}(q+1) \\
 &= (q-m)(q+1) \\
 &= q(q+1) - m(q+1) \\
 &= \frac{q}{P}(P^{e+1} + P - 2) + mq - m(q+1) \\
 &= \frac{Pa + q(P-2)}{P} - m.
 \end{aligned}$$

これより $q = \text{Maxp}(a)$ を用いて

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m(P - 1). \quad (1)$$

これを m 平行移動した究極の完全数の基本方程式という.

例えば $P = 2$ なら

$$\sigma(a) = 2a - m.$$

$P = 2$ に限って不愉快な $\text{Maxp}(a)$ が消えた.

$P = 3$ なら

$$2\sigma(a) = 3a + \text{Maxp}(a) - 2m.$$

17.1 究極の完全数の基本問題

(1) を満たすとき

素数 $q = \frac{P^e+1}{P} + m$ を基にして $a = P^e q$

とかけるか? という問題を究極の完全数の基本問題と言う. これが一般に成立するはずはないが
反例も研究する価値が高い.

これが一般に成立するはずはない. とりあえず反例を探す.

18 諸例

次に方程式を満たす a を表示する.

$a = < 200000$ 程度の範囲で全数検査するので非常に時間がかかる.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m(P - 1)$$

18.1 $[P = 5, m = 0]$

表 16: $[P = 5, m = 0]$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
775	$[5^2, 31]$	992

微小解は無い.

18.2 $[P = 7, m = 0]$

$a = 3^2$ は微小解.

表 17: $[P = 7, m = 0]$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
9	$[3^2]$	13

19 微小解

平行移動しない場合を扱う. したがって

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a)$$

を満たす. $s(a) = 1$ のときの解を求めよう. $a = q^f$ が上の式を満たすとする.
 $f = 1$ のとき.

$$\overline{P}(q + 1) - Pq = (P - 2)q.$$

これより,

$$P - q - 1 = (P - 2)q.$$

$(P - 1)(q - 1) = 0$ がでて矛盾.

$f \geq 2$ のとき.

$Y = q^f$ とおけば $a = Y, \overline{q}\sigma(a) = qY - 1$ を満たし $\text{Maxp}(a) = q$ によって

$$\frac{\overline{P}(qY - 1)}{\overline{q}} = PY + (P - 2)q.$$

整理して

$$Y(\overline{P}q - P\overline{q}) = \overline{P} + (P - 2)q\overline{q}.$$

これより

$$\overline{P} = Y(P - q) - (P - 2)q\overline{q} = q(q^{f-1}(P - q) - (P - 2)\overline{q}).$$

よって $\overline{P} = wq$ を満たす自然数 w がある. q を払って

$$w = (q^{f-1}(P - q) - (P - 2)\overline{q}) = P(q^{f-1} - \overline{q}) - q^f + 2\overline{q}.$$

よって $P = 1 + wq$

$$w = (1 + wq)(q^{f-1} - \overline{q}) - q^f + 2\overline{q}.$$

$$w(1 - q^f + q\overline{q}) = -q^f + q^{f-1} + \overline{q}.$$

$w = 1$ のとき.

$P = 1 + q$ となり P, q はともに素数だから $q = 2, P = 3, a = Y = 2^f$.

$2\sigma(a) = 3a + 2$ なので $2(2Y - 1) = 3Y + 2$. これより $a = Y = 4$.

$w \geq 2$ のとき.

$$2(q^f - q\overline{q} - 1) \leq w(q^f - q\overline{q} - 1) = q^f - q^{f-1} - \overline{q}.$$

これより

$$q^f - 2q\bar{q} - 2 \leq -q^{f-1} - \bar{q}.$$

$$q^{f-1}(q+1) \leq 2q^2 - 3q + 3.$$

$f \geq 3$ のとき.

$$q^2(q+1) \leq 2q^2 - 3q + 3.$$

変形して

$$q^3 - q^2 \leq 3 - 3q.$$

これは矛盾.

$f = 2$ のとき

$$w(q^2 - q(q-1) - 1) = q^2 - q - (q-1) = \bar{q}^2.$$

$$q^2 - q(q-1) - 1 = q-1, w\bar{q} = \bar{q}^2 \text{ によって } w = \bar{q}.$$

$$P-1 = wq = q(q-1) \text{ により } P = 1 + q(q-1).$$

以上により, P, q が素数で $P = 1 + q(q-1)$ を満たすとき方程式で定められた底が P のとき $a = q^2$ が微小解.

微小解が存在するための素数 P の条件は素数 q があって $P = 1 + q(q-1)$ を満たすことである.

このような素数として $P = 7, 43$ がある.

$P = 3$ のとき微小解 $q = 2^2$; $P = 7$ のとき微小解 $q = 3^2$; $P = 157$ のとき微小解 $q = 13^2$ などが現れる.

19.1 微小解の存在する素数

微小解の存在する素数はほかにあるだろうか. パソコン君に頼むと次のように意外に多くの解を出してきた.

表 18: P, q が素数

q	P
3	7
7	43
13	157
67	4423
79	6163
139	19183
151	22651
163	26407
193	37057

a, b が互いに素な自然数のとき 等差数列 $\{an + b\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) には無限に多くの素数がある. これが有名な Dirichlet の定理である.

しかし, 2 次数列たとえば $\{n^2 + 1\}$ には無限に多くの素数があるに違いない. これは有名な数論における期待であるが証明はできるはずがない, と思われているほど難しい. $\{n^2 - n + 1\}$ にも無限に多くの素数があることは確実だが証明はない.

微小解の存在条件では n を素数に限りつつ $\{n^2 - n + 1\}$ には無限に多くの素数があるかを問うている.

これは真に難問中の難問である. このような難問が, 微小解の存在問題として登場した. 実に不思議なことである.

Deformation for Any Characteristic Varieties

Kazuhisa Maehara at Ogaki

February 15, 2015

Abstract

In this article we shall construct a theory for deformation of non necessarily projective fibre spaces of positive characteristic and apply it to an analogy of Iitaka-Viehweg conjecture of positive characteristic([Iita],[Vieh]).

1 Introduction

Let k be a field of any characteristic. For the sake of simplicity, assume k be algebraically closed. Fix an algebraically closed field of infinite transcendental degree over k once for all. Let X and Y be varieties over k , i.e., k algebraic schemes geometrically reduced and geometrically irreducible over k . Let $k(X)$ and $k(Y)$ denote separable function fields of X and Y , respectively. Let $k(X)^{sep}$ and $k(Y)^{sep}$ be separable closures of $k(X)$ and $k(Y)$ in the algebraically closed field and let G_X and G_Y be their Galois groups, respectively.

Proposition 1.1. *Assume $k(X)/k(Y)$ be a separable extension. Then there exists the canonical topological group homomorphism $G_X \rightarrow G_Y$, the image of which is an open subgroup in G_Y .*

Proof. A field extension L/K is called a separable extension if $L \otimes_K K'$ is reduced for any field extension K'/K ([Bak]). Since $k(X) \supset k(Y)$ is separable, $k(Y)$ has a separating transcendence basis B , so that $k(Y)/k(B)$ is a finite separable extension and one can find a separating transcendence basis $B' \supset B$ for $k(Y)$. Let $k(B)^{sep}$, $k(B')^{sep}$ be the separable closure of $k(B)$ and $k(B')$ in the given algebraically closed field, respectively. Since

$$G_X = \text{Aut}_{k(X)}(k(X)^{sep}) = \text{Gal}(k(B')^{sep}/k(X))$$

$$G_Y = \text{Aut}_{k(Y)}(k(Y)^{sep}) = \text{Gal}(k(B)^{sep}/k(Y))$$

the restriction of the automorphism group G_X on $k(Y)^{sep} = k(B)^{sep}$ induces a surjective group homomorphism

$$\text{Aut}_{k(X)}(k(X)^{sep}) \longrightarrow \text{Aut}_{k(Y')} (k(Y)^{sep}) = G_X|_{k(Y)^{sep}}$$

, where $k(Y') = k(X) \cap k(Y)^{sep}$ and so $k(Y')$ is the integral closure of $k(Y)$ in $k(X)$.

$$\text{Aut}_{k(Y')} (k(Y)^{sep}) = \text{Gal}(k(Y)^{sep}/k(Y'))$$

Since $k(Y')/k(Y)$ is a finite extension, one has an open subgroup inclusion, i.e., closed subgroup of finite index,

$$\text{Gal}(k(Y)^{sep}/k(Y')) \leq \text{Gal}(k(Y)^{sep}/k(Y)) = G_Y$$

Composing them, one obtains the canonical group homomorphism which is open

$$G_X \longrightarrow G_Y$$

□

Theorem 1.1. *Let $k(X)$ and $k(Y)$ be separable function fields over k which is algebraically closed. Suppose that there exist separable closures $k(Y)^{sep} \subset k(X)^{sep}$ of $k(X)$ and $k(Y)$ in the algebraically closed field with infinite transcendental elements over k . Then the extension $k(X)/k(Y)$ is determined by the canonical continuous open group homomorphism between the absolute Galois groups.*

$$\text{Hom}_k(k(Y), k(X)) \cong \text{Hom}^{con, open}((G_X, k(X)^{sep}), (G_Y, k(Y)^{sep})) \cong \text{Hom}^{con, open}(G_X, G_Y)/eqv$$

where eqv is determined by the inner automorphisms G_Y . In particular, putting $Y = X$ one has

$$\text{Aut}_k(k(X)) \cong \text{Aut}^{con}(G_X)/\text{Inn}(G_Y) = \text{Out}^{con}(G_X)$$

Proof. Since

$$\begin{aligned} k(X) &= (k(X)^{sep})^{G_X} \\ k(Y) &= (k(Y)^{sep})^{G_Y} \end{aligned}$$

one can recover $k(X) \supset k(Y)$ by the continuous open group homomorphism

$$G_X \longrightarrow G_Y$$

and an inclusion

$$k(X)^{sep} \supset k(Y)^{sep}$$

gives

$$k(X) = (k(X)^{sep})^{G_X} \supset k(Y)^{sep} \cap k(X) = (k(Y)^{sep})^{G_X} \supset (k(Y)^{sep})^{G_Y} = k(Y)$$

Let φ be a contravariant functor from the category of subfields of finite index of $k(X)$ to the category of the absolute Galois groups of finite coindex with G_X the initial object

$$\varphi(k(Y)) = \text{Gal}(k(Y)^{sep}/k(Y))$$

. One has

$$\begin{array}{ccc} k(X) & & \varphi(k(X)) \\ \alpha \uparrow & & \downarrow \varphi(\alpha) \\ k(Y) & & \varphi(k(Y)) \end{array}$$

Let ψ be a contravariant functor which is a quasi-inverse to φ

$$\psi(\text{Gal}(k(Y)^{sep}/k(Y))) = (k(Y)^{sep})^{G_Y}$$

One has

$$\begin{array}{ccc} G_X & & \psi(G_X) = k(X) \\ \beta \downarrow & & \uparrow \psi(\beta) \\ G_Y & & \psi(G_Y) = k(Y) \end{array}$$

One obtains

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(k(Y))) &= k(Y) \\ \varphi(\psi(G_Y)) &= G_Y \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(\alpha)) &= \alpha \\ \varphi(\psi(\beta)) &= \beta\end{aligned}$$

Hence putting $Y = X$ one has

$$\text{Aut}_k(k(X)) \cong \text{Aut}^{\text{con}}(G_X)/\text{Inn}(G_Y) = \text{Out}^{\text{con}}(G_X)$$

□

Corollary 1.1. *Let Z be a separating transcendence basis of $k(X)$ over k , i.e., $k(X)/k(Z)$ is a finite separable extension. Assume $Z' \subset Z$ is an algebraically independent set of $k(Y)$ such that $k(Y)/k(Z')$ is a finite extension. Let $k(Y'')$ be $k(Y) \cap k(Z')^{\text{sep}}$ and $k(Y') = k(X) \cap k(Z')^{\text{sep}}$. Then one has a diagram*

$$\begin{array}{ccccc} k(Z)^{\text{sep}} = k(X)^{\text{sep}} & \longleftarrow & k(X) & & \\ & & \uparrow & & \\ k(X) \cap k(Z')^{\text{sep}} = k(Y') & \longleftarrow & k(Y'') = k(Y) \cap k(Z')^{\text{sep}} & & \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ k(Z) & \longleftarrow & & & k(Z') \end{array}$$

and

$$H^0(G_X, k(Z)^{\text{sep}}) \leftarrow H^0(G_X, k(Z')^{\text{sep}}) \leftarrow H^0(G_{Y''}, k(Z')^{\text{sep}})$$

One obtains the canonical bijection:

$$\text{Hom}_k(k(Y''), k(X)) \cong \text{Hom}_{G_k}^{\text{cont, open}}(G_X, G_{Y''})/\text{Inn}(G_{Y''})$$

Here

$$G_X = \text{Gal}(k(Z)^{\text{sep}}/k(X)) \quad G_{Y'} = \text{Gal}(k(Z')^{\text{sep}}/k(Y')) \quad G_{Y''} = \text{Gal}(k(Z')/k(Y''))$$

Corollary 1.2. *$k(Y)$ is separable over k . Let Z' be a separating transcendence basis of $k(Y)$ over k and $Z \supset Z'$ an algebraically independent set of $k(X)$. Let $k(X') = k(X) \cap k(Z)^{\text{sep}}$ and*

$$G_{X'} = \text{Gal}(k(Z)^{\text{sep}}/k(X')) \quad G_Y = \text{Gal}(k(Z')^{\text{sep}}/k(Y))$$

Then one has the canonical bijection:

$$\text{Hom}_k(k(Y), k(X')) \cong \text{Hom}_{G_k}^{\text{cont, open}}(G_{X'}, G_Y)/\text{Inn}(G_Y)$$

In particular, when $k(X)/k(Y)$ is separable, one has

$$\begin{array}{ccccc} H^0(G_X, k(X)^{\text{sep}}) & \longleftarrow & H^0(G_X, k(Y)^{\text{sep}}) & \longleftarrow & H^0(G_Y, k(Y)^{\text{sep}}) \\ \uparrow = & & \uparrow = & & \uparrow = \\ k(X) & \longleftarrow & k(X) \cap k(Y)^{\text{sep}} & \longleftarrow & k(Y) \end{array}$$

and the canonical bijection:

$$\text{Hom}_k(k(Y), k(X)) \cong \text{Hom}_{G_k}^{\text{cont, open}}(G_X, G_Y)/\text{Inn}(G_Y)$$

Theorem 1.2. *Let k be an algebraically closed field, S a variety over k and $f : X \rightarrow Y$ a dominant separable rational map of fibre spaces X and Y of varieties over S . Assume that X/S is isotrivial, i.e., $\text{var}(X/S) = 0$ which is defined by E. Viehweg. Assume $\text{Aut}(k(Y_{\bar{\eta}}))$ is an algebraic group, where $\bar{\eta}$ is the separable closure of the generic point of S in the fixed algebraically closed field with infinite algebraically independent elements over k . Then $\text{var}(Y/S) = 0$.*

Proof. One has the following diagrams

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & S & \\
 \\
 G_X & \xrightarrow{\quad} & G_Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & G_S &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\quad} & Y_{\bar{\eta}} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \{\bar{\eta}\} & \\
 \\
 G_{X_{\bar{\eta}}} & \xrightarrow{\quad} & G_{Y_{\bar{\eta}}} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & G_{\bar{\eta}} = 1 &
 \end{array}$$

Since $G_X = G_{X_0} \times G_S$, G_Y has a section and so it is a semi-direct product, i.e., G_Y is a semi-direct product of $G_{Y_{\bar{\eta}}}$ by G_S . Here the action of G_S on $G_{Y_{\bar{\eta}}}$ is continuous since $G_{Y_{\bar{\eta}}}$ is a normal subgroup of G_S and since a section G_Y/G_S acts on $G_{Y_{\bar{\eta}}}$ by conjugate action. Hence this gives an element

$$H^1(G_S, \text{Out}(G_{Y_{\bar{\eta}}}))$$

which is an image of the class of the extension of G_Y of $H^1(G_S, (G_{Y_{\bar{\eta}}} \rightarrow \text{Aut}(G_{Y_{\bar{\eta}}}))$:

$$H^1(G_S, (G_{Y_{\bar{\eta}}} \rightarrow \text{Aut}(G_{Y_{\bar{\eta}}})) \rightarrow H^1(G_S, \text{Out}(G_{Y_{\bar{\eta}}}))$$

Note that

$$\text{Aut}_{\bar{\eta}}(Y_{\bar{\eta}}) \cong \text{Out}^{\text{cont}}(G_{Y_{\bar{\eta}}})$$

Since $\text{Aut}_{\bar{\eta}}(Y_{\bar{\eta}})$ is an algebraic group, the distinguish element of $H^1(G_S, \text{Out}(G_{Y_{\bar{\eta}}}))$ is trivial base-changed by a finite extension $k(S')/k(S)$, which is a standard argument. □

Theorem 1.3. *Let k be an algebraically closed field of positive characteristic. Let X be a projective non singular variety over k . Set*

$$F(X) = \{(Y, f : X \rightarrow Y)\}$$

where Y is a projective non singular variety of general type and the m -th-pluricanonical mapping is birational and f is a separable, dominant rational map.

Then $F(X)$ is a finite set.

Theorem 1.4. *Let k be an algebraically closed field. Let S be a variety over k and $f : X \rightarrow Y$ a surjective morphism which are separable over each points of Y between irreducible reduced schemes of finite type surjective over S every points of which are regular extension of points of S . Assume that X is trivial over S , i.e., $X \cong X_0 \times_k S$ for some variety X_0 over k and that the automorphism group of $Y_{\bar{\eta}}$ is of finite type over k , where $Y_{\bar{\eta}}$ is a fibre of Y over the point which is the separable closure of the generic point of S . Then Y is trivial over S' which is an open subscheme of S in the sense of etale topology.*

2 Introduction-bis

We construct a deformation theory by making use of axiomatic Galois theory in Seminaire Geometrie Algebrique 1([SGA]) developed by Grothendieck. We obtain the following:

Theorem 2.1. *Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$ and X a projective variety over k . Then the set of projective varieties Y of general type whose m -th pluri-canonical invertible sheaves $\omega_Y^{\otimes m}$ give birational embedding into projective spaces such that there exist dominant separable rational maps from X to Y is finite.*

Theorem 2.2. *Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$. Let $f : X \rightarrow S$ be a connected and geometrically irreducible and generically separable morphism between connected and irreducible and generically separable projective schemes over k which we call these varieties. Assume that X is a normal variety and that S is regular. Let $\omega_{X/S}^{[m]}$ denote the double dual of the m -th tensor power of $\omega_{X/S}$ and $\hat{\mathcal{F}}$ the double dual of a torsion free sheaf $\mathcal{F}$. If $\kappa(X_{\bar{\eta}}) \geq 0$ where $\bar{\eta}$ is the generic geometric point of S , then*

$$\max_{m \geq 1} (\kappa(\hat{\det} f_* \omega_{X/S}^{[m]})) \geq \text{var}(X/S)$$

Theorem 2.3. *Let S be a geometrically irreducible and separable scheme over $\text{Spec} \mathbb{Z}$ and X, Y schemes which are geometrically irreducible separable over S and $f : X \rightarrow Y$ a surjective separable morphism over S . Assume that X is isomorphic to a product $X_0 \times_{\text{Spec} \mathbb{Z}} S$, where X_0 is a geometrically irreducible separable scheme over $\text{Spec} \mathbb{Z}$ and that for any geometric point $\bar{s}$ over each point s of S , $\text{Aut}(Y_{\bar{s}})$ is a locally algebraic group over $\bar{s}$. Then there exists a connected separable scheme Y_0 over $\text{Spec} \mathbb{Z}$ such that $Y_{S'}$ is isomorphic to a product $Y_0 \times_{\text{Spec} \mathbb{Z}} S'$ where S' is a scheme surjective onto S .*

3 Preliminary

To apply it to our problems, recall a Grothendieck-Galois theory in expose V le Groupe Fondamental SGA1([SGA]) as preliminary which is axiomatic and has a potentially wide application, though it seems to be not yet enough to apply it even in the area of algebraic geometry. Let $\mathbf{C}$ be a category and F a covariant functor from $\mathbf{C}$ to the category **Sets** of sets.

- G1 $\mathbf{C}$ has a terminal object and the fibre product of two objects over a third object in $\mathbf{C}$, In other words, there exists a finite limit in $\mathbf{C}$.
- G2 The finite sum in $\mathbf{C}$ exists. Hence there exist the initial object $\emptyset_{\mathbf{C}}$ and the quotient of an object of $\mathbf{C}$ by a finite group of automorphisms. In other words there exist the finite inductive limits in $\mathbf{C}$.
- G3 Let $u : X \rightarrow Y$ be a morphism of $\mathbf{C}$. Then u factorizes to a composition of $X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u''} Y$ with u' a strict epimorphism and u'' a monomorphism, which is an isomorphism on the direct factor of Y .
- G4 The functor F is left-exact.
- G5 F commutes with finite direct sums, transforms strict epimorphisms to epimorphisms and commutes with fibre products. In other words the functor F is right-exact.
- G6 Let $u : X \rightarrow Y$ be a morphism in $\mathbf{C}$ such that $F(u)$ is an isomorphism. Then u is an isomorphism.

Then the functor F is strictly pro-representable([GG]). So there exists a projective system

$$P_F = ((P_F)_i)_{i \in I}$$

in $\mathbf{C}$ over I which is ordered and filtered. We have a functorial isomorphism

$$F(X) = \text{Hom}_{\text{Pro}(\mathbf{C})}(P_F, X)$$

We call F the fundamental functors, which form a groupoid and P_F the fundamental pro-objects associated to F . We call $\text{Aut}(F)$ the fundamental group which we denote π . It is also the opposite to $\text{Aut}(P_F)$.

Let $\mathbf{C}(\pi)$ be the category of finite sets where π acts continuously to the left. We can consider F as a covariant functor

$$F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}(\pi)$$

We can define an inverse functor G

$$G : \mathbf{C}(\pi) \rightarrow \mathbf{C}$$

by the formula

$$G(E) = P \times_{\pi} E$$

F and G are quasi-inverse each other.

Definition 3.1. *A category which is equivalent to a category $\mathbf{C}(\pi)$ is said to be Galois category, where π is a profinite group.*

The category $\text{Pro-}\mathbf{C}(\pi)$ is equivalent to the category $\mathbf{C}'(\pi)$ of the spaces with a topological group π of operators which are compact and totally disconnected. $\mathbf{C}(\pi)$ is a full subcategory of $\mathbf{C}'(\pi)$. π acts to the right on an object X in $\mathbf{C}$ and to the left on $F(X)$. In $\mathbf{C}(\pi)$ a Galois object is isomorphic to a quotient of π by a normal subgroup and a pointed object X has an element a of $F(X)$. Thus a connected pointed object identified with an open subgroup of $\text{Aut}(F)$.

Let $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ be two Galois categories, $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ a covariant functor, F' a fundamental functor on $\mathbf{C}'$ and $F = F' \circ H$. Then the following conditions are equivalent:

1. H is exact.
2. H is a fundamental functor.

tH defines a continuous homomorphism

$${}^tH : \pi_{F'} \rightarrow \pi_F$$

Conversely, given two fundamental functors F, F' of $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ and a continuous homomorphism $\pi_{F'} \rightarrow \pi_F$, it corresponds to a functor of $\mathbf{C}(\pi)$ to $\mathbf{C}(\pi')$ such that it is exact and such that it corresponds to a exact functor $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ such that ${}^tH : \pi_{F'} \rightarrow \pi_F$ is u itself.

Proposition 3.1. *1. Let X be a connected pointed object of $\mathbf{C}$ which is associated to an open subgroup U of π_F .*

$U \supseteq u(\pi_{F'})$ (resp. U contains the closed normal subgroup generated by $u(\pi_{F'})$) iff $H(X)$ admits a pointed section (resp. $H(X)$ is completely decomposed).

2. u is trivial iff for any object X of $\mathbf{C}$, $H(X)$ is completely decomposed.

3. Let X' be a connected pointed object of $\mathbf{C}'$ which is associated to an open subgroup of $\pi_{F'}$. $U' \supseteq \ker u$ iff there exist a connected pointed object X of $\mathbf{C}$ and a pointed homomorphism of the connected pointed component X'_0 of $H(X)$ into X' . Hence X is isomorphic to a quotient of the neutral connected component of the inverse image of a pointed object of $\mathbf{C}$ as a pointed object. If u is surjective, X is isomorphic to $H(X)$, where X is a pointed object in $\mathbf{C}$.
4. $U' \supseteq \ker u$ iff there exist a connected object X of $\mathbf{C}$ and a morphism of a connected component of $H(X)$ into X' . If u is surjective, X' is isomorphic to an object of the form $H(X)$.
5. u is injective iff for any object X' of $\mathbf{C}'$, there exist an object X of $\mathbf{C}$ and a homomorphism of one connected component of $H(X)$ into X' .
6. Any connected object of $\mathbf{C}'$ is isomorphic to an object of the form $H(X)$ iff u is isomorphic from $\pi_{F'}$ to a subgroup which is a direct factor of π_F . In fact we however construct a homomorphism $\pi_F \rightarrow \pi_{F'}$ which is a right-inverse by the certain exact functor of $\mathbf{C}'$ to $\mathbf{C}$.

Proposition 3.2. *The following conditions are equivalent:*

1. The homomorphism $u : \pi_{F'} \rightarrow \pi_F$ is surjective.
2. For any connected object X of $\mathbf{C}$, $H(X)$ is connected.
3. The functor H is fully faithful.

Corollary 3.1. *The following conditions are equivalent:*

1. u is an isomorphism.
2. H is an categorical equivalence.
3. The following two conditions are satisfied:
 - (a) for any connected object X of $\mathbf{C}$, $H(X)$ is connected.
 - (b) any object of $\mathbf{C}'$ is isomorphic to an object of the form $H(X)$.

Let S be a locally noetherian connected scheme and

$$a : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$$

a geometric point of S with values in algebraically closed field Ω . Put $\mathbf{C}$ the category of etale coverings of S and for an object X of $\mathbf{C}$ $F(X)$ the set of the geometric points of X over a . Then these $\mathbf{C}$ and the functor F satisfy the axioms (G1)-(G6). Hence it forms a Galois category. Hence the pro-object P_F of $\mathbf{C}$ which represents F is the universal covering of S at the point a . $\pi_F = \text{Aut}(F) = \text{Aut}(P)^\circ$ is called fundamental group of S at a which is denoted by $\pi_1(S, a)$. If a' is another geometric point of S with values in algebraically closed field Ω' , it defines a fundamental functor F' . We denote by $\pi_1(S; a, a')$ the set of homomorphisms $F \rightarrow F'$, which are indeed isomorphisms. Now let

$$f : S' \rightarrow S$$

a morphism between locally noetherian connected schemes, a' a geometric point and $a = f(a')$ its image in S . Then the inverse image functor f^* induces a functor of the category $\mathbf{C}(S)$ of the étale coverings of S to the category $\mathbf{C}'(S')$ of the étale coverings of S' . We have an isomorphism of functors

$$F \cong F' \circ f^*$$

Hence f^* is an exact functor. In particular we have a canonical homomorphism

$$u = \pi_1(f; a'); \pi_1(S', a') \rightarrow \pi_1(S, a)$$

which admits to reconstruct inverse image functor $\mathbf{C}(S) \rightarrow \mathbf{C}'(S')$.

Proposition 3.3. *Let S be the spectre of a field k and Ω an algebraically closed extension of k which defines a geometric point a of S . Let $\bar{k}$ be the separable closure in Ω . Then there exists a canonical isomorphism of $\pi_1(S, a)$ onto the topological Galois group of $\bar{k}/k$.*

4 Applications

We propose to give the following definitions for varieties which are not necessarily commutative.

Definition 4.1. *Let k be a field. A geometrically irreducible and reduced projective schemes over k is called variety.*

A variety V is called of general type if every generically finite cover of V has a finite birational automorphism group.

V is called non-uniruled if every generically finite cover has a birational automorphism group which is locally algebraic.

V is called uniruled if there exists an infinite sequence of generically finite covers which have birational automorphism groups which are not locally algebraic.

V is called rationally connected if there exist an infinite sequence of generically finite covers the ramification locus of which are dense and whose birational automorphism groups are not locally algebraic.

Theorem 4.1. *Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$ and X a projective variety over k . Then the set of projective varieties Y of general type whose m -th pluri-canonical invertible sheaves $\omega_Y^{\otimes m}$ give birational embedding into projective spaces such that there exist dominant separable rational maps from X to Y is finite.*

Lemma 4.1. *Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$. Let S be the spectre of a function field of a variety T over k and K a function field of S . Let X_0 be a variety over k , and $k(X_0)$ a function field of X_0 . Let X be a variety over S such $k(X)$ is isomorphic to the total fractional field of $k(X_0) \otimes_k K$. Let Y be a variety over S . Assume $f : X \rightarrow Y$ is a dominant separable rational map over S and assume that the birational automorphism group of Y over S is a locally algebraic group over S . Then there exist a variety Y_0 over k and a variety T' generically finite over T such that the function field $K'(Y_{S'})$ of $Y_{S'}$ is isomorphic to the total fractional field of $k(Y_0) \otimes_k K'$, where the spectre S' of the function field K' of T' .*

Proof. We denote by $\bar{K}$ the separable closure in an algebraically closed extension of $K = k(S)$. Let $\bar{Y}$ denote $Y \otimes_K \bar{K}$. We make use of Breen's extension theory ([Breen1], [Breen2], [Gir]) We denote by $\text{Aut}(G)$ the automorphism group

of the absolute Galois group $G = \text{Gal}(-/\bar{K}(\bar{Y}))$ of $\bar{K}(\bar{Y})$ and by $\text{Out}(G)$ the outer automorphism group of G which is the quotient of $\text{Aut}(G)$ by its inner automorphism. Let P denote the absolute Galois group of K . We have the extension class of P by G in the cohomology

$$H^1(P, (G \rightarrow \text{Aut}(G)))$$

where $(G \rightarrow \text{Aut}(G))$ is a crossed module.

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(P, Z(G)[1]) & & \\ & & \downarrow & & \\ H^1(P, \text{Aut}(G)) & \longrightarrow & H^1(P, (G \rightarrow \text{Aut}(G))) & \longrightarrow & H^2(P, G) \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & H^1(P, \text{Out}(G)) & & \end{array}$$

Since G is a topological group, we define the unique subgroup of $\text{Aut}(G)$ whose elements $\phi : G \rightarrow G$ are continuous automorphisms and we have the subgroup of $\text{Out}(G)$ corresponding to the subgroup above, which we denote by $\text{Out}(G)^{\text{cont}}$. Note that

$$\text{Out}(G)^{\text{cont}} \cong \text{Aut}(\text{Spec} \bar{K}(\bar{Y}))$$

In fact $\text{Aut}(\text{Spec} \bar{K}(\bar{Y}))$ is a subgroup of $\text{Out}(G)$ and its maximal continuous subgroup. The absolute Galois group of $\text{Spec} K(X)$ has a section over the absolute Galois group P of S and so that E of $\text{Spec} K(Y)$. Note that E is an extension of P by G . Then a section of P to E gives an continuous automorphism of G as a conjugate action. It defines an element of $H^1(P, \text{Aut}(G))$ which gives an element of $H^1(P, \text{Out}(G))$ which is in fact an element of $H^1(P, \text{Out}(G)^{\text{cont}}) = H^1(P, \text{Aut}(\text{Spec} \bar{K}(\bar{Y})))$. Since P is a profinite group ([RBZL], [Shatz]) and $\text{Aut}(\text{Spec} \bar{K}(\bar{Y}))$ is a locally algebraic group, there exists a variety T' generically finite over T such that the image of the element of $H^1(P, \text{Out}(G)^{\text{cont}})$ in $H^1(P', \text{Out}(G)^{\text{cont}})$ is isomorphic to

$$P' \rightarrow 1 \rightarrow \text{Out}(G)^{\text{cont}}$$

where P' denotes the absolute Galois group of $k(T')$. Hence the extension element of S' by G in the cohomology $H^1(P', (G \rightarrow \text{Aut}(G)))$ which maps an identity element of $H^1(P', \text{Out}(G))$ comes from $H^2(P', Z(G))$. Note that

$$H^2(P', Z(G)) \rightarrow H^1(P', (G \rightarrow \text{Aut}(G)))$$

is injective.

The associated inverse-image element of $H^2(P', Z(G))$ has a section; hence it is a semi-direct product. Since $Z(G)$ is commutative, the semi-direct product is a direct product. Therefore the extension element of $H^1(P', (G \rightarrow \text{Aut}(G)))$ is trivial.

Hence there exist a variety Y_0 over k and a variety T' generically finite over T such that the function field $K'(Y)$ of $Y_{S'}$ is isomorphic to the total fractional field of $k(Y_0) \otimes_k K'$, where the spectre S' of the function field K' of T' .

□

of Theorem. Since there exist injections $H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \hookrightarrow H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$, we can birationally embed all of Y by the pluri-canonical mappings into a projective space $\mathbf{P}$ with a fundamental invertible sheaf H . Let $\text{Hilb}_{\mathbf{P}}^{p(n)}$ denote the Hilbert scheme of $\mathbf{P}$ with a polynomial $p(n)$.

Let Y_P denote the connected component of closure of the image of Y in $\mathbf{P}$. Hence Y_P are varieties.

We have inclusions for $n \geq 1$

$$H^0(Y_P, H^{\otimes n}) \hookrightarrow H^0(Y, \omega_Y^{\otimes n}) \hookrightarrow H^0(X, \omega_X^{\otimes n})$$

Hence the Hilbert polynomial $P(n)$ has a leading coefficient bounded above. Thus Y_P form a bounded family and so the parameter scheme of Y_P is a noetherian scheme. We shall use noetherian induction and we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} X \times T & \xrightarrow{\quad} & \{Y_P\} \subseteq \mathbf{P} \times T \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

where T is a subscheme of some $\text{Hilb}_{\mathbf{P}}$ which parameters Y_P . Apply the lemma above to varieties in the commutative triangle and we have an open subset U of T such that Y_P over any k -point of U is isomorphic to some Y_0 .

Therefore the set of projective varieies Y of general type whose m -th pluri-canonical invertible sheaves $\omega_Y^{\otimes m}$ give birational embedding into projective spaces such that there exist dominant separable rational maps from X to Y is finite. $\square$

Theorem 4.2. *Let S be a geometrically irreducible and connected separable scheme over $\text{Spec}\mathbb{Z}$ and X, Y schemes which are geometrically irreducible and connected separable over S and $f : X \rightarrow Y$ a geometrically surjective separable morphism over S . Assume that X is isomorphic to a product $X_0 \times_{\text{Spec}\mathbb{Z}} S$, where X_0 is a geometrically irreducible and connected separable scheme over $\text{Spec}\mathbb{Z}$ and that for any geometric point $\bar{s}$ over each point s of S , $\text{Aut}(Y_{\bar{s}})$ is a locally algebraic group over $\bar{s}$. Then there exists a connected separable scheme Y_0 over $\text{Spec}\mathbb{Z}$ such that $Y_{S'}$ is isomorphic to a product $Y_0 \times_{\text{Spec}\mathbb{Z}} S'$ where S' is a scheme surjective onto S .*

Proof. Let s be any point on S , and $G_X, (\text{resp. } G_Y)$ a presheaf of profinite groups over X (resp. Y) such that for any subscheme V of X (resp. Y) and a compatible geometric point a_V , $G_X(V) = \pi_1(V, a_V)$ (resp. $G_Y(V) = \pi_1(V, a_V)$). A scheme X (resp. Y , resp. S) corresponds to a presheaf of profinite groups $\mathcal{G}_X$ (resp. $\mathcal{G}_Y$, resp. $\mathcal{G}_S$). A scheme X_s (resp. Y_s) corresponds to an extension of $\mathcal{G}_{S_s}$ by $\mathcal{G}_{X_s}$ (resp. $\mathcal{G}_{Y_s}$) as presheaves of profinite groups. Consider the following commutative triangle:

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(G_{S_s}, Z(\underline{G}_{Y_{\bar{s}}})[1]) & & \\ & & \downarrow & & \\ H^1(G_{S_s}, \underline{\text{Aut}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})) & \longrightarrow & H^1(G_{S_s}, (\underline{G}_{Y_{\bar{s}}} \rightarrow \underline{\text{Aut}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})) & \longrightarrow & H^2(G_{S_s}, \underline{G}_{Y_{\bar{s}}}) \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & H^1(G_{S_s}, \underline{\text{Out}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})) & & \end{array}$$

where $\bar{s}$ is a geometric point over s . By assumption X is a product and so $\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}$ has a section, which defines a conjugate continuous action on $\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}$. Hence it gives an element of the cohomology $H^1(G_{S_s}, \underline{\text{Aut}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$ and its image is in $H^1(G_{S_s}, \underline{\text{Out}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$.

Note that

$$\underline{\text{Out}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})^{\text{cont}} \cong \underline{\text{Aut}}(Y_{\bar{s}})$$

An element of $H^1(G_{S_s}, \underline{\text{Out}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$ corresponds to a natural transformation of a constant functor to a functor:

$$G_{S_s} \longrightarrow \underline{\text{Out}}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})$$

Thus it is equivalent to a homomorphism:

$$G_{S_s} \longrightarrow \Gamma(\underline{Out}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$$

Note that

$$\Gamma(\underline{Out}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})^{cont}) \cong \Gamma(\underline{Aut}(Y_{\bar{s}})) = \text{Aut}(Y_{\bar{s}})$$

This automorphism group is locally algebraic by assumption. Hence there exists a scheme S' such that $S' \rightarrow S$ is surjective and that for any $s \in S'$ each homomorphism

$$G_{S_s} \longrightarrow \Gamma(\underline{Out}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$$

factors through 1. Thus the extension class in $H^1(G_{S_s}, (\underline{G}_{Y_{\bar{s}}} \rightarrow \underline{Aut}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$ comes from $H^1(G_{S_s}, Z(\underline{G}_{Y_{\bar{s}}}))$, which is in fact a trivial since it has a section. Hence the extension class is also trivial.

Let $\underline{G}_{S_t}$ (resp. $\underline{G}_{S_{\bar{t}}}$) be a presheaf of profinite groups associated to S_t (resp. $S_{\bar{t}}$ for any point $t \in \text{Spec}\mathbb{Z}$ (resp. an geometric point $\bar{t}$ over t)) and G_t the absolute Galois group associated to a point t . There exists a short exacte sequence

$$1 \rightarrow \underline{G}_{S_{\bar{t}}} \rightarrow \underline{G}_{S_t} \rightarrow G_t \rightarrow 1$$

Hence we have an exact sequence

$$\begin{array}{c} (Y_0)_{\bar{t}} \in H^1(\underline{G}_{S_{\bar{t}}}, (\underline{G}_{Y_{\bar{s}}} \rightarrow \underline{Aut}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})) \\ \uparrow \\ (Y_0)_t \times_t S_t \in H^1(\underline{G}_{S_t}, (\underline{G}_{Y_{\bar{s}}} \rightarrow \underline{Aut}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})) \\ \uparrow \\ (Y_0)_t \in H^1(G_t, (\underline{G}_{Y_{\bar{s}}} \rightarrow \underline{Aut}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}})) \end{array}$$

where in the second row the extension class is trivial since for any point s over t the extension class in $H^1(G_{S'_s}, (\underline{G}_{Y_{\bar{s}}} \rightarrow \underline{Aut}(\mathcal{G}_{Y_{\bar{s}}}))$ is trivial and the first row the image is trivial and so the class is a product $(Y_0)_{\bar{t}} \times S_{\bar{t}}$ since t is a geometric point and hence there exists an element $(Y_0)_t$ in the third row and therefore we get $(Y_0)_t \times_t S_t$ by pushout. Thus we conclude that $Y_{S'}$ is isomorphic to $Y_0 \times S'$ since Y_t is isomorphic to $(Y_0)_t \times_t S_t$ for any $t \in \text{Spec}\mathbb{Z}$ and Y has a global section of S and so $Y_{S'}$. $\square$

5 Analogues

Theorem 5.1. *Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$. Let $f : X \rightarrow S$ be a connected and geometrically irreducible and generically separable morphism between irreducible and generically separable projective schemes over k . Assume that X is a normal variety and that S is regular. Let $\omega_{X/S}^{[m]}$ denote the double dual of the m -th tensor power of $\omega_{X/S}$ and $\hat{\mathcal{F}}$ the double dual of a torsion free sheaf $\mathcal{F}$. If $\kappa(X_{\bar{\eta}}) \geq 0$ where $\bar{\eta}$ is the generic geometric point of S , then*

$$\max_{m \geq 1} (\kappa(\hat{\det} f_* \omega_{X/S}^{[m]})) \geq \text{var}(X/S)$$

Corollary 5.1. *Under the same conditions of the theorem we have*

$$\kappa(\hat{\omega}_{X/S}) \geq \kappa(\hat{\omega}_{X_{\bar{\eta}}}) + \text{var}(X/S)$$

Proof. Assume that $\text{var}(X/S) = \dim S$. $f : X \rightarrow S$ factors through a dominant rational map and a projection

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f & \nearrow & \\ S & & \end{array} \quad \begin{array}{c} Z = P^1 \times \cdots \times P^1 \times S \xrightarrow{r} P^1 \times \cdots \times P^1 \\ \nwarrow q \\ S \end{array}$$

Take an integral closure X' of $P^1 \times \cdots \times P^1 \times S$ in the function field $k(X)$ of X . Let Z denote $P^1 \times \cdots \times P^1 \times S$.

$$\begin{array}{ccc} X & & X' \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ S & & Z = P^1 \times \cdots \times P^1 \times S \end{array} \quad \begin{array}{c} \nwarrow q \\ S \end{array}$$

Let H be a very ample invertible sheaf over $P^1 \times \cdots \times P^1$ and take the pull-back of H over $P^1 \times \cdots \times P^1 \times S$ as the same notation. Construct a cyclic cover Y by $H^{\otimes n} = \mathcal{O}_Z(D)$ where D is a regular divisor and p does not divide n . We have the formula $h_*(\omega_{Y/S}^{\otimes m}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \omega_{X'/S}^{\otimes m} \otimes H^{\otimes m(n-1)-i}$ over some open subset of Z . Let f' denote the morphism $X' \rightarrow S$, $p : X' \rightarrow Z$ and $q : Z \rightarrow S$, hence $f' = q \circ p$. The generic geometric fibre Y/S is of general type and so $g^* g_* \omega_{Y/S}^{[m]} \rightarrow \omega_{Y/S}^{[m]}$ gives a birational map for some m . Thus using $\text{var}(Y/S) \geq \text{var}(X/S)$ which we shall show, we have

$$\max_{m \geq 1} (\kappa(\hat{\det} g_* \omega_{Y/S}^{[m]})) \geq \text{var}(Y/S) = \dim S$$

Hence there exists a very ample invertible sheaf A such that $A \hookrightarrow \omega_{Y/S}^{[m]}$ over Y for some m and we may assume $A \hookrightarrow \omega_{X'/S}^{[m]} \otimes H^\ell$ for some $\ell \geq 0$. We may assume $\ell > 0$. Since Z is smooth and $p_* \omega_{X'/S}^{[m]}$ is torsion free, $p_* \omega_{X'/S}^{[m]}$ is locally free except a locus of codimension ≥ 2 . We may assume we have $A \hookrightarrow p_* \omega_{X'/S}^{[m]} \otimes H^{\otimes \ell}$. The homomorphism $A \hookrightarrow \hat{p}_* \hat{\omega}_{X'/S}^{[m]} \otimes H^{\otimes \ell}$ gives a homomorphism $A \hookrightarrow p_* \omega_{X'/S}^{[m]}$ outside of the pull-back of the support of sufficiently very ample divisor B on S (resp. H on $P^1 \times \cdots \times P^1$) by the projection $Z \rightarrow S$ (resp. $Z \rightarrow P^1 \times \cdots \times P^1$.) In fact since B is very ample, we have an affine variety $S \setminus \text{supp}(B)$ and so we have the homomorphism $A \hookrightarrow q_* \hat{p}_* \hat{\omega}_{X'/S}^{[m]}$ on the affine variety.

Hence we have a homomorphism $A \hookrightarrow p_* \omega_{X'/S}^{[m]}$ on an open subset of Z except an closed subset of codimension ≥ 2 . Since $p_* \omega_{X'/S}^{[m]}$ is a direct image of a double dual and

$$\begin{aligned} 0 \neq H^0(Z \setminus (q^{-1}B \cap r^{-1}H), p_* \omega_{X'/S}^{[m]} \otimes A^{-1}) &= H^0(X' \setminus p^{-1}(q^{-1}B \cap r^{-1}H), \omega_{X'/S}^{[m]} \otimes A^{-1}) \\ &= H^0(X', \omega_{X'/S}^{[m]} \otimes A^{-1}) = H^0(X, \omega_{X/S}^{[m]} \otimes A^{-1}), \end{aligned}$$

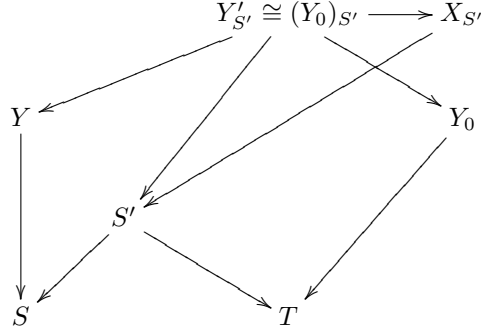
one obtains $A \hookrightarrow \omega_{X/S}^{[m]}$ over the whole X . Therefore the following holds

$$\max_{m \geq 1} (\kappa(\hat{\det} f_* \omega_{X/S}^{[m]})) \geq \text{var}(X'/S) = \dim S$$

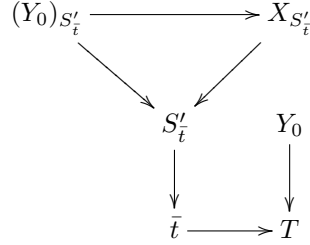
It remains to show $\text{var}(Y/S) \geq \text{var}(X/S)$. □

Proposition 5.1. *Under the same notation and conditions of proof of the theorem above, if the generic geometric fibre of X/S is of $\max_{m>0}\{\kappa(\omega_{X/\bar{\eta}}^{[m]})\} \geq 0$ then $\text{var}(Y/S) \geq \text{var}(X/S)$.*

Proof. If $\text{var}(Y/S) = \dim S$, it remains nothing to prove. If $\text{var}(Y/S) < \dim S$, then there exist a variety T and a projective variety Y_0 which has a surjective morphism onto T with a geometrically irreducible connected separable projective generic geometric fibre. Since the birational automorphism group of the generic geometric fibre of X/S is locally algebraic,



For a generic geometric point $\bar{t}$ of T we have



Since

$$(Y_0)_{S'_t} \cong (Y_0)_{\bar{t}} \times S'_t$$

, apply the lemma above to this case. We have $\text{var}(X/S) \leq \dim T = \text{var}(Y/S)$. $\square$

Corollary 5.2. *Let k be an algebraically closed field. Let $f^0 : X^o \rightarrow S^o$ be a fibre space over k between quasi-projective normal varieties with projective compactifications X, S . Let $f : X \rightarrow S$ and generically normal crossing boundary divisors D_X and D_S , respectively. Then*

$$\max(\kappa(\hat{\det} f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) \geq \log \text{var}(X^o/S^o)$$

Here $\omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}$ is a divisorial sheaf.

Proof. The proof will be given elsewhere. $\square$

The next proposition holds for any divisorial sheaf over X but it does not hold for a general rational point $s \in S$ instead of $\bar{\eta}$ since the following fact is not always true for a general rational point $s \in S$

$$(f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]})|_{\bar{\eta}} \cong (f_{\bar{\eta}})_* \omega_{X_{\bar{\eta}}}(D_{X_{\bar{\eta}}})^{[m]}$$

unless the $R^j f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}$ is S -flat for $j \geq 0$.

Proposition 5.2. *Let k be an algebraically closed field. Let $f^0 : X^o \rightarrow S^o$ be a fibre space over k between quasi-projective normal varieties with projective compactifications X, S and $f : X \rightarrow S$ and generically normal crossing boundary divisors D_X and D_S , respectively. Then*

$$\kappa(\omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) \leq \kappa(\omega_{X_{\bar{\eta}}}(D_{\bar{\eta}})^{[m]}) + \dim S$$

where $\bar{\eta}$ is the separable closure of the generic point of S .

Proof. One has homomorphisms:

$$\mathcal{O}_X \otimes H^0(X, \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) \rightarrow f^* f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]} \rightarrow \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}$$

which gives the next rational mappings

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f & \searrow & \downarrow \\ & \mathbf{P}_S(f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) & \\ & \swarrow & \downarrow \\ S & \longleftarrow \mathbf{P}_k(H^0(\omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]})) & \end{array}$$

The canonical homomorphism $f^* f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]} \rightarrow \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}$ gives a rational mapping whose image cannot be contained in any hyperplane, i.e., nondegenerate:

$$\alpha : X \rightarrow \mathbf{P}_S(f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]})$$

and another homomorphism $\mathcal{O}_S \otimes H^0(X, \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) \rightarrow f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}$ gives a rational mapping whose image is dense

$$\beta : \mathbf{P}_S(f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) \rightarrow \mathbf{P}_k(H^0(\omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}))$$

Here

$$p_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \cong f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}$$

$p : \mathbf{P}_S(f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]}) \rightarrow S$ is the structure morphism. Note that

$$(f_* \omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]})|_{\bar{\eta}} \cong (f_{\bar{\eta}})_* \omega_{X_{\bar{\eta}}}(D_{X_{\bar{\eta}}})^{[m]}$$

The dimension of the image of α is

$$\kappa(\omega_{X_{\bar{\eta}}}(D_{\bar{\eta}})^{[m]}) + \dim S$$

and the dimension of the image of $\beta \circ \alpha$ is

$$\kappa(\omega_{X/S}(D_{X/S})^{[m]})$$

Hence one gets the proposition. □

Remark 5.1. *Mochizuki's theorem says*

$$\text{Hom}_k^{\text{dom}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\Gamma_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y)) / \ker(\pi_1(Y) \rightarrow \Gamma_k)$$

where X, Y are hyperbolic curves over a sub p -adic field k . The sections of Y/k are injective to the set of sections $\pi_1(Y)/\Gamma_k$. Let k'/k be a finite normal extension. If there were infinitely many sections Y/k and they make a section $\pi_1(Y)/\Gamma_k$ which acts trivially on $\Gamma_{k'}$, since $\text{Aut}(\Gamma_{k'})$ is finite. Then it derives a contradiction.

6 Another minimal model

We refer to the minimal model theory by K.Matsuki([Mats],[Iita]). Here we take a minimal model different from the standard one which we refer to.

Theorem 6.1. *Let k be the complex number field. Let X be a projective variety of $\kappa(X) \geq 0$ over k . Then there exists a normal variety X' such that a sheaf $\omega_{X'}$ is derived from Weil divisor and nef(resp. abundant).*

Proof. Let X has a dominant rational map onto a product of projective lines $P^1 \times \cdots \times P^1 \times P^1$ of the same dimension of X . Let X' be the integral closure of the structure sheaf of this product in the constant sheaf of the rational function field of X over this product([Bak]).

$$\begin{array}{c} X' \\ \downarrow \\ P^1 \times \cdots \times P^1 \times P^1 \\ \downarrow \\ P^1 \times \cdots \times P^1 \end{array}$$

Let $P' = P^1 \times \cdots \times P^1 \times P^1$ and $P'' = P^1 \times \cdots \times P^1$. The ramification locus of X'/P' is the divisor of the support of $\omega_{X'/P'}$.

Hence denoting the morphism X'/P' by $\pi_{X'/P'}$, we can find an effective divisor $D_{P'}$ on P' such that $\kappa(\omega_{P'}(D_{P'})) \geq 0$ and that

$$(\pi_{X'/P'})_*(\omega_{X'} \otimes (\omega_{P'}(D_{P'}))^{-1})^{\otimes m}$$

is nef(resp. abundant) for sufficiently large m .

Note that $\kappa(\omega_{X'}) \geq 0$ implies $\kappa(\omega_{P'}(D_{P'})) \geq 0$. We shall later show $\omega_{P'}(D_{P'})$ is nef(resp.abundant). Hence $\omega_{X'}$ is nef(resp. abundant). It remain to prove $\omega_{P'}(D_{P'})$ with assumption $\kappa(\omega_{P'}(D_{P'})) \geq 0$ is nef(resp. abundant) by induction.

Since $\omega_{P'}(D_{P'})$ has no vertical component respect to P'/P'' which is not a pull-back of a hyperplane of P'' , we can find $D_{P''}$ such that $\omega_{P'}(D_{P'}) \otimes (\omega_{P''}(D_{P''}))^{-1}$ is an invertible sheaf derived from horizontal hyperplane on P' with respect to P'/P'' . Thus

$$\pi_{P'/P''}_*(\omega_{P'}(D_{P'}) \otimes (\omega_{P''}(D_{P''}))^{-1})^{\otimes m}$$

is nef(resp. abundant).

From $\kappa(\omega_{P''}(D_{P''})) \geq 0$ and induction assumption, we conclude that $\omega_{P'}(D_{P'})$ is nef(resp. abundant). Hence the induction is complete. $\square$

7 Non-Commutative Algebraic Geometry

7.1 preliminary

Recall another Grothendieck's generalization of Galois correspondence mainly in chapter 7(p.294) ([CD]). Let A be a small category and if $\mathbb{A}$ is a presheaf of categories over A , we define the category of representations of $\mathbb{A}$ which we denote by $\text{Rep}(\mathbb{A})$. Let $\mathbb{G}$ be a presheaf of groups(resp. groupoids) over A . The category $\text{Rep}(\mathbb{G})$ is the category of presheaves over A with an action of $\mathbb{G}$ on the right. Let $\nabla \mathbb{A}$ be the fibred category associated to $\mathbb{A}$ and we denote

$\nabla \mathbb{G}$ by $B\mathbb{G}$ which is the classifying category associated to $\mathbb{G}$. We fix a classifying space of $\mathbb{G}$, i.e., a presheaf $B\mathbb{G}$ over A equipped with a universal $\mathbb{G}$ -torsor $E\mathbb{G} \rightarrow B\mathbb{G}$. If $u : A \rightarrow B$ is a smooth functor and if B is a local test category, then A is also a local test category and so $B\mathbb{G}$. By this we obtain a theorem of correspondence of Galois with respect to $\mathbb{G}$.

Let W be a fundamental localizer and $\mathcal{H}_W \hat{A}$ denote the localization of the category $\hat{A}$ by the class $W_{\hat{A}}$ of W -equivalences of presheaves over A . An equivalence of Quillen to the left

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{G})/E\mathbb{G} \rightarrow \hat{A}/B\mathbb{G} : (X, X \rightarrow E\mathbb{G}) \mapsto (\mathbb{G} \backslash X, \mathbb{G} \backslash X \rightarrow B\mathbb{G})$$

gives the following functor with canonical equivalence of categories $\mathcal{H}_W \mathrm{Rep}(\mathbb{G}) \cong \mathcal{H}_W \mathrm{Rep}(\mathbb{G})/E\mathbb{G}$. Thus we have a functor of descent

$$\mathbf{Desc} : \mathcal{H}_W \mathrm{Rep}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathcal{H}_W \hat{A}/B\mathbb{G}$$

The functor of descent is an equivalence of categories and admits the functor of monodromy as quasi-inverse

$$\mathbf{Mon} : \mathcal{H}_W \hat{A}/B\mathbb{G} \rightarrow \mathcal{H}_W \mathrm{Rep}(\mathbb{G})$$

defined by giving the representation $X \times_{B\mathbb{G}} E\mathbb{G}$ which is a $\mathbb{G}$ -torsor.

7.2 Non-Commutative Algebraic Geometry

Let k be an algebraically closed field of characteristic 0 and let $\mathbf{C}$ be the category of the non-commutative algebraic varieties defined over k ([Kon]). For every non-commutative variety X as an object of $\mathbf{C}$ and the Galois group of each Galois extension ([Cohn],[Brz]) of the field associated to the generic point of X , we define a presheaf of Galois groups $\mathbb{G}$ over $\mathbf{C}$. Apply A in the preliminary to $\mathbf{C}$ and we obtain the following lemma and theorems similar argument in the proof of commutative algebraic geometry. Hence we state them without proofs. To change fixing a classifying space corresponds to the inner automorphism, which determines an equivalence. Let $u : X \rightarrow Y$ be a morphism in the category $\mathbf{C}$. Then we have a homomorphism $G_X \rightarrow u^{-1}G_Y$ of presheaves of Galois groups associated to X and Y , respectively. Conversely, This homomorphism $G_X \rightarrow u^{-1}G_Y$ up to the equivalence determines a morphism u .

Lemma 7.1. *Let S be a commutative algebraic variety over k and X, Y non-commutative algebraic projective varieties over S . Assume X is birationally equivalent to a product $X_0 \times S$ where X_0 is a projective variety over k and assume that the generic geometric fibre $Y_{\bar{\eta}}$ of Y/S where $\bar{\eta}$ is an algebraically closed extension point of the generic point η of S has the birational automorphism group which is locally algebraic. If there exists a dominant rational map $X \rightarrow Y$ over S , then there exist a variety S' and a generically finite surjective morphism $S' \rightarrow S$ such that $Y_{S'}$ is birationally equivalent to a product $Y_0 \times S'$ where Y_0 is a projective variety over k .*

Theorem 7.1. *Let S be a commutative algebraic variety over k and X, Y non-commutative algebraic projective varieties over S . Assume that the generic geometric fibre $Y_{\bar{\eta}}$ of Y/S where $\bar{\eta}$ is an algebraically closed extension point of the generic point η of S has the birational automorphism group which is locally algebraic. If there exists a dominant rational map $X \rightarrow Y$ over S , then*

$$\mathrm{var}(Y/S) \leq \mathrm{var}(X/S)$$

Theorem 7.2. *Let S be a commutative algebraic variety over k and X, Y non-commutative algebraic projective varieties over S . Assume that X is isomorphic to a product $X_0 \times_k S$ over S where X_0 is a non-commutative projective variety over k . Assume that $Y_{\bar{s}}$ where $\bar{s}$ is any geometric point of S has the automorphism group which is locally algebraic. If there exists a geometrically surjective $X \rightarrow Y$ over S , then there exist a variety S' and a surjective morphism $S' \rightarrow S$ such that $Y_{S'} \cong Y_0 \times_k S'$ where Y_0 is a non-commutative projective variety over k .*

Remark 7.1. *Let K be a differential field with generators of finite transcendent degree over the field of complex numbers and S the set of intermediate differential field with the differential automorphism group which is locally algebraic. Then S is countable.*

References

- [Bak] Bourbaki, N., *Element de Mathematique*, Algebre commutative Chapitres 5 a 7, N.Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006, pp. 351.
- [Breen1] Breen, L., *Théorie de Schreier supérieure.*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 25, pp. 465-514(1992).
- [Breen2] Breen, L., *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, 225 Astérisque Société Mathématique p. 160 (1994).
- [Brz] Brzezinski, T., Wisbauer, R., *Corings and Comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, Cambridge University Press, 2003.
- [Cohn] Cohn, P.M., *Skew Fields*, Theory of general division rings, Encyclopedia of mathematics and applications 57.
- [CD] D-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*. Astérisque 308 2006, Société Math.France.
- [Gir] Giraud, J., *Cohomologie non abélienne.*, Grundlehren math. Wiss., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 467,(1971).
- [SGA] Grothendieck, A. et al., *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, SGA1, SGA4 I,II,III, SGA41/2, SGA5, SGA7 I,II, Lecture Notes in Mat., vols. 224,269-270-305,569,589,288-340, Springer-Verlag, New York, 1971-1977.
- [GG] Grothendieck, A., *Fondaments de la géométrie algébrique.*, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curis, Paris 5e, p. 236 (1962).
- [Iita] Iitaka, S., *Introduction to birational geometry.*, Graduate Textbook in Mathematics, Springer-Verlag, p. 357 (1976).
- [Kon] Kontsevich, M., Rosenberg A. *Noncommutative smooth spaces.*, arXiv:math.AG/9812158v1 30Dec 1998.
- [Mats] Matsuki K., *Introduction to the Mori Program.*, Universitext p. 468 Springer 2000
- [RBZL] Ribes L., Zalesskii P., *Profinite Groups.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge Vol.40 Springer(1991).
- [Shatz] Shatz, S., *Profinite groups, arithmetic, and geometry.*, Annals of Math. studies, N. 67, Princeton Uni. Press, p. 252,(1972).
- [Vieh] Viehweg, E. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge.Band 30, p. 320 (1991).

Some results on normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one

Hideo Kojima (Niigata University)

January 10, 2015

Contents

§1 Minimal model theory for normal surfaces

§2 Normal del Pezzo surfaces of rank one

**§3 Normal log canonical del Pezzo surfaces of
rank one**

§4 On proofs

§1. Minimal model theory for normal surfaces

- smooth case (classical)
- with only l.t. sing. (Tsunoda, etc)
- $(/\mathbb{C})$ normal Moishezon surfaces (Sakai '84, '85)
- with only $\mathbb{Q}$ -factorial sing. (Fujino '12, Tanaka)
- with only l.c. sing. (Fujino '12, Tanaka)

(l.t. = log terminal, l.c. = log canonical)

V : normal proj. surf. with only l.c. sing.

$f : V \rightarrow V_{\min}$: rel. minimal model of V

f can be constructed by contracting curves C with $C^2 < 0$ and $CK_V < 0$ successively.

Theorem 1.1 (Fujino '12, Tanaka) V : as above

(1) $W := V_{\min}$: normal proj. surf. with only l.c. sing.

(2) One of the following conditions is satisfied:

(i) K_W is nef. (W is minimal.)

(ii) $\exists \pi : W \rightarrow T$ (T : smooth proj. curve)

s.t.

- $\forall$ fiber of π is irred.

- General fiber of $\pi \cong \mathbb{P}^1$.

(iii) $(-K_W)^2 > 0$, $(-K_W)C > 0$ for $\forall C$: irred. curve on W , $\rho(W) = 1$.

Rem.

- Theorem 1.1 holds true in any characteristic. (Tanaka)

- The case (ii) of Theorem 1.1 (2) was studied completely. (Sakai '87, Schröer '01 (in any characteristic))

- We call the surface W in (iii) of Theorem 1.1 (2) a normal l.c. del Pezzo surface of rank one. If W has only l.t. sing., then it is called a log del Pezzo surface of rank one.

§2 Normal del Pezzo surfaces of rank one

Setting:

X : normal del Pezzo surface of rank one

i.e.,

- X : normal complete algebraic surface
- $(-K_X)^2 > 0$, $(-K_X)C > 0$ for $\forall C$: irred. curve on X
- $\rho(X) = 1$

Rem. $h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. (Sakai '84)

Proposition 2.1. (Brenton '77, Fujisawa '95, Chel'tsov '97 etc.)

(1) X is a ruled surface.

(2) X is projective.

(3) X is a rational surface $\iff \forall$ sing. point on X is rational $\iff X$ is $\mathbb{Q}$ -factorial.

Normal del Pezzo surfaces of rank one

- with only Gorenstein sing. ($\rho \geq 1$)

Demazure '77, Hidaka–Watanabe '81, etc.

- Classification of the non-rational surfaces

Chel'tsov '97, Schröer '01 (in any characteristic)

Some results on log del Pezzo surfaces

- Boundedness of log del Pezzo surf. (Nikulin '89, '90)

n : index of X (the minimal number n s.t. nK_X is a Cartier div.)

$\exists f(n)$: function

s.t. $\rho(\tilde{X}) \leq f(n)$ for $\forall X$: log del Pezzo surf. of index n , where $\tilde{X}$ is the minimal resol. of X .

Theorem 2.2 (Gurjar-Zhang '94, '95, Fujiki–Kobayashi–Lu '93) The fundamental group of the smooth part of every log del Pezzo surf. is finite.

Theorem 2.3 (Keel–McKernan '99) The smooth part of every log del Pezzo surface is log uniruled.

By virtue of Theorem 2.3, we know that every smooth algebraic surface of logarithmic Kodaira dimension $-\infty$ is log uniruled.

Some classification results

toric log del Pezzo surfaces

.

Dais, Nill '08, '09 (Toric surf. version of the boundedness result, classification of the surfaces of index 3 and $\rho = 1$)

- Case of index 2 ($\rho \geq 1$)

Alexeev–Nikulin '89, '06, Nakayama '07 (in any characteristic)

- Case of index 3 ($\rho \geq 1$, in any characteristic))

Fujita–Yasutake '14

- Minimal compactifications of $\mathbb{C}^2$

K. '01

There are many other results.

The number of singular points

Proposition 2.4 (Keel–McKernann '99) The number of the sing. points on every log del Pezzo surface of rank one ≤ 5 .

- (K. '99) Classification of the log del Pezzo surfaces of rank one with only one sing. points

Theorem 2.5 (Belousov '08, '09) The number of the sing. points on every log del Pezzo surface of rank one ≤ 4 .

- (D.-S. Hwang '14 (?)) Classification of the log del Pezzo surfaces of rank one with four sing. points.

§3 Normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one

Setting:

X : normal del Pezzo surf. of rank one with only rational sing.

$\pi : V \rightarrow X$: minimal resol. of X

D : reduced exceptional div. w.r.t. π

$$D^\# := \pi^*(K_X) - K_V$$

Rem. $D^\#$ is an effective $\mathbb{Q}$ -div. and $\text{Supp} D^\# \subseteq \text{Supp} D$.

Rem. D is an SNC-divisor (a simple normal crossing divisor) whose irred. components are rational curves and the dual graph of D is a tree. ($\because X$ has only rational sing.)

$\text{MV}(X)$: the set of all irreducible curves C' s.t. $C'(-K_X)$ attains the smallest value.

$$\text{MV}(V, D) := \{\pi'(C') \mid C' \in \text{MV}(X)\}$$

Definition.

(1) X (or (V, D)) is of the first kind $\iff$

$\exists C \in \text{MV}(V, D)$ s.t. $|C + D + K_V| \neq \emptyset$.

(2) X (or (V, D)) is of the second kind $\iff$

it is not of the first kind, i.e., $\forall C \in \text{MV}(V, D)$, $|C + D + K_V| = \emptyset$.

Rem. If $|C + D + K_V| = \emptyset$, then $C + D$ is an SNC-div. and every connected component of $C + D$ is a tree of $\mathbb{P}^1$'s.

Lemma 3.1 (K.-Takahashi. '09, D.-Q. Zhang '88) If X is of the first kind, then it has only l.t. sing.

Lemma 3.2 (K.-T. '09, D.-Q. Zhang '88) If X is of the second kind and $\rho(V) \geq 3$, then every curve $C \in \text{MV}(V, D)$ is a (-1) -curve.

From now on, we assume that the following condition.

- X has only rational l.c. sing.

Theorem 3.3 (K.-T. '09) If X contains $\mathbb{C}^2$ as a Zariski open subset and has at least one non-l.t. sing. points, then the weighted dual graph of D is one of those in Figure 1, where the number -2 for a (-2) -curve is omitted.

Theorem 3.4 (K.-T. '12) X has at most five singular points.

Theorem 3.5 (K. '13) If X has just five sing. points, then the weighted dual graph of D is given as in Figure 2.

Classification results

From now on, we assume further that:

- (i) X has only rational l.c. sing.
- (ii) There exists a non-l.t. sing. point on X .

By virtue of the results mentioned in §2, we may assume the above conditions (i) and (ii) in order to prove Theorems 3.3~3.5.

Rem. The above conditions (i) and (ii) imply that X is of the second kind.

Definition. Assume that X is of the second kind.

Type IIa. $\exists C \in \text{MV}(V, D)$ s.t. C meets at least two (-2) -curve in $\text{Supp}D$.

Type IIb. X is not of type IIa and $\exists C \in \text{MV}(V, D)$ s.t. $CD = 1$.

Type IIc. X is neither of type IIa nor of type IIb.

The following cases are classified.

- Type IIa (K.-T. '12) (including the case where X has only 1.t. sing.)
- Type IIb (K.-T., in preparation)
- The case $\#\text{Sing}X = 4$ (K.-T., in preparation)
- The case $\#\text{Sing}X = 1$ (K. '14)

§4 On proofs

X : normal del Pezzo surf. of rank one with only rational l.c. sing.

$\pi : V \rightarrow X$: minimal resol. of X

D : reduced exceptional div. w.r.t. π

$$D^\# := \pi^*(K_X) - K_V$$

$MV(X)$: the set of all irreducible curves C' s.t. $C'(-K_X)$ attains the smallest value.

$$MV(V, D) := \{\pi'(C') \mid C' \in MV(X)\}$$

We may assume that X contains non-l.t. sing.

$$(\implies \rho(V) \geq 3)$$

By Lemmas 3.1 and 3.2, we have:

- X is of the second kind.
- $\forall C \in MV(V, D)$ is a (-1) -curve and $|C + D + K_V| = \emptyset$.

$|C + D + K_V| = \emptyset \implies$ the dual graph of $C + D$ is a tree.

Lemma 4.1. Let D_i be an irred. component of D with $b_i = -D_i^2$. Then the coefficient of D_i in $D^\# \geq 1 - \frac{2}{b_i}$.

$$C \in \text{MV}(V, D) \implies CD^\# < -CK_V = 1$$

By Lemma 4.1, we know that D has at most two components D_i s.t. $D_i C > 0$ and $D_i^2 < -2$.

Special case 1: Type IIa

D_1, D_2 : two (-2) -curves $\subset \text{Supp} D$ meeting C .

$$|C + D + K_V| = \emptyset \implies CD_1 = CD_2 = 1, D_1 D_2 = 0.$$

$\implies |D_1 + D_2 + 2C|$ gives rise to a $\mathbb{P}^1$ -fibration $\Phi : V \rightarrow \mathbb{P}^1$.

By studying singular fibers of Φ , we can determine the pairs (V, D) .

Special case 2: Type IIb: $CD = 1$.

$D^{(1)}$: conn. comp. of D meeting C

By case by case study on the shape of the dual graph of $D^{(1)}$, we can determine the pairs (V, D) .

Lemma 4.2. $C' \in \text{MV}(X)$.

$\implies X \setminus C'$ is a $\mathbb{Q}$ -homology plane.

K. Palka '13 classified the $\mathbb{Q}$ -homology planes

.

containing at least one non-l.t. sing.

$C \in \text{MV}(V, D)$

D' : conn. comp. of D that is NOT contracted to l.t. sing.

- If $CD' = 0$, then we can determine the pair (V, D) by using the result of Palka.
- $CD' > 0$? We have not yet done completely.

有理尖点平面曲線の非特異モデルの自己交点数について

戸野 恵太

1 はじめに

C を複素射影平面 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ 上の既約代数曲線とする。 C の局所的に既約な特異点を尖点 (*cusp*) と呼ぶ。 C は特異点として尖点のみを持つとする。このような C を尖点平面曲線 (*cuspidal plane curve*) と呼ぶことにする。 C の特異点の集合を $\text{Sing } C$ と書く。 $P \in \text{Sing } C$ の重複度列 (*multiplicity sequence*) を $\overline{m}_P(C) = (m_{P,0}, m_{P,1}, \dots, m_{P,k_P})$ とする。ただし $m_{P,0} \geq m_{P,1} \geq \dots \geq m_{P,k_P} \geq 2$ で $m_{P,0}$ は C の P における重複度である。 $m_{P,1}$ は P のブローアップ σ_1 による C の固有変換 C_1 と σ_1 の例外曲線との交点における C_1 の重複度であり、 $m_{P,2}, \dots, m_{P,k_P}$ も同様に定義される。 (x, y, z) を $\mathbf{P}^2$ の同次座標とする。

例 1. C を $x^2 z^{2k-1} = y^{2k+1}$ ($k \geq 1$) で定義される曲線とすると $P = (0, 0, 1)$ は C の尖点で $\overline{m}_P(C) = (2, \dots, 2)$ (2 が k 個) となる。これを $\overline{m}_P(C) = (2_k)$ と略記する。

$\sigma : V \rightarrow \mathbf{P}^2$ を C の特異点の極小埋め込み解消とする。これは $\sigma^{-1}(C)$ が正規交差因子になる最短のブローアップの列の合成である。 σ による C の固有変換を C' と書く。本稿では C' の自己交点数 $(C')^2$ を考察する。これは $(C')^2 = (\deg C)^2 - \sum_{P \in \text{Sing } C} (m_{P,k_P} + \sum_{j=0}^{k_P} m_{P,j}^2)$ と計算される。 C' の種数を $g(C)$ と書く。 $\text{Sing } C = \{P_1, \dots, P_n\}$ のとき $\text{Data}(C) = [\overline{m}_{P_1}(C), \dots, \overline{m}_{P_n}(C)]$ と定める。

例 2. N を 1 つの結節点を持つ既約 3 次曲線とすると N は 3 つの変曲点を持つ。 N の双対曲線 Γ_4 は 4 次尖点平面曲線で N の変曲点に対応する 3 個の尖点を持つ。 $\text{Data}(\Gamma_4) = [(2), (2), (2)]$, $g(\Gamma_4) = 0$, $(\Gamma_4')^2 = -2$ である。なお 3 個の尖点を持つ任意の 4 次有理尖点平面曲線はどれも互いに射影同値である。 Γ_4 については [N, Theorem 2.2.5] も参照せよ。

例 3. 例 2 の記号を使う。 N の結節点の双対を L とすると L は Γ_4 の 2 つの非特異点で接する Γ_4 の複接線である。 Q を接点の一つとする。 $W \xrightarrow{\phi_2} W_2 \xrightarrow{\phi_1} W_1 \xrightarrow{\phi_0} \mathbf{P}^2$ を Q 上の 3 回のブローアップとする。各 $i \geq 1$ に対して ϕ_{i-1} の例外曲線を E_i と書く。 E_i , Γ_4 , L のブローアップによる固有変換を同じ記号で表す。 $i = 1, 2$ に対して ϕ_i が $\Gamma_4 \cap E_i$ でブローアップを行うようにすると $L, E_2, E_1 \subset W$ はこの順にブローダウンできる。その合成を $\psi : W \rightarrow \mathbf{P}^2$ とすると $\psi(L + E_2 + E_1)$ は 1 点 P からなる。 P は $\Gamma_5 := \psi(\Gamma_4)$ の尖点で $\overline{m}_P(\Gamma_5) = (2_3)$ となる。 Γ_5 は 5 次有理尖点平面曲線で $\text{Data}(\Gamma_5) = [(2_3), (2), (2), (2)]$, $(\Gamma_5')^2 = -7$ である。 Γ_5 については [N, Theorem 2.3.10], [IUN] も参照せよ。

謝辞. 本稿を執筆する機会を与えていただいたことに感謝いたします。なお本研究は科研費 (22540040) ならびに風樹会の助成を受けたものです。

2 (d, m) 型曲線

C を $\mathbf{P}^2$ の曲線とする。 $d = \deg C$, $m = \max_{P \in C} \{ C \text{ の } P \text{ における重複度} \}$ のとき C は (d, m) 型であるという。[SST] において尖点平面曲線とは限らない $(d, d-2)$ 型既約曲線が分類されている。分類結果の一部を以下の例で紹介する。

例 4. 任意の $g, n' \geq 0$, $b_1, \dots, b_{n'} \geq 1$ ($n' \leq 2g+1$, $k := g-1 + \sum_{i=1}^{n'} b_i \geq 1$) に対して $g = g(C)$, $\text{Data}(C) = [(2k+1, 2_k), (2_{b_1}), \dots, (2_{b_{n'}})]$ をみたす $(2k+3, 2k+1)$ 型尖点平面曲線がある。 $(C')^2 = 4g+2-2n'$ である。

定理 5 ([H]). Γ を非特異有理曲面 S 上の種数 $g \geq 1$ の非特異曲線とする。ただし $g = 1$ なら $S \neq \mathbf{P}^2$ とする。このとき $\Gamma^2 \leq 4g+4$ が成り立つ。

系. C を尖点平面曲線とする。尖点の数を $n \geq 1$, C' の種数を $g \geq 1$ とする。このとき $(C')^2 \leq 4g+4-2n$ が成り立つ。

例 4 の C は $(C')^2 = 4g+4-2n$ をみたす例になっている。 (d, m) 型有理尖点平面曲線に関しては次の結果がある。

定理 6 ([MS]). 任意の (d, m) 型有理尖点平面曲線に対して $d < 3m$ が成り立つ。

3 有理尖点平面曲線

C を n 個の尖点を持つ有理尖点平面曲線とする。 $n \geq 4$ をみたす有理尖点平面曲線が例 3 の Γ_5 以外にあるかどうかは分かっていない。 $\mathbf{P}^2 \setminus C$ の対数的小平次元を $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C)$ と書く。[W] において既約平面曲線の補集合の対数的小平次元が計算されている。有理尖点平面曲線の場合は次のようになる。

定理 7 ([W]). $n = 2$ なら $\bar{\kappa} \geq 0$ が、 $n \geq 3$ なら $\bar{\kappa} = 2$ が成り立つ。

さらに次の結果がある。

定理 8 ([Ts]). 任意の n について $\bar{\kappa} \neq 0$ が成り立つ。

$n = 1$ のときには $\bar{\kappa}$ と $(C')^2$ との間に次の関係がある。

定理 9 ([Y]). $n = 1$ のとき $\bar{\kappa} = -\infty$ であるための必要十分条件は $(C')^2 \geq -1$ である。

すなわち $n = 1$ のとき $\bar{\kappa} \geq 1$ であるための必要十分条件は $(C')^2 \leq -2$ である。

例 10. C を $y^d = x^{d-1}z$ ($d \geq 3$) で定義される曲線とすると C は有理尖点平面曲線で $\text{Data}(C) = [(d-1)]$, $(C')^2 = d$ が成り立つ。よって $\bar{\kappa} = -\infty$ である。

[T1] において $n = 1$, $\bar{\kappa} = 1$ をみたす曲線が分類されている。[O] において $\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C_{4k}) = \bar{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C_{4k}^*) = 2$ を満たし、尖点を 1 つだけ持つ有理尖点平面曲線の 2 つの列 C_{4k} , C_{4k}^* ($k = 1, 2, \dots$) が構成されている。すべての $k \geq 1$ に対して $(C'_{4k})^2 = (C_{4k}^*)^2 = -2$ が成り立つ。[T2] において $n = 1$, $\bar{\kappa} = 2$, $(C')^2 = -2$ なら $k \geq 1$ があって C は C_{4k}^* , C_{4k} のどちらかに射影同値であることが示されている。よって [T1, T2] により $n = 1$, $(C')^2 = -2$ をみたす C が決定された。 $n \geq 2$ のときには次が成り立つ。

定理 11 ([T3]). $n = 2$ なら $(C')^2 \leq 0$ である。

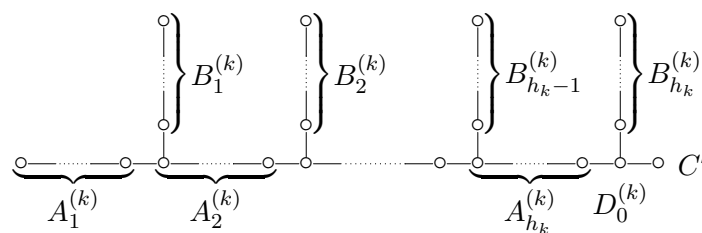
定理 12 ([T4]). $n \geq 3$ なら $(C')^2 \leq 7 - 3n$ が成り立つ。 $n = 3$, $(C')^2 = -2$ なら C は Γ_4 と射影同値である。

以上のことから $\bar{\kappa} \neq -\infty$ なら $(C')^2$ には上限がある。次の命題は $n = 4$ のときの $(C')^2$ の評価を改善するもので、本稿の主結果である。

命題. C を 4 個の尖点を持つ有理尖点平面曲線とする。このとき $(C')^2 \leq -6$ が成り立つ。

4 命題の証明の概略

C を 4 個の尖点を持つ有理尖点平面曲線で $\text{Sing } C = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ とする。 $\sigma : V \rightarrow \mathbf{P}^2$, C' をこれまで通りとする。定理 12 により $(C')^2 = -5$ を満たす C が存在しないことを示せばよい。 $D := \sigma^{-1}(C)$ とおく。各 k に対して $\sigma^{-1}(P_k) + C'$ の双対グラフは次の形である ([BK, MS])。



ここで $D_0^{(k)}$ は P_k 上の最後のブローアップの例外曲線で $h_k \geq 1$ である。 σ は $A_{h_k}^{(k)} + D_0^{(k)} + B_{h_k}^{(k)}$ を (-1) -曲線 E に潰し、 $A_{h_k-1}^{(k)} + E + B_{h_k-1}^{(k)}$ を (-1) -曲線に潰す。 σ はこのようにブローダウンを繰り返して $\sigma^{-1}(P_k)$ を P_k に潰す。 $A_{h_k}^{(k)} + B_{h_k}^{(k)}$ の既約成分の中で $D_0^{(k)}$ と交わるものが 2 つある。一方は (-2) -曲線で他方は違う。 (-2) -曲線を $D_1^{(k)}$ と、他方を $D_2^{(k)}$ と書く。 $D - D_0^{(k)} - D_1^{(k)}$ の既約成分で $D_1^{(k)}$ と交わるものがあればそれを $D_3^{(k)}$ と書く。

以後 $(C')^2 = -5$ と仮定する。 $D_0^{(1)} + D_0^{(2)} + D_0^{(3)} + D_0^{(4)} + D_1^{(4)}$ のブローダウンを $\sigma' : V \rightarrow V'$ とする。 $\sigma'(C')^2 = 0$ だから $\mathbf{P}^1$ -ファイブレーション $p : V' \rightarrow \mathbf{P}^1$ がある。

$\sigma'(C')$ は p の非特異ファイバーで、 $S_i := \sigma'(D_1^{(i)})$ ($i \leq 3$), $S_4 := \sigma'(D_3^{(4)})$, $T_i := \sigma'(D_2^{(i)})$ ($i \leq 4$) は切断である。 $\sigma'(D)$ はこれら以外の p の切断を含まない。 $\sigma'(C')$ と T_4 の交点数は 2 で、残りの切断との交点数は 1 である。

p のファイバーに含まれる (-1) -曲線が無くなるまでブローダウンを行う。それらを合成したものを $\varphi : V' \rightarrow \Sigma_d$ とする。ここで Σ_d はある次数 $d \geq 0$ の Hirzebruch 曲面である。 $q := p \circ \varphi^{-1} : \Sigma_d \rightarrow \mathbf{P}^1$ は $\mathbf{P}^1$ -束であり p の相対的極小モデルである。 S_1, T_1 , etc. の φ による像を $\bar{S}_1, \bar{T}_1$, etc. と書く。 $\bar{C} = \varphi(\sigma'(C'))$, $\bar{D} = \varphi(\sigma'(D))$ と定める。次の補題により $\bar{S}_1 + \bar{T}_4$ は非特異であるとしてよい。

補題 13. $\bar{S}_1 + \bar{T}_4$ が非特異であるように φ のブローダウンの仕方を選べる。このとき次が成り立つ。

- (i) $d = 1$, $\bar{S}_1^2 = -1$, $\bar{T}_4 \sim 2\bar{S}_1 + 2\bar{C}$ (線形同値).
- (ii) φ は $\bar{S}_1$ 上ブローアップを行わない。 $\bar{S}_1, \bar{T}_1$ 以外の q の $\bar{D}$ 内の切断は $\bar{S}_1$ と交わらない。
- (iii) $\bar{T}_2 \sim \bar{T}_3 \sim \bar{S}_2 \sim \bar{S}_3 \sim \bar{S}_4 \sim \bar{S}_1 + \bar{C}$, $\bar{T}_1 \sim \bar{S}_1 + 2\bar{C}$.

証明. $\bar{S}_1 + \bar{T}_4$ が特異点 P を持つとする。 $S_1 + T_4$ は非特異だから、必要なら φ のブローアップの順序を変えることにより、 φ の初めのブローアップ φ_1 は P で行われるとしてよい。残りのブローアップの合成を φ_0 と書くと $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$ である。 P を通る q のファイバーの φ_1 による固有変換を F' と書く。 F' のブローダウンを φ_2 とする。 F' は $p \circ \varphi_0^{-1}$ の特異ファイバーの成分だから φ を $\varphi_2 \circ \varphi_0$ で置き換えてよい。以上の操作を繰り返すことにより新たな特異点を作ることなく特異点 P を解消できる。よって最初の主張が従う。残りの主張は最初の主張を使って示すことができる。 $\square$

$\bar{S}_1$ のブローダウンを $\phi : \Sigma_1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ とする。 $\bar{T}_1, \bar{S}_2$, etc. の ϕ による像を $\hat{T}_1, \hat{S}_2$, etc. と書く。 $\hat{T}_1, \hat{T}_4$ は 2 次曲線であり、 $\hat{C}, \hat{S}_4, \hat{S}_i, \hat{T}_i$ ($i = 2, 3$) は直線である。 $\hat{S}_i, \hat{T}_j, \hat{C}$ の交わり方は $\bar{S}_i, \bar{T}_j, \bar{C}$ の交わり方と同様である ($i, j \geq 2$)。これらの直線と 2 次曲線のすべての配置を考える。各配置毎にブローダウン $\sigma : V \rightarrow \mathbf{P}^2$ ができるような D を構成するブローアップ $\phi \circ \varphi \circ \sigma' : V \rightarrow \mathbf{P}^2$ が存在しないことを示すことで C が存在しないことが証明される。

参考文献

- [BK] Brieskorn, E., Knörrer, H.: Plane algebraic curves. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser 1986.
- [H] Hartshorne, R.: Curves with high self-intersection on algebraic surfaces, Publ. Math. I.H.E.S., **36** (1969), 111–125.

- [IUN] 飯高 茂, 上野 健爾, 浪川 幸彦: デカルトの精神と代数幾何 [増補版]. 日本評論社, 1993.
- [MS] Matsuoka, T., Sakai, F.: The degree of rational cuspidal curves, *Math. Ann.* **285**, (1989), 233–247.
- [N] Namba, M.: *Geometry of projective algebraic curves*, New York, Basel: Dekker 1984.
- [O] Orevkov, S. Yu.: On rational cuspidal curves I. Sharp estimate for degree via multiplicities, *Math. Ann.* **324**, (2002), 657–673.
- [SST] Sakai, F. and Saleem, M. and Tono, K.: Hyperelliptic plane curves of type $(d, d - 2)$, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **51** (2010), 31–44.
- [T1] Tono, K.: Rational unicuspidal plane curves with $\bar{\kappa} = 1$, *数理解析研究所講究録* **1233**, (2001), 82–89.
- [T2] Tono, K.: On Orevkov’s rational cuspidal plane curves, *J. Math. Soc. Japan* **64**, (2012), 365–385.
- [T3] Tono, K.: On a new class of rational cuspidal plane curves with two cusps, Preprint. arXiv:1205.1248
- [T4] Tono, K.: On the self-intersection number of the nonsingular models of rational cuspidal plane curves, Preprint. arXiv:1408.0190.
- [Ts] Tsunoda, S.: The complements of projective plane curves, *数理解析研究所講究録* **446**, (1981), 48–55.
- [W] Wakabayashi, I.: On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in $\mathbf{P}^2$, *Proc. Japan Acad.* **54**, Ser. A, (1978), 157–162.
- [Y] 吉原 久夫: 単尖点有理曲線, *数学* **40**, (1988), 269–271.

338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255

埼玉大学大学院理工学研究科

E-mail address: ktono@rimath.saitama-u.ac.jp

2次被覆による平面曲線の引き戻しの分解と ザリスキ対について

白根 竹人

はじめに

本稿は「代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜」で発表した内容に 6 次の結節曲線の例を加えたものです。また、本研究は茨城高専の坂内真三氏との共同研究で、詳しい証明などは論文 [2] にて準備中です。発表の機会を与えてくださった世話人の先生方には感謝いたします。

1 導入

ザリスキ対 (定義 1.3) を大雑把に説明すると、ある被約な曲線 (既約とは限らない) の複素射影平面への位相的に異なる埋め込みの組のことである。気持ちとしては、円 S^1 を $\mathbb{R}^3$ への埋め込み方を比較する結び目理論の類似といえる。ザリスキ対の研究は O. Zariski の論文 [3] の例 2.5 から始まり、多くの数学者により研究され、多くの例が与えられてきた (cf. [1])。ザリスキ対の研究の目的は主に以下の二点である：

- 二つの平面曲線の組がザリスキ対となる条件を与えること、
- ザリスキ対を具体的に構成する方法を与えること。

ザリスキ対となる条件が与えられていても、実際に条件を満たす曲線の組が存在するか判定することは一般に難しい。本研究の目的はザリスキ対となるための新たな十分条件 (定理 2.4, 定理 2.7) を与え、新しいザリスキ対の例を構成すること (定理 3.4) である。

ザリスキ対の定義を与えるために、平面曲線の combinatorial type を定義する。

定義 1.1 (cf. [1])。 (被約な) 平面曲線 $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ に対して、 Γ の *combinatorial type* とは次の 7 つ組のことを言う；

$$(\text{Irr}(\Gamma), \deg, \text{Sing}(\Gamma), \Sigma_{\text{top}}(\Gamma), \sigma_{\text{top}}, \{\Gamma(P)\}_{P \in \text{Sing}(\Gamma)}, \{\beta_P\}_{P \in \text{Sing}(\Gamma)}),$$

ここで、各成分は以下を満たすものである：

- $\text{Irr}(\Gamma)$ は Γ の既約成分から成る集合で、 $\deg : \text{Irr}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ は各既約成分に対してその次数を対応させる写像である；
- $\text{Sing}(\Gamma)$ は Γ の特異点の集合で、 $\Sigma_{\text{top}}(\Gamma)$ は Γ の特異点の位相型 (topological type) の集合であり、 $\sigma_{\text{top}} : \text{Sing}(\Gamma) \rightarrow \Sigma_{\text{top}}(\Gamma)$ は各特異点に対してその位相型を対応させる写像である；
- $\Gamma(P)$ は $P \in \text{Sing}(\Gamma)$ における Γ の局所的な分岐の集合で、 $\beta_P : \Gamma(P) \rightarrow \text{Irr}(\Gamma)$ は各局所的な分岐に対してそれを含む既約成分を対応させる写像である。

補足 1.2. 研究集会での発表において、combinatorial type とは (既約成分の数, 各既約成分の次数, 各既約成分の特異点, 各既約成分の交わり方) の 4 つ組と説明したが、上記の定義では既約成分と次数や特異点と位相型などの対応を記述する写像も含まれているので 7 つ組になっている。

定義 1.3. k 個の曲線 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \subset \mathbb{P}^2$ に対し、 $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ が *Zariski k -plet* であるとは次の 2 条件を満たすことである；

- $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ の combinatorial type は同じである；
- 任意の $1 \leq i < j \leq k$ に対し、 $h(\Gamma_i) = \Gamma_j$ を満たす同相写像 $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在しない。

特に, $k = 2$ のとき, (Γ_1, Γ_2) をザリスキ対 (Zariski pair) という.

例 1.4 ([3]). $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2$ を 6 個の尖点をもつ 6 次曲線とする. もし次の 2 条件を満たしていれば (Γ_1, Γ_2) はザリスキ対となる;

- Γ_1 の 6 個の尖点を通る 2 次曲線が存在する;
- Γ_2 の 6 個の尖点を通る 2 次曲線は存在しない.

次に本研究の鍵となる 2 次被覆による平面曲線の引き戻しとザリスキ対の関係を述べる. そのために, 次の記号を導入する. $2k$ 次曲線 $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ に対し, Δ で分岐する 2 次被覆を $\pi_\Delta: X_\Delta \rightarrow \mathbb{P}^2$, π_Δ の被覆変換写像を $\iota_\Delta: X_\Delta \rightarrow X_\Delta$ と書く.

命題 1.5. $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{P}^2$ を 2 つの $2k$ 次曲線とし, 2 の平面曲線 $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2$ が次の 2 条件を満たすとする;

- $\Gamma_1 + \Delta_1$ と $\Gamma_2 + \Delta_2$ の combinatorial type が同じである;
- 各 $i = 1, 2$ に対し, $\pi_{\Delta_i}^* \Gamma_i = D_i^+ + D_i^-$ ($D_i^- := \iota_{\Delta_i}^* D_i^+$) を満たす $D_i^+ \subset X_{\Delta_i}$ が存在する.

このとき, $\sharp(D_1^+ \cap D_1^-) \neq \sharp(D_2^+ \cap D_2^-)$ が成り立てば, $h(\Delta_1) = \Delta_2$ と $h(\Gamma_1 + \Delta_1) = \Gamma_2 + \Delta_2$ を満たす同相写像 $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ は存在しない. さらに, 任意の $C_1 \in \text{Irr}(\Delta_1)$ と $C'_1 \in \text{Irr}(\Gamma_1)$ に対し, $\deg(C_1) \neq \deg(C'_1)$ を満たすとき, $(\Gamma_1 + \Delta_1, \Gamma_2 + \Delta_2)$ はザリスキ対となる.

Proof. $h(\Delta_1) = \Delta_2$ と $h(\Gamma_1 + \Delta_1) = \Gamma_2 + \Delta_2$ を満たす同相写像 $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在すると仮定する. このとき, 2 次被覆の一意性より, ある同相写像 $\tilde{h}: X_{\Delta_1} \rightarrow X_{\Delta_2}$ が存在し, $h\pi_{\Delta_1} = \tilde{h}\pi_{\Delta_2}$ を満たす.

$$\begin{array}{ccc} X_{\Delta_1} & \xrightarrow{\tilde{h}} & X_{\Delta_2} \\ \downarrow \pi_{\Delta_1} & & \downarrow \pi_{\Delta_2} \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

このとき, $\sharp(D_1^+ \cap D_1^-) = \sharp(\tilde{h}(D_1^+) \cap \tilde{h}(D_1^-)) = \sharp(D_2^+ \cap D_2^-)$ が成り立ち, 仮定に矛盾する. よって, 前半の主張が成り立つ.

また, $h(\Gamma_1 + \Delta_1) = \Gamma_2 + \Delta_2$ を満たす同相写像 $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在するとき, $C_1 \in \text{Irr}(\Gamma_1 + \Delta_1)$ の特異点と種数より, $\deg(C_1) = \deg(h(C_1))$ となるので, 後半の主張も成り立つ. $\square$

2 接 2 次曲線をもつ結節曲線

この節では, 本研究の対象となる接 2 次曲線をもつ結節曲線の定義と主結果を述べる.

定義 2.1. $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ を d 次の平面曲線とする.

- 曲線 Γ の全ての特異点が結節点であるとき, Γ を結節曲線 (nodal curve) と呼ぶ.
- 非特異 2 次曲線 $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ が Γ の非特異点で接するとき, Δ を Γ の接 2 次曲線 (tangent-conic) と呼ぶ.

ここから $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ は非特異 2 次曲線とする. このとき, Δ で分岐する 2 次被覆 $\pi_\Delta: X_\Delta \rightarrow \mathbb{P}^2$ に対して, $X_\Delta \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が成り立つ. そこで, 「 Δ に関する (m, n) 型の分解曲線」を定義する.

定義 2.2. 非特異 2 次曲線 $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ を接 2 次曲線としてもつ平面曲線 Γ に対し, 以下の条件を満たすとき, Γ を Δ に関する (m, n) 型の分解曲線 (splitting curve of type (m, n)) であるという;

- $\pi_\Delta^* \Gamma = D^+ + \iota_\Delta^* D^+$ を満たす $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の (m, n) -曲線 D^+ が存在する.

補足 2.3. d 次曲線 Γ に対して, $\pi_\Delta^* \Gamma \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は (d, d) -曲線である. したがって, d 次曲線が Δ に関する (m, n) 型の分解曲線ならば $d = m + n$ である.

命題 1.5 より, d 次曲線の Δ に関する分解の型によって, ザリスキ対か否かを判定できる.

定理 2.4. $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2$ は Δ を接 2 次曲線としてもつ平面 d 次曲線とする. さらに, $\Gamma_1 + \Delta$ と $\Gamma_2 + \Delta$ の combinatrical type は同じであり, Γ_1 の各既約線分の次数は 2 ではないとする. 非負整数 m, m', n, n' は $m + n = m' + n' = d$ と $m \neq m'$ を満たすとする. Γ_1 が Δ に関する (m, n) 型の分解曲線, かつ, Γ_2 が (m', n') 型の分解曲線既約もしくは分解曲線ではないならば, このとき $(\Gamma_1 + \Delta, \Gamma_2 + \Delta)$ はザリスキ対である.

以下, 結節曲線が Δ に関する分解曲線か否かをどのようにして判定するか考える. 次の例は判定条件を得るために重要な役割を果たす.

例 2.5. $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ を次の方程式で与えられる平面曲線とする:

$$c_n^2 - \delta c_{n-1}^2 = 0,$$

ここで, $\delta = 0$ は 2 次曲線 Δ の定義方程式で, $c_i \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(i))$ ($i = n-1, n$) とする. また, $\pi_\Delta^* \delta = r^2$ とする. すると, $\pi_\Delta^* \Gamma$ は

$$(\pi_\Delta^* c_n)^2 - r^2 (\pi_\Delta^* c_{n-1})^2 = 0$$

で与えられているので, Γ は Δ に関する (n, n) 型の分解曲線である.

$i = n-1, n$ に対し, C_i を $c_i = 0$ が定義する $\mathbb{P}^2$ 上の因子とおく. C_n と C_{n-1} が横断的に交わり, $C_n \cap C_{n-1} \cap \Delta = \emptyset$ を満たすとする. Γ は $C_n \cap C_{n-1}$ で $n^2 - n$ 個の結節点をもつ. このとき, C_n と C_{n-1} は次の 3 つの性質を満たす:

- $$\left. \begin{array}{l} (1) \quad C_n \cap C_{n-1} \text{ は } \Gamma \text{ の } n^2 - n \text{ 個の結節点から成る;} \\ (2) \quad C_n \text{ は } \Gamma \text{ と } \Delta \text{ の全ての接点を通る;} \\ (3) \quad \text{各 } i = n-1, n \text{ に対して, } C_i \text{ は } \Gamma \text{ と共通成分をもたない.} \end{array} \right\} \quad (\clubsuit)$$

本研究の主結果は以下である.

定理 2.6. $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ は Δ を接 2 次曲線としてもつ次数 $2n$ の結節曲線とする. このとき, Γ が Δ に関する (n, n) 型の分解曲線であるための必要十分条件は, 結節曲線 Γ に対して次の条件が満たされることである:

条件 $(\clubsuit)$ を満たす n 次曲線 C_n と $n-1$ 次曲線 C_{n-1} が存在する. $(\clubsuit\clubsuit)$

定理 2.6 の証明は Γ の定義方程式が例 2.5 に現れる形になることを示すことによって与えられる. この定理を応用することによって, (m, n) 型の分解曲線となるための必要十分条件を与えられる.

系 2.7. $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ を Δ を接 2 次曲線としてもつ次数 d の既約な結節曲線とする. 整数 m, n は $m + n = d$ と $1 \leq m \leq n$ を満たすとする. このとき, Γ が Δ に関する (m, n) 型の分解曲線であるための必要十分条件は, $\Gamma + \sum_{j=1}^{n-m} L_j$ が Δ を接 2 次曲線にもつ結節曲線となる任意の直線 $L_1, \dots, L_{n-m}$ に対して, 次の条件が満たされることである:

- $$\begin{array}{l} (1) \quad \text{もし } 0 \leq i < n-m \text{ で } d+i \text{ が偶数ならば, 結節曲線 } \Gamma + \sum_{j=1}^i L_j \text{ に対して } (\clubsuit\clubsuit) \text{ は満たされない;} \\ (2) \quad \text{結節曲線 } \Gamma + \sum_{j=1}^{n-m} L_j \text{ に対して } (\clubsuit\clubsuit) \text{ が満たされる.} \end{array}$$

Proof. $L_1, \dots, L_{n-m} \subset \mathbb{P}^2$ は $\Gamma + \sum_{j=1}^{n-m} L_j$ が Δ を接 2 次曲線にもつ結節曲線となる $n-m$ 本の直線とする. このとき, 各 L_i は Δ の接線となっているので, $\pi_\Delta^* L_i = L_i^+ + L_i^-$ となる $(1, 0)$ -曲線 $L_i^+ \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が存在する, ここで $L_i^- := \iota_\Delta^* L_i^+$ である.

まず, Γ が Δ に関する (m, n) 型の分解曲線であるとし, このとき, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上のある (m, n) -曲線 D^+ と $D^- := \iota_\Delta^* D^+$ に対し, $\pi_\Delta^* \Gamma = D^+ + D^-$ となる. すると, $1 \leq i \leq n-m$ に対して,

$$\pi_\Delta^* \left(\Gamma + \sum_{j=1}^i L_j \right) = \left(D^+ + \sum_{j=1}^i L_j^+ \right) + \left(D^- + \sum_{j=1}^i L_j^- \right)$$

となる. Γ は既約なので, $\pi_\Delta^* (\Gamma + \sum_{j=1}^i L_j)$ は, $1 \leq i < n-m$ のときは (n, n) 型の分解曲線ではなく, $i = n-m$ のときに (n, n) 型の分解曲線となる. したがって, 定理 2.6 より, 条件 (1), (2) が満たされる.

逆に、条件 (1), (2) が満たされているとする。 $n-m$ に関する帰納法により、 Γ が (m, n) 型の分解曲線であることを示す。 $n-m=0$ のとき、定理 2.6 より Γ は (m, n) 型の分解曲線である。 $n-m < k$ ならば、 Γ は (m, n) 型の分解曲線になると仮定し、 $n-m=k$ とする。 このとき、条件 (1) と帰納法の仮定より、 $d+i$ が偶数となる $1 \leq i < n-m$ に対し Γ は $\left(\frac{d-i}{2}, \frac{d+i}{2}\right)$ 型の分解曲線ではない。 ここで、 $i' = (n-m-i)/2$ とおくと、 $m+n=d$ より、 $(d-1)/2 = m+i'$ と $(d+1)/2 = n-i'$ が満たされることに注意する。 一方、条件 (2) と定理 2.6 より、 $\pi_{\Delta}^*(\Gamma + \sum_{j=1}^{n-m} L_j)$ は (n, n) 型の分解曲線となる。 したがって、 Γ は分解曲線である。 しかし、前述の通り、 $1 \leq i' \leq (n-m)/2$ に対して Γ は $(m+i', n-i')$ 型の分解曲線ではないので、 Γ は (m, n) 型の分解曲線である。 $\square$

3 結節点の個数が7である6次の結節曲線

ここでは研究集会では紹介できなかった具体例を与え、Zariski 3-plet の例を与える。

7 個の結節点をもつ 6 次の結節曲線が可約ならば、既約成分同士の交点数からその結節曲線は直線と 5 次曲線の和となることがわかる。特に、7 個の結節点をもつ 6 次の結節曲線に対し、5 個の結節点が同一直線上になければ、その結節曲線は既約である。

例 3.1. 斉次多項式 δ, c_2, c_3 を次の式とする：

$$\begin{aligned}\delta &= z^2 - 4xy, \\ c_2 &= x^2 + xy - xz + y^2 - z^2, \\ c_3 &= z^3 + y^2z + xz^2 - 3xyz + x^2z - 2x^2y + 2x^3.\end{aligned}$$

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ を $c_3^2 - \delta c_2^2 = 0$ で与えられる 6 次曲線とすると、 Γ は $\Delta : \delta = 0$ を接 2 次曲線としてもつ 6 次曲線である。そして、 Γ の特異点は全て結節点であり、 $(0:0:1)$, $(9\alpha: -15\alpha^5 - 22\alpha^4 - 11\alpha^3 + 19\alpha^2 + 3\alpha - 7: 9)$ の 7 点から成る、ただし、 α を 6 次方程式 $3\alpha^6 + 5\alpha^5 + 2\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ の解である。同一直線上に 5 個の結節点はないので、 Γ は既約である。特に、例 2.5 より Γ は Δ に関する $(3, 3)$ 型の分解曲線である。

例 3.2. 斉次多項式 δ, c'_3, c'_4 を次の式とする：

$$\begin{aligned}\delta &= z^2 - 4xy, \\ c'_3 &= 2x^3 - x^2z - 2xz^2 + 2y^3 + y^2z - 2yz^2, \\ c'_4 &= x^4 - 6x^2y^2 + 4x^2z^2 + y^4 + 4y^2z^2 - 4z^4.\end{aligned}$$

$\Gamma' \subset \mathbb{P}^2$ を $(c'_3)^2 - \delta c'_4 = 0$ で定義される 6 次曲線とすると、 Γ' は $\Delta : \delta = 0$ を接 2 次曲線としてもつ 6 次曲線である。そして、 Γ' の特異点はすべて結節点であり、 $(-1:-1:1)$, $(-1:0:1)$, $(-1:1:1)$, $(0:1:1)$, $(1:-1:1)$, $(1:1:0)$, $(1:1:1)$ の 7 点から成る。結節点の配置より、 Γ' は既約であることもわかる。

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標を $(s:t, u:v)$ と置くと、 Δ の定義式が $\delta = 0$ なので、2 次被覆 $\pi_{\Delta}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ は $\pi_{\Delta}(s:t, u:v) = (su:tv:sv+tu)$ で与えられる。これより、 $\pi_{\Delta}^*\Gamma'$ の定義式を計算すると、 Γ' は Δ に関する $(2, 4)$ 型の分解曲線であることがわかる。

例 3.3. 斉次多項式 δ, c''_3, c''_4 を次の式とする：

$$\begin{aligned}\delta'' &= 193502x^2 + 166772xy + 7447xz + 3776y^2 + 22330yz + 2178z^2, \\ c''_3 &= -104320x^2y - 378788x^2z - 71330xy^2 - 219337xyz - 2992xz^2 + 1180y^2z - 16423yz^2, \\ c''_4 &= 30320x^2y^2 + 83812x^2yz + 188928x^2z^2 + 45916xy^2z + 46616xyz^2 + 413y^2z^2.\end{aligned}$$

$\Gamma'' \subset \mathbb{P}^2$ を $(c''_3)^2 - 4\delta''c''_4 = 0$ で定義される 6 次曲線とすると、 Γ'' は $\Delta'': \delta'' = 0$ を接 2 次曲線としてもつ。そして、 Γ'' の特異点はすべて結節点であり、 $(0:0:1)$, $(0:1:0)$, $(1:0:0)$, $(1:1:1)$, $(1:2:-3)$, $(3:6:4)$, $(-33:22:27)$ の 7 点から成る。また、結節点の配置より、 Γ'' は既約であることがわかる。以下、 Γ'' が Δ'' に関する分解曲線ではないことの証明の概略を紹介する。

まず、 Γ'' が $(3, 3)$ 型の分解曲線ではないことは、7 個の結節点のうち 6 点を通る 2 次曲線が存在しないことと定理 2.6 からわかる。

次に, Γ'' が $(2, 4)$ 型の分解曲線ではないことを示す. Γ'' と Δ'' の接点は $\delta'' = c_3'' = 0$ で与えられる. そして, これらの接点 6 点と 7 個の結節点を通る 4 次曲線は一意的に定まることが直接的な計算によりわかる. 一方, Γ'' が $(2, 4)$ 型の分解曲線だとすると, 系 2.7 より, Δ'' に接する一般の直線 2 本 L_1, L_2 に対して, Γ'' の結節点 7 点と $\Gamma'' \cap \Delta''$ の 6 点と $\Delta'' \cap (L_1 \cup L_2)$ の 2 点を通る 4 次曲線が存在することになるが, L_1, L_2 の一般性から, 上述の 4 次曲線の一意性に矛盾する. したがって, Γ'' は $(2, 4)$ 型の分解曲線ではない.

以上より, Γ'' は Δ'' に関する分解曲線ではない.

上記 3 つの例より, 以下の定理が得られる.

定理 3.4. 結節点の個数が 7 個である 6 次の結節曲線とその接 2 次曲線の配置による *Zariski 3-plet* が存在する.

Proof. $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ と Δ, Δ'' を例 3.1, 3.2, 3.3 の通りすると, 定理 2.4 より,

$$(\Gamma + \Delta, \Gamma' + \Delta, \Gamma'' + \Delta'')$$

は Zariski 3-plet である. □

References

- [1] E. Artal Bartolo, J. Ignacio Cogolludo, H. Tokunaga, *A survey on Zariski pairs*, Algebraic geometry in East Asia–Hanoi 2005, 1–100, Adv. Stud. Pure Math. **50**, Math. Soc. Tokyo, 2008.
- [2] S. Bannai, T. Shirane, *Splitting of nodal curves with respect to a contact-conic* (仮題), 準備中.
- [3] O. Zariski, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.

〒 755-8555 山口県宇部市常盤台 2 丁目 14 番 1 号 宇部工業高等専門学校
E-mail : tshirane@ube-k.ac.jp

周期 T をもつ n 乗根のフラクタル連分数について

間庭 早紀子, 丸尾 優佳 (津山高専4年), 松田 修(津山高専)

研究目的: ペル方程式は連分数展開で解くことができるという定理がある. 2次ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解法は 1766 年に既に示されている. $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ については, Thue の定理よりの解は高々有限個しかないことが知られている. したがって, n 次ペル方程式を議論することは意味がないように思われる. しかし, 私たちは, 3乗根以上の通常とは異なる連分数で周期性を持つようなものが構成できれば, n 次ペル方程式を別な視点から研究することができるのではないかと考えた.

研究方法: 研究は, 以下の手順で行った.

(1)	$\sqrt[n]{D}$ でも周期性を持つような新しい連分数展開法と, 近似分数列を構成する.
(2)	$\sqrt[n]{D}$ の近似分数列と n 次ペル方程式との関係を詳細に研究する.
(3)	正則という言葉 키워드를, $\sqrt[n]{D}$ の新たな連分数展開について研究し, その結果から n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の新しい理論を構築する.

研究結果: まず, 平方根の正則連分数を, n 乗根へ拡張することを意識し再構成した. そして, 従来の連分数とは全く別の新しいタイプの連分数展開 (**フラクタル連分数**と呼ぶ) を生みだし, そこから n 次ペル方程式と関係の深い近似分数列を得る行列表現 (**ペル表現**と呼ぶ) を構成することに成功した.

私たちは平方根について周期 1 と周期 2 の連分数から得られるペル表現をつくり, それから得られる近似分数がすべて 2 次ペル方程式の解になることを示した. そして, 3乗根と 4乗根についても周期 1 と周期 2 の連分数から得られる私たちの考えたペル表現から得られる近似分数について, それらはすべて, $\text{mod } p$

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \text{ のペル表現 (周期 1 の場合)}$$

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{n-1} & k^n + \alpha \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^{n-2} & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

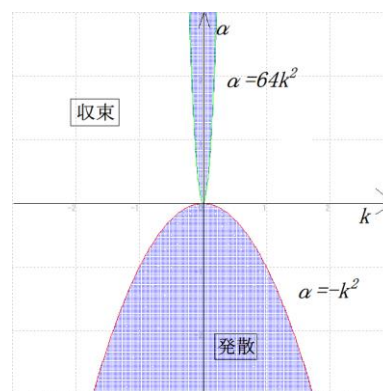
ただし, $x_0 = 1, y_0 = 0$ とする.

($p = n, n^2$) について, n 次ペル方程式の解となっているという定理を得た. それは, ペル表現の規則性から 5 乗根以上でも成り立つことが自然に予想される.

定理. $n \geq 3$ のとき, $\sqrt[n]{k^n + 1}$ の周期 1 と周期 2 のペル表現から得られる全ての (x_r, y_r) は, どちらもペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1 \text{ mod } p$ の解である. ここで, $p = n, n^2$ である.

さらに, 周期 3 についても 3 乗根と 4 乗根に関する同様な結果を得ることもできた.

一方, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現に関し, (k, α) を自然数ではなく, 実数として扱う研究も行っている. つまり, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現から得られる近似小数 $t_r = x_r / y_r$ を関数 $t_r = f(k, \alpha)$ と考え, t_r の発散と収束をもたらす領域 (k, α) はどのようなものであるかといった研究を行った. コンピュータによる数値計算結果ではあるが, 特に発散と収束の境界が $\alpha = Ak^n$ (A は定数) ではないかという興味深い結果を得た.



(図) 周期 1 の $t_r = f_2(k, \alpha)$ の様子

1. 研究の動機と目的および研究計画

ペル方程式は連分数展開で解くことができるという定理がある ([1] 参照). ペル方程式とは $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ (D は平方数でない自然数) という形の不定方程式である. この方程式の解法は, 1766 年に Lagrange が示したものが有名で, $\sqrt{D}$ の周期的な正則連分数から得られる近似分数に関係することが分かっている. 一方, $\sqrt{D}$ の連分数は周期性を持っているが, $n \geq 3$ の $\sqrt[n]{D}$ は従来の連分数展開では周期性を持たない. さらに, Thue の定理より $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の解は高々有限個しかないことも分かっている. このようなことから, $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の解の理論は一見意味がないと考えがちである. しかし, 私たちは従来の考え方を捨て, 3 乗根以上の通常とは異なる連分数で周期性を持つようなものが構成できれば, n 次ペル方程式を別な視点から研究することで, 新しい理論を構築できるのではないかと考え, その研究計画を立てた (表 1).

表 1: 研究計画と実施年度

(1)	$\sqrt[n]{D}$ でも周期性を持つような新しい連分数展開法と, 近似分数列を構成する.	平成 24 年度
(2)	$\sqrt[n]{D}$ の近似分数列と n 次ペル方程式との関係を詳細に研究する.	平成 25 年度
(3)	正則という言葉 키워ドに, $\sqrt[n]{D}$ の新たな連分数展開について研究し, その結果から n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の新しい理論を構築する.	平成 26 年度

研究計画の (1) は一昨年 (平成 24 年度) 行った. そして, 私たちは, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ (k, α は任意の自然数で $0 \leq \alpha \leq k$) という形の n 乗根に関する連分数展開の新しい展開方法の構築に成功した. この展開法から得られる新しい形の連分数は, 周期性というよりもフラクタル性という言葉で表現した方が適切であったため, n 次フラクタル連分数と呼ぶことにした. 更に, フラクタル連分数から, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列が得られる行列表現 (n 次ペル表現と呼んでいる) を構成した. 以上の研究の成果が認められ, JSEC2012 では佳作を受賞した.

研究計画の (2) は昨年 (平成 25 年度) に行った. 上記した通り, 2 次ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解法は $\sqrt{D}$ の近似分数に関係することが分かっている. したがって, 私たちが構成した n 次ペル表現から得られる近似分数は, n 次ペル方程式に何らかの関係があると思い研究に着手した. まず私たちは, n 次ペル表現から得られる $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数 x_r/y_r (ただし, $x_0 = 1, y_0 = 0$) から $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n$ を定義した. そして u_r をペル関数と呼び, その詳細な研究を行った. 特に, $\alpha = 1$ の場合に関しては, 2 次ペル方程式 $x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2 = \pm 1$ の多くの解を, Lagrange の解法より高速に見つけられる成果が得られた. n 次の場合は Thue の定理より $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の解は高々有限個しかないことが分かっている. そこで, 私たちは n 次ペル方程式に関しては mod m の世界での研究を行った. その結果, 私たちが目指す新しい n 次ペル方程式の理論構築に関する有益ないくつかの手がかりを得ることができた. 私たちはこれらの研究から JSEC2013 の最終選考会で優等賞を受賞した.

研究計画の (3) は今年度行った. 昨年の研究結果の問題点を改善し, 当初目指していたペル方程式の理論の構築に, より近づいてきた. 今年度, 私たちはまず, ペル方程式と関係のある正則連分数という言葉に着目し, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 2 や 3 をもつ正則フラクタル連分数展開を構築した. そして, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の正則フラクタル連分数展開から $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列が得られる行列表現を構成し, n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の新しい理論を研究した.

2. フラクタル連分数とペル表現の定義, および主結果

D を $k^2 + \alpha$ とおくと, $\sqrt{k^2 + \alpha} = k + \frac{\alpha}{2k + \frac{\alpha}{2k + \dots}}$ と連分数展開される. これを,

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim [k, \frac{\alpha}{2k + (*)}]$$

と書く. ここで, $(*)$ は $\frac{\alpha}{2k + (*)}$ が入れ子状になっていくことを意味する. この連分数から $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の一つの分数列 x_r/y_r を作ると, それは,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる. 私たちは, これを $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現と呼んだ. そして, 重要な結果として, $x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$ が得られた. つまり, $\alpha = 1$ なら, (x_r, y_r) はペル方程式の解となっているのである. このことから $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現が構成できれば, n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の理論が構築できるのではと考えた.

一般に $\sqrt[n]{D}$ について $D = k^n + \alpha$ とおいて, $t = \sqrt[n]{k^n + \alpha}$ を,

$$t = k + \frac{\alpha}{k^{n-1} + k^{n-2}t + \dots + t^{n-1}}$$

と変形する. 右辺に現れる t に再び, 右辺全体を入れていけば, 新しいタイプの連分数が得られる. これを私たちは $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 1 のフラクタル連分数と呼んだ.

例えば, $\sqrt[3]{3}$ の周期 1 のフラクタル連分数は, 私達の連分数展開を用いると,

$$\sqrt[3]{3} = 1 + \frac{2}{3 + 3 \left[\frac{2}{3 + 3 \left(\frac{2}{3 \dots} \right) + \left(\frac{2}{3 \dots} \right)^2} \right] + \left[\frac{2}{3 + 3 \left(\frac{2}{3 \dots} \right) + \left(\frac{2}{3 \dots} \right)^2} \right]^2}$$

となり, これを私たちの表記では,

$$\sqrt[3]{3} \sim [1, \frac{2}{3 + 3(*) + (*)^2}]$$

と表す. 一般に, 3 乗根 $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$, 4 乗根 $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ と n 乗根 $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 1 のフラクタル連分数は, 私たちの記号で表すと,

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[k, \frac{\alpha}{3k^2 + 3k(*) + (*)^2} \right], \quad \sqrt[4]{k^4 + \alpha} \sim \left[k, \frac{\alpha}{4k^3 + 6k^2(*) + 4k(*)^2 + (*)^3} \right],$$

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \frac{\alpha}{{}_nC_1 + {}_nC_2(*) + {}_nC_3(*)^2 + \dots + {}_nC_{n-1}(*)^{n-1} + (*)^n} \right]$$

となる. そして, これから, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの分数列 x_r/y_r を作るためのペル表現が得られる. それが以下である.

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{n-1} & k^n + \alpha \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^{n-2} & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

私たちの主結果を以下に列挙する.

定理 1. $\sqrt{k^2 + 1}$ の周期 1 のペル表現から得られる (x_r, y_r) はペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解である. さらに, $\sqrt{(k+1)^2 - 1}$ は $\sqrt{(k+1)^2 - 1} \sim [k, \frac{1}{1 + \frac{1}{2k+(*)}}]$ と周期 2 の正則連分数展開を持ち, このとき, ペル表現は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 - 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, そして, (x_r, y_r) はペル方程式 $x^2 - \{(k+1)^2 - 1\}y^2 = \pm 1$ の解となる.

定理 2. $n \geq 3$ のとき, $\sqrt[n]{k^n + 1}$ の周期 1 のペル表現(2.1)から得られる (x_r, y_r) は, ペル方程式 $x^n - (k^n + 1)y^n = \pm 1 \pmod{p}$ の解である. ここで, $p = n, \quad n^2$ である.

定理 3. $n \geq 3$ のとき, $\sqrt[n]{(k+1)^n - 1}$ は,

$$\sqrt[n]{(k+1)^n - 1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{{}_nC_1 + {}_nC_2(*) + {}_nC_3(*)^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}(*)^{n-1} + (*)^n}} \right]$$

と周期 2 の正則フラクタル連分数展開を持ち, このとき, ペル表現は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{n-1} & (k+1)^n - 1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{n-2} & (k+1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, そして, (x_r, y_r) はペル方程式 $x^n - \{(k+1)^n - 1\}y^n = \pm 1 \pmod{p}$ の解である. ここで, $p = n, \quad n^2$ である.

(注意) 定理 2 と 3 について, $n \geq 5$ の場合は予想である. また, フラクタル連分数が周期 3 である $\sqrt[n]{(k+1)^n + 1}$ ($n=3, 4$) に関する結果も得ている (§ 4.3 参照).

3. 周期 1 のフラクタル連分数とペル方程式について

3.1. 平方根の場合

まず, $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 1 の連分数展開を, n 乗根の周期的な新しい連分数展開を睨んで再構成し

ていく． $t = \sqrt{k^2 + \alpha}$ を $t = k + \frac{\alpha}{k+t}$ と変形し，この右辺の t に右辺全体である自分自身を代入することで，周期 1 をもつ $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の連分数が構築できる．すなわち，

$$\sqrt{k^2 + 1} = k + \frac{\alpha}{2k + \frac{\alpha}{2k + \ddots}}$$

となる．これを私たちは，

$$\sqrt{k^2 + 1} \sim \left[k, \frac{\alpha}{2k + (*)} \right]$$

と表す．ここで， $(*)$ は $\frac{\alpha}{2k + (*)}$ が入れ子状になっていくことを意味する．特に， $\alpha = 1$ のときを **正則連分数** という．したがって，この意味で周期 1 をもつ正則連分数展開は $\alpha = 1$ に限る．

次に，周期 1 をもつ $\sqrt{k^2 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = k + \frac{1}{k+t_{r-1}}$ ， $t_r = x_r/y_r$ とおいて整理することで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

となる．ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ を考えて，初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

命題 1. $\sqrt{k^2 + 1}$ のペル表現 (3.1) から得られる (x_r, y_r) は，2 次ペル方程式

$$x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2 = \pm 1$$

の解である．

証明 $u_r = x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2$ と置くと， $u_0 = 1$ であり， $u_r = -u_{r-1}$ が成り立つことから示される．

(証明終)

(注意) $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のペル表現は

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}$$

であり，これから得られる (x_r, y_r) は， $u_r = x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2$ と置くと， $u_0 = 1$ であり， $u_r = -\alpha u_{r-1}$ が成り立つ．すなわち， $x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$ が成り立つ．

3.2. n 乗根の場合

まず， $\sqrt[n]{k^3 + \alpha}$ の周期 1 の正則フラクタル連分数について考察する．これは， $t = \sqrt[n]{k^3 + \alpha}$ を

$$t = k + \frac{1}{A + B(t - k) + (t - k)^2} \quad (3.2)$$

と置いて， A, B を決定することで得られるものとした．(3.2) を整理すると，

$$t = \frac{kt^2 + (kB - 2k^2)t + k^3 - Bk^2 + Ak + 1}{t^2 + (B - 2k)t + k^2 - Bk + A} \quad (3.3)$$

を得る．(3.3) の分母を払い， $t^3 = k^3 + \alpha$ という形になるためには，

$$\alpha = 1, \quad A = 3k^2, \quad B = 3k$$

でなくてはならない。したがって、(3.2)は、

$$t = k + \frac{1}{3k^2 + 3k(t-k) + (t-k)^2} \quad (3.4)$$

と書け、これを、私たちは、

$$\sqrt[3]{k^3 + 1} \sim [k, \frac{1}{3k^2 + 3k(*) + (*)^2}]$$

と表す。ここで、(*)は $\frac{1}{3k^2 + 3k(*) + (*)^2}$ が入れ子状になっていくことを意味する。これが、私たちの考

えた $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ の周期 1 の正則フラクタル連分数である。

周期 1 の正則フラクタル連分数により、 $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は、(3.4) の t を $t_r = x_r/y_r$ と置いて漸化式にすることで、

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 + 1 \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

となる。特に、ペル方程式 $x^3 - Dy^3 = \pm 1$ を考えて、初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。これを、 $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ のペル表現という。

命題 2. $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ のペル表現(3.5)から得られる (x_r, y_r) は、3 次ペル方程式

$$x_r^3 - (k^3 + 1)y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である。ここで、 $p = 3, 9$ である。

証明 $u_r = x_r^3 - (k^3 + 1)y_r^3$ と置くと、 $u_0 = -1, u_1 = 9k^3 + 1,$

$$u_r = -u_{r-1}\{(x_{r-1} + ky_{r-1})^3 + (1 + k^3)y_{r-1}^3\}$$

であることを用いると証明できる。(証明終)

$\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ の周期 1 のフラクタル連分数についても、3 乗根の場合を拡張させてうまくいく。すなわち、周期 1 の場合は、 $t = \sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ を

$$t = k + \frac{1}{A + B(t-k) + C(t-k)^2 + (t-k)^3} \quad (3.6)$$

と置いて、 A, B, C を決定することで得られるものとする。これが $t^4 = k^4 + \alpha$ であるためには、

$$\alpha = 1, \quad A = 4k^3, \quad B = 6k^2, \quad C = 4k$$

でなくてはならない。これを、私たちは、

$$\sqrt[4]{k^4 + 1} \sim [k, \frac{1}{4k^3 + 6k^2(*) + 6k(*)^2 + (*)^3}]$$

と表す。そして $\sqrt[4]{k^4 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は、 $t_r = x_r/y_r$ と置くことで、

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 + 1 \\ 1 & k & k^2 & k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^3 \\ x_{r-1}^2 y_{r-1} \\ x_{r-1} y_{r-1}^2 \\ y_{r-1}^3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

となる．ペル方程式 $x^4 - Dy^4 = \pm 1$ を考えて，初期値を特に， $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．これを， $\sqrt[4]{k^4 + 1}$ のペル表現という．そして次が成り立つ．

命題 3. $\sqrt[4]{k^4 + 1}$ のペル表現(3.7)から得られる (x_r, y_r) は，4 次ペル方程式

$$x_r^4 - (k^4 + 1)y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 4, 16$ である．

証明 $u_r = x_r^4 - (k^4 + 1)y_r^4$ と置くと， $u_0 = -1$ ， $u_1 = 96k^8 + 16k^4 + 1$ ， $u_r = -u_{r-1}f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1})$ で， $f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) = 1 \pmod{p}$ であることから証明できる．（証明終）

（注意）実際には，

$$\begin{aligned} f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) &= x_{r-1}^8 + 4kx_{r-1}^7y_{r-1} + 10k^2x_{r-1}^6y_{r-1}^2 + 16k^3x_{r-1}^5y_{r-1}^3 + x_{r-1}^4y_{r-1}^4 + 20k^4x_{r-1}^4y_{r-1}^4 \\ &\quad + 4kx_{r-1}^3y_{r-1}^5 + 20k^5x_{r-1}^3y_{r-1}^5 + 4k^2x_{r-1}^2y_{r-1}^6 + 14k^6x_{r-1}^2y_{r-1}^6 \\ &\quad + 14k^6x_{r-1}^2y_{r-1}^6 + 4k^3x_{r-1}y_{r-1}^7 + 8k^7x_{r-1}y_{r-1}^7 + y_{r-1}^8 + 3k^4y_{r-1}^8 + 3k^8y_{r-1}^8 \end{aligned}$$

であり， $f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) = 1 \pmod{p}$ を示すことは容易ではなかった．

以上から， $n \geq 5$ についても定理 2 が成り立つことが予想されるが，コンピュータで $n = 7$ のときまでその現象が起こることを確認している．

4. 周期 2 のフラクタル連分数とペル方程式について

4.1. 平方根の場合

$t = \sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 2 の場合の連分数とペル表現についても n 乗根の周期的な新しい連分数展開を睨んで考える． $\alpha = 2k$ と置いて，さらに，

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (t - k)}}$$

と置くと， $t^2 = k^2 + 2k$ が成り立つ． $t^2 = (k + 1)^2 - 1$ と考えると，

$$\sqrt{(k + 1)^2 - 1} = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + \dots}}}}$$

と周期 2 の正則連分数が得られる．これを，私たちは，

$$\sqrt{(k+1)^2 - 1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (*)}} \right]$$

と表す．ここで， $(*)$ は $\frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (*)}}$ が入れ子状になっていくことを意味する．

上の周期 2 の正則連分数により $\sqrt{(k+1)^2 - 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は，

$$t_r = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (t_{r-1} - k)}}$$

$t_r = x_r/y_r$ と置いて整理することで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 - 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

から得られる．ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ を考えて，初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

命題 4. $\sqrt{(k+1)^2 - 1}$ のペル表現 (4.1) から得られる (x_r, y_r) は，2 次ペル方程式

$$x_r^2 - \{(k+1)^2 - 1\}y_r^2 = \pm 1$$

の解である．

証明 $u_r = x_r^2 - \{(k+1)^2 - 1\}y_r^2$ と置くと， $u_0 = 1$ であり， $u_r = -u_{r-1}$ が成り立ことから示される．（証明終）

4.2. n 乗根の場合

$\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の周期 2 の正則フラクタル連分数に関しては， $t = \sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ を

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{A + B(t-k) + (t-k)^2}} \quad (4.2)$$

と置いて， A, B を決定することで得られるものとした．(4.2) を整理したものが， $t^3 = k^3 + \alpha$ となるためには，

$$\alpha = 3k^2 + 3k, \quad A = 3k^2 + 3k, \quad B = 3k + 1$$

でなくてはならないことがわかる．したがって，(4.2) は，

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{(3k^2 + 3k) + (3k + 1)(t-k) + (t-k)^2}} \quad (4.3)$$

と書ける． $t^3 = k^3 + 3k^2 + 3k = (k+1)^3 - 1$ に注意して，これを，私たちは，

$$\sqrt[3]{(k+1)^3-1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{(3k^2+3k) + (3k+1)(*) + (*)^2}} \right]$$

と表す．周期 2 の正則フラクタル連分数により， $\sqrt[3]{(k+1)^3-1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = x_r/y_r$ と置くことで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3-1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

となる．特に，初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．これを， $\sqrt[3]{(k+1)^3-1}$ のペル表現という．

命題 5. $\sqrt[3]{(k+1)^3-1}$ のペル表現(4.4)から得られる (x_r, y_r) は，3 次ペル方程式

$$x_r^3 - \{(k+1)^3-1\}y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 3, 9$ である．

証明 周期 1 のペル表現の k を $k+1$ に置き換えたものが周期 2 のペル表現となっているため，命題 4 より証明される．（証明終）

$t = \sqrt[4]{k^4+\alpha}$ の場合の周期 2 の正則フラクタル連分数についても，

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{A+B(t-k)+C(t-k)^2+(t-k)^3}} \quad (4.5)$$

と置いて， A, B, C を決定することで得られるものとした．これが $t^4 = k^4 + \alpha$ であるためには，

$$\alpha = 4k^3 + 6k^2 + 6k, \quad A = 4k^3 + 6k^2 + 6k, \quad B = 6k^2 + 4k + 1, \quad C = 4k + 1$$

でなくてはならない． $t^4 = 4k^3 + 6k^2 + 6k = (k+1)^4 - 1$ に注意して，これを，私たちは，

$$\sqrt[4]{(k+1)^4-1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{(4k^3+6k^2+4k) + (6k^2+4k+1)(*) + (4k+1)(*)^2 + (*)^3}} \right]$$

と表す．そして $\sqrt[4]{(k+1)^4-1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = x_r/y_r$ と置くことで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & (k+1)^4-1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^3 \\ x_{r-1}^2 y_{r-1} \\ x_{r-1} y_{r-1}^2 \\ y_{r-1}^3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

となる．特に，初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．これを， $\sqrt[4]{(k+1)^4-1}$ のペル表現という．そして 3 乗根の場合と同様に，次が成り立つ．

命題 6. $\sqrt[4]{(k+1)^4 - 1}$ のペル表現 (4.6) から得られる (x_r, y_r) は, 4 次ペル方程式

$$x_r^4 - \{(k+1)^4 - 1\}y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である. ここで, $p = 4, 16$ である.

以上から, 周期 1 の場合と同様に, $n \geq 5$ についても定理 2 が成り立つことが予想される. そして, コンピュータで $n = 7$ のときまでその現象が起こることを確認している.

4.3. 周期 3 のフラクタル連分数とペル方程式について

枚数制限の関係で, 周期 3 については簡単に紹介する. $t = \sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 3 の場合の連分数も n 乗根の周期的な新しい連分数展開を睨んで考える. しかし, n 乗根のフラクタル連分数を構築する立場から考えて, 私たちの研究では, n 乗根の拡張のためには, 周期 3 においては正則とすることはあきらめるしかなかった. この場合は, $\alpha = 2k + 2$ とし,

$$t = k + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2k + (x - k)}}}$$

と置いた. このとき, $t^2 = k^2 + \alpha$ が成り立つ. つまり, $t = \sqrt{(k+1)^2 + 1}$ を,

$$\sqrt{(k+1)^2 + 1} \sim \left[k, \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2k + (*)}}} \right]$$

と表すことにした.

上の, 周期 3 の連分数により $\sqrt{(k+1)^2 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は, 周期 1 や 2 のときと同様に $t_r = x_r/y_r$ とおくことで,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 + 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

となる.

命題 7. $\sqrt{(k+1)^2 + 1}$ のペル表現 (4.7) から得られる (x_r, y_r) は, 2 次ペル方程式

$$x_r^2 - \{(k+1)^2 + 1\}y_r^2 = \pm 1$$

の解である.

$\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の周期 3 のフラクタル連分数に関しては, $\alpha = 3k^2 + 3k + 2$ である. つまり, $k^3 + \alpha = (k+1)^3 + 1$ となる. そして, $\sqrt[3]{(k+1)^3 + 1}$ フラクタル連分数は,

$$\sqrt[3]{(k+1)^3 + 1} \sim \left[k, \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3k^2 + 3k + (3k+1)(*) + (*)^2}}} \right]$$

となる．さらに， $\sqrt[3]{(k+1)^3+1}$ 近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3+1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

となる．そして，次の命題が成り立つ．

命題 8. $\sqrt[3]{(k+1)^3+1}$ のペル表現(4.8)から得られる (x_r, y_r) は，3 次ペル方程式

$$x_r^3 - \{(k+1)^3+1\}y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 3, 9$ である．

$\sqrt[4]{k^4+\alpha}$ の周期 3 のフラクタル連分数に関しては， $\alpha = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 2$ である．つまり， $k^4 + \alpha = (k+1)^4 + 1$ となる．そして， $\sqrt[4]{(k+1)^4+1}$ フラクタル連分数は，

$$\sqrt[4]{(k+1)^4+1} \sim \left[k, \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{(4k^3+6k^2+4k) + (6k^2+4k+1)(*) + (4k+1)(*)^2 + (*)^3}}} \right]$$

となる．さらに， $\sqrt[4]{(k+1)^4+1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = x_r/y_r$ と置くことで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & (k+1)^4+1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^3 \\ x_{r-1}^2 y_{r-1} \\ x_{r-1} y_{r-1}^2 \\ y_{r-1}^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となる．そして，次の命題が成り立つ．

命題 9. $\sqrt[4]{(k+1)^4+1}$ のペル表現(4.9)から得られる (x_r, y_r) は，4 次ペル方程式

$$x_r^4 - \{(k+1)^4+1\}y_r^4 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 4, 16$ である．

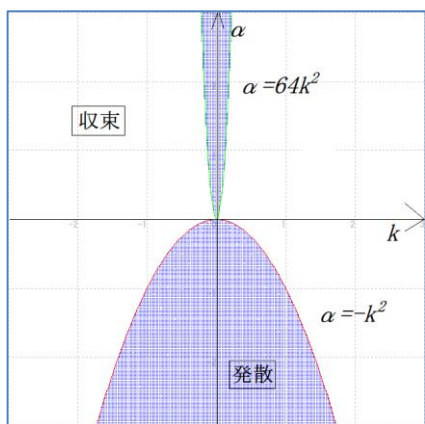
以上から， $n \geq 5$ についても命題 8 や命題 9 の拡張した命題が成り立つことを予想している．

5. ペル表現の収束と発散

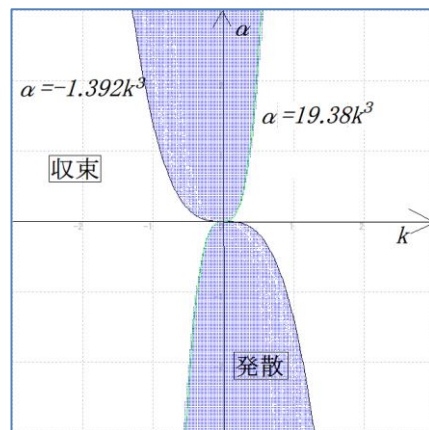
$\sqrt[n]{k^n+\alpha}$ の周期 1 のペル表現から得られる近似分数 x_r/y_r は，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{n-1} & k^n + \alpha \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^{n-2} & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ x_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

で与えられた. 私たちは, k と α が自然数ではなく実数であったとしたら, $t_r = x_r/y_r$ の値はいつ収束するのかについて興味を覚え, それについて研究した. すなわち, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現から得られる近似小数 t_r を関数 $t_r = f_n(k, \alpha)$ と考え, t_r の発散と収束をもたらす領域 (k, α) はどのようなものであるかといった研究をコンピュータによる数値計算で行った.



(図 1) 周期 1 の $t_r = f_2(k, \alpha)$ の様子



(図 2) 周期 1 の $t_r = f_3(k, \alpha)$ の様子

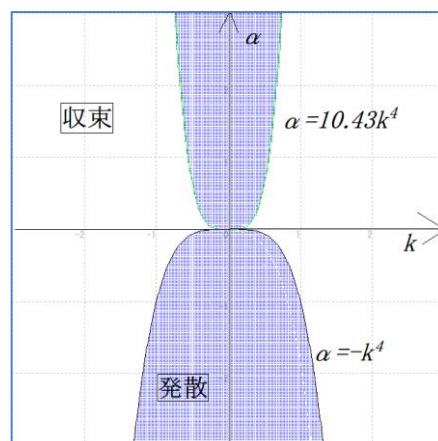
図 1 は $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現において, (k, α) の地点における t_r の収束と発散を示したもので, 網掛けが発散を表す. そして, 収束と発散の境界が, $\alpha = 64k^2$ と $\alpha = -k^2$ くらいではないかと考えている.

図 2 は $\sqrt[k^3]{k^3 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現において, (k, α) の地点における t_r の収束と発散を示したものである. そして, 収束と発散の境界が, $\alpha = 19.38k^3$ と $\alpha = -1.392k^3$ くらいではないかと考えている.

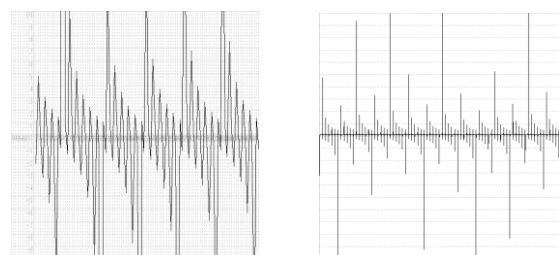
図 3 は $\sqrt[k^4]{k^4 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現において, (k, α) の地点における t_r の収束と発散を示したものである. そして, 収束と発散の境界が, $\alpha = 10.43k^4$ と $\alpha = -k^4$ くらいではないかと考えている.

いずれにせよ, 私達は, 発散と収束の境界線を与えるグラフの関数が, ある定数 A で $\alpha = Ak^n$ と書けるのではないかと考えている.

図 4 は $t_r = f_2(k, \alpha)$ の t_r の振動の状況である.



(図 3) 周期 1 の $t_r = f_4(k, \alpha)$ の様子



($k = 1, \alpha = -5$) ($k = -0.23, \alpha = -0.11$)
(図 4) 周期 1 の $t_r = f_2(k, \alpha)$ の振動グラフ

さて, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 2 と 3 のペル表現から得られる近似分数 x_r/y_r は, 定理 3 の形から

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{n-1} & (k+1)^n + \alpha \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{n-2} & (k+1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} x_{r-1}^{n-2} \\ x_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。そうすると、 t_r の発散と収束をもたらす領域 (k, α) は、周期1の場合のグラフを k 方向に -1 だけ平行移動したものとなり、この研究は周期1の場合に帰着される。

5. 今後の方向性

連分数とペル方程式の理論は2次体の整数論という方向に発展した ([4]参照)。しかし現在、3次体やそれ以上の n 次体の整数論といった研究は進んでいないように思える。それはそれに対応する連分数の理論がないと考えられるため、私たちのフラクタル連分数がこのような体の理論に少しでも貢献できたという思いがある。また、連分数の理論はその周期性から単一ニューロンモデルに応用されている ([2]参照)。さらに、N.Oku, K.Aihara[3]には、私たちが数値計算によって得た振動グラフ(図4)の類似が多くあげられている。私たちのフラクタル連分数もニューロンモデルなどへ何らかの影響を与えられるのではないかと考えている。そのためにも一般に周期 T のフラクタル連分数の理論を私たちに完成させたいと考えている。

参考文献

- [1] Joseph H. Silverman 『A FRIENDLY INTRODUCTION TO NUMBER THEORY』 Pearson International Edition, (1997)
- [2] 畑政義 『神経回路モデルのカオス』 朝倉書店, (1998)
- [3] N.Oku, K.Aihara(2012) 『Numerical Analysis of Transient and Periodic Dynamics in Single and Coupled Nagumo-Sato Models』 International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.22, No.6, 1230021(2012)
- [4] 武隈良一 『2次体の整数論』 槇書店 (1972)

n 次元ファレイ空間の結晶理論

赤松昌俊, 小林祐志(津山高専 3 年), 松田 修(津山高専)

1. はじめに

私達はファレイ数列の構成法と既約性に興味を持ち、ファレイ数列について調べていくなかで、“神経回路モデルのカオス” [1] という本に出会った。その本では、ファレイ数列を用いた単独ニューロンモデルの理論が書かれてあった。そして、実際の複雑な生命現象のモデル化へのファレイ数列によるアプローチはとても刺激的であった。私達はファレイ数列の理論の大きな可能性を感じたため、ファレイ数列の高次元理論を構築することで、将来の科学の数理基礎の一つを提示できるのではないかと考えた。以上のことから「**ファレイの既約分数理論を高次元化する**」これが私達の目標となった。

ファレイの既約分数理論とは 2 つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし、それらの分子同士、分母同士をそれぞれ足し算して次の既約分数をつくり、この操作をくり返して 0 と 1 の間のすべての既約分数を生み出すものである。より具体的には、ステップ 0 のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ とする。ステップ 1 のファレイ数列は $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ を加えた $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ である。ステップ 2 以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ、隣り合った 2 つの分数から新しい分数を上の演算で作っていく。したがって、ステップ 2 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ で、ステップ 3 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$ というようになる。そして、この操作を無限に繰り返すことで全ての既約分数が生まれるのである。

私達は、既約分数 $\frac{a}{b}$ ($a > 0, b > 0$) を、分数ではなく点 (a, b) と考えることで、その研究対象を n 個の自然数からなる既約点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に拡張した。この点を **n 次元ファレイ点** と呼び、 n 次元ファレイ点全体を **n 次元ファレイ空間** と呼んだ (§ 2 参照)。そして、ファレイの既約分数理論のような n 次元ファレイ点の理論構築と、それをもとにファレイ点の数学的構造を幾何学的に研究することを目標とした。

昨年度(平成 25 年度)は、 $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$ を初期値とし、3次元のファレイ理論研究を、重心分割というアイデアから行った (JSEC2013 佳作受賞)。つまり、重心分割から次々と得られる点をファレイ点とした。しかし、この定義からは最も重要な任意の既約点 (a, b) がファレイ点であることを証明することができなかった。今年度は、インターネットで見つけた S.Kim と S.Ostlund の論文[3]を読んでいく中で、ファレイの既約分数理論がフィボナッチ数列の並列化であるのではないかというアイデアを得て、この新しい観点から、これまでの研究を完全にリセットし、全く新しいファレイ空間の構造研究をスタートさせた。その結果、2次元ファレイ空間においては、 $(0,1)$ から**全てのファレイ点を生み出す行列を発見することに成功した**。そしてそれは、より一般的な n 次元ファレイ点においても、有限個のファレイ点からすべてのファレイ点を生み出す行列理論への拡張に繋がった。

この発見の後、私達が行ったファレイ空間の構造研究における主たる研究結果は、2次元では3つの点 $(0,1), (1,0), (1,1)$ から構成される**基本ファレイ原子**の存在の発見である。そしてその相似な原子で2次

元ファレイ空間は埋め尽くされていたのである。3次元では7つの点から構成される基本ファレイ原子が存在し、そしてその相似な原子で3次元ファレイ空間は埋め尽くされていた。私達にはそれがまるで結晶のように見えたため、それを研究タイトルとした。以下、これらの発見を中心にファレイ空間の結晶構造について詳しく論じていく。

2. n 次元ファレイ点の定義とこれまでの研究との比較

まず、私達が研究対象とする n 次元ファレイ点と、 n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ を定義する。

定義 1. 点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が n 次元ファレイ点とは、次の2つの条件を満たすものをいう。

① $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ ② $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_r) = 1$ (ただし、 $r \leq n$ で、 $a_j = 0$ であるものは含まない.)

定義 2. n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ とは、 n 次元ファレイ点全体のことをいう。

インターネットで論文を検索した結果、私達と同じように高次元ファレイ点を研究している論文が2つ見つかった。1つは、S. Kim と S. Ostlund の論文[3]で、もう一つは A. Nogueira と B. Sevenec 論文[2]である。[3]では、私達とは異なる変換行列を使って高次元ファレイ空間の構造の研究が行われていた。そして、彼らの定義した超黄金比により、ファレイ点列の収束が研究された。しかし、各次元での超黄金比の定義の複雑さと幾何学条件の制約などにより、5次元までの議論で終わっていた。[2]は特殊線形群 $SL(n, \mathbf{Z}_+)$ の立場から高次元ファレイ数列を論じたものであるが、こちらも詳細は3次元までの一部の議論で終わっているように見えた。以下で詳しく論じることになるが、私達は n 次元ファレイ空間を、フィボナッチ数列や、その類似な数列の並列空間と見て、その構造を研究することに取り組み、高次元への拡張にある意味で成功したのである。

3. 2次元ファレイ点の生成行列とフィボナッチ数列

2次元ファレイ点について論じる。以下ファレイ点を縦ベクトルで表記する。通常ファレイ数列を観察すると $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$ という系列が見つかる。これはフィボナッチ数列であ

る。一方、フィボナッチ数列は行列 $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いることで、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

というようにすべてのフィボナッチ数が生み出されることが知られている。この行列 G をうまく利用すれば、全ての2次元ファレイ点を生み出す理論が得られるかもしれないと考えた。

定義 3. 変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値 $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、次の2つの操作のどちらかを行う。

$$\textcircled{1} f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto G \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto G \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'_n| \\ |b'_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

(注意) $F^{-1}: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ は, 次の操作 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto G^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a_1| \\ |b_1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ を意味する.

私達の研究の立場は, “2次元ファレイ空間はフィボナッチ数列の並列化である” というものである. 以下にそのことを説明する.

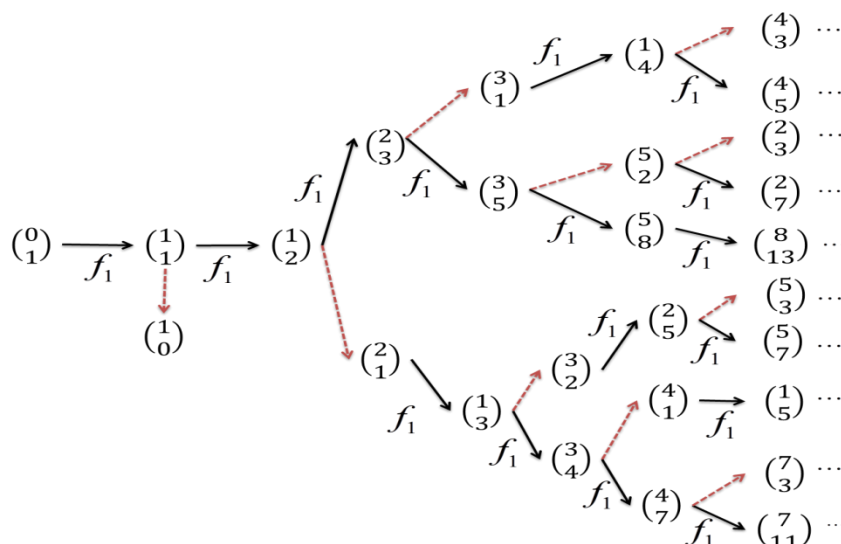


図1 (変換 F から生み出される 2次元ファレイ空間)

図1の f_1 の矢印を追っていくと, ファレイ点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の数 a, b はどちらも次第に大きくなっているように見える. しかし, G がフィボナッチ数列を生み出す行列であることから, f_1 から得られる系列のファレイ数列 $\frac{a_n}{b_n}$ は黄金比に収束しているはずである. まず, G の固有多項式を求めると, $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ である. そして, 固有値は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である. $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とおき, これを**黄金比**と呼ぶ. そして, 以下が成り立つ.

命題1. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をファレイ点とし, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = G^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \varphi$ となる.

(証明) $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ をフィボナッチ数列とすると, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{F_n a + F_{n-1} b}{F_{n-1} a + F_{n-2} b} = \frac{(F_n / F_{n-1}) a + b}{a + (F_{n-2} / F_{n-1}) b}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$ であ

ることから示される. (証明終)

G の最大固有値がファレイ点の比の収束値に関係するという上の命題1は, 3次元以上を研究するうえで大きな手がかりになった.

4. 変換 F から生み出されるファレイ空間

私達は、図 1 から、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からすべての 2 次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した。

主結果 1. 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ の任意のファレイ点は、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生み出される。逆にいえば、任意のファレイ点は有限回の操作 F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される。

(証明) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換されることを示す。①ある k が存在し $a < b < ka$ とすると

$$F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}, F^{-1}\begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-2a \\ b-a \end{pmatrix}, F^{-1}\begin{pmatrix} b-2a \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-2a \end{pmatrix},$$

$$F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-3a \\ a \end{pmatrix}, \dots, F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b-(k-2)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-(k-1)a \\ a \end{pmatrix}.$$

$a' = b - (k-1)a$, $b' = a$ とおくと $a > a'$, $b > b'$ かつ $b' > a'$ が成り立つ。これは F^{-1} を繰り返すことで $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換されることを示す。② $b \leq a$ を仮定すると、 $F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}$ で $b-a < a$ であるので①に帰着する。既約性に関しては初等的な整数論を使えば証明できる。(証明終)

5. 2 次元のファレイ原子と結晶構造について

主結果 1 の変換の様子を詳細に研究した結果、ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は、操作 F によって右の図のような三角形に分割された構造を持つことがわかった。

右図における棒矢印は f_1 、点線矢印は f_2 を表す。

これに関して私達は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

というように 3 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が連結ループ構造をもつ

ことを発見した。この 3 点連結ループ構造を**ファレイ原子**と呼ぶ。そして、すべてのファレイ点においてファレイ原子が構成されていた。これが主結果 2 である。主結果 2 を定式化すると以下ようになる。

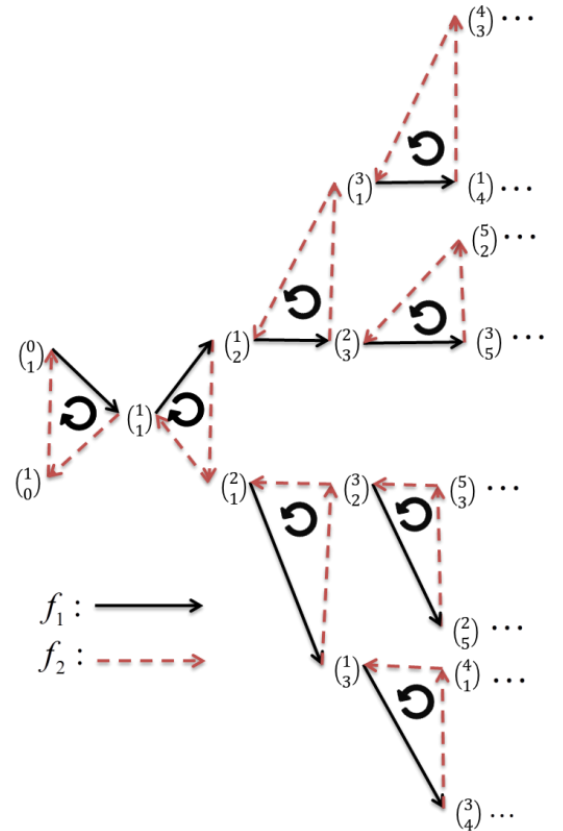


図 2 (2 次元ファレイ原子と結晶構造)

主結果 2. (ファレイ結晶構造定理)

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を任意のファレイ数とすると,

$$(f_2 \circ f_2 \circ f_1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \left(\text{ただし} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

すなわち, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ が連結なループ構造を作る.

(注意) 特に, ファレイ原子 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を **基本ファレイ原子** と呼ぶ. 実は基本ファレイ原子だけは F^{-1}

でループする. つまり, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっている.

6. ファレイ原子のインデックス

主結果 2 より, 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は, 3 点からなるファレイ原子が繰り返しパターンで配置されていることがわかる. そしてファレイ原子である 3 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ により, ファレイ原子を特徴づける以下の主結果 3 を発見した.

主結果 3. ファレイ原子を構成する 3 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ をベクトルとして足すと,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = 2(a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

定義 4. ファレイ原子 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ に対して $a+b$ をファレイ原子の **インデックス** という.

(図 3 参照)

私達は, 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ のファレイ原子配置をインデックスだけに着目し, インデックス構造を研究した. 下の図 5 がインデックス構造であり, これを **インデックストツリー** と名付けた.

主結果 4. インデックストツリーはファレイツリーと類似の構造をもつ. (図 4, 5 参照)

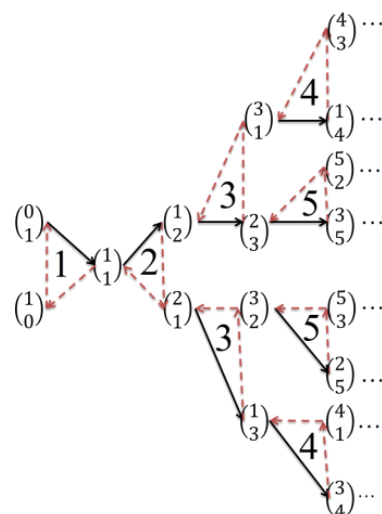


図 3 (ファレイ原子のインデックス)

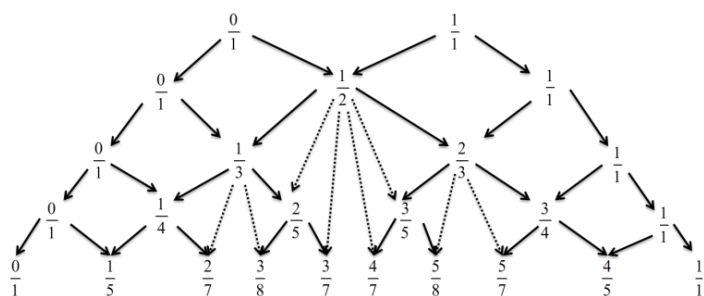


図 4 (ファレイツリー)

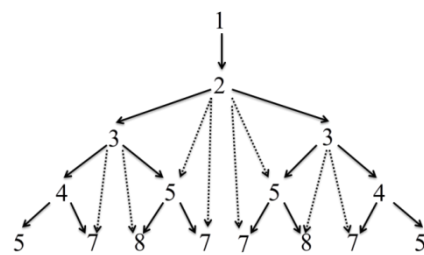


図 5 (インデックストリー)

主結果 4 が主張していることは、例えば、インデックストリーの 4 段目の 5 は 3 段目の 3 と 2 段目の 2 の和として得られる．例えば 5 段目の数 8 は 3 段目の 3 と 4 段目の 5 から得られるといった仕組みである．さらに、インデックストリーの 2 段目以下から 3 点和をとり、それを **2nd-インデックス**と呼んで構造を調べた．それが以下の図 6 である．

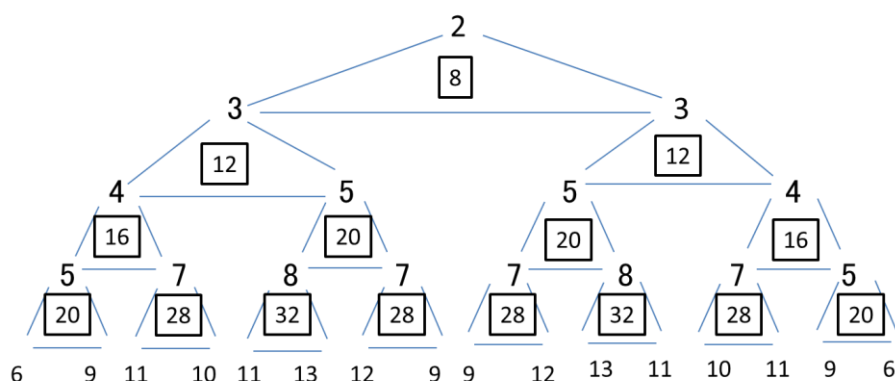


図 6 (2nd-インデックストリー)

2nd-インデックストリーもまたファレイツリーと類似の構造をもつ．同様の操作を繰り返すと、 r th-インデックストリーが構成される． r th-インデックストリーが常に同じ構造をもつことを主張するために、私達は次の主結果 5 を発見し証明した．

主結果 5. p を奇素数とする．このとき r th-インデックストリーを $\text{mod } p$ で構成すると r は $\frac{p-1}{2}$ で周期する．

(証明) フェルマーの小定理を使う．(証明終)

主結果 5 は、具体的に $p=5$ の場合では以下の図 7 のようになる．

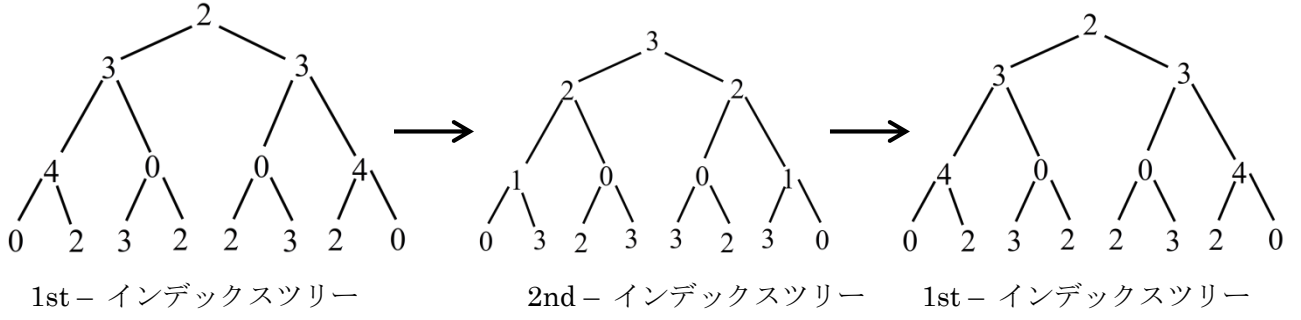


図 7 (mod 5 の場合の周期の状況)

(注意) 主結果 5 は最低周期を与えるものではない. 例えば, $p=17$ のときは周期が 4 であるが, 周期公式からは周期 8 となる.

7. 3 次元ファレイ空間の結晶構造について

3 次元においては, ファレイ点の生成行列を $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, 以下の変換 F を定義する.

定義 5. 変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値: $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は, 次の 4 つの操作のいずれかを行う.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \textcircled{2} \quad f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \textcircled{3} \quad f_3: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \textcircled{4} \quad f_4: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} -a_n \\ -b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は, 生成行列 G によりフィボナッチ数列の並列化としてとらえられた. そして, 3 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_3$ も G により, ある数列の並列化になっていることを問題とし, 2 次元と同様な考察を行った. まず, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めると, $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ である. そして,

これは 3 つの異なる実数の固有値を持つが, 1 以上固有値は 1 つしかないため, これを φ_3 とおいて, 3 次黄金比と名付けた. これにより, 私達は命題 1 と類似の結果を得た.

命題 2. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をファレイ点とし $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = G^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \varphi_3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \varphi_3 - 1$ となる.

(証明) $a_n = c_{n-1}$, $b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$, $c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$ より, $c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2} - c_{n-3}$ が得られることから示される. (証明終)

私達は, 2次元のときと同様に, 操作 F を繰り返すことで, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からすべての 3次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した. そして, 次の主結果を得た.

主結果 6. 3次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_3$ の任意のファレイ点は, 操作 F を繰り返すことで, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生み出される. 逆にいえば, 任意のファレイ点は有限回の操作 F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される.

(証明) 主結果 1 と同様の議論で示される. (証明終)

さて, 3次元においてもファレイ原子は存在するのだろうか. これが私達の次なるテーマとなった. コンピュータで調べた結果, すぐに

わかったことは 7 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が F^{-1} で連結さ

れ, ループ構造を形成していたことである. そして, 私達は 2次元における主結果 2 と同様なファレイ結晶構造があることを期待した. 実際コンピュータでの計算結果はいつも肯定的であった. そして次の主結果 7 を証明した. 主結果 7 より上の 7 点の連結ループ構造は, 基本的であるため, これを基本ファレイ原子と呼ぶことにした.

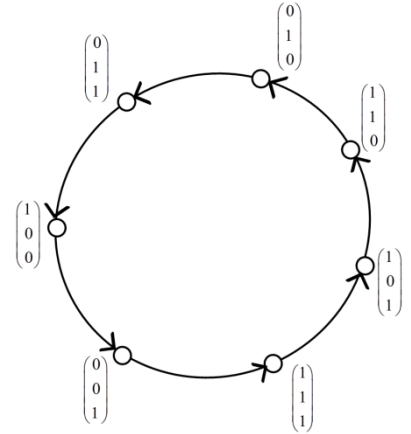


図 8 (7 点の基本ファレイ原子)

主結果 7. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を任意の 3次元ファレイ点とすると, それを含む連結なループ構造が存在し, それは最低 7 点で構成される.

(証明) $F: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ とすると, a', b', c' はどれも a と b と c の和か差で得られることから偶奇性だけ

は保存される. よって,

$$\begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \\ \text{偶} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{偶} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{奇} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{奇} \\ \text{偶} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \\ \text{偶} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \\ \text{奇} \end{pmatrix}$$

となり, 最低 7 回の変換 F をほどこさないとループにはなり得ないことがわかる. 存在性については, 以下のループがある.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} c \\ b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3} \begin{pmatrix} a+b+c \\ a \\ a+c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+c \\ a-b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} a-b \\ a+b+c \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4} \begin{pmatrix} b \\ a+c \\ b-c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4} \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

これにより主結果 7 は証明された. (証明終)

しかし, 3 次元ファレイ空間の構造は, 図 9 のように, 非常に複雑であった. そこで, 以下を定義した.

定義 6. ループとなる 7 点 $\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$ ($1 \leq j \leq 7$) に対して, $\sum_{j=1}^7 \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = 4e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる自然数 e が存在したとき, そのループを**ファレイ原子**と呼び, e をファレイ原子の**インデックス**という.

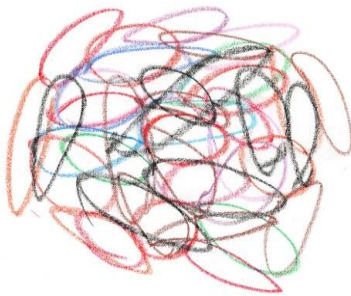


図 9 (ループ構造)

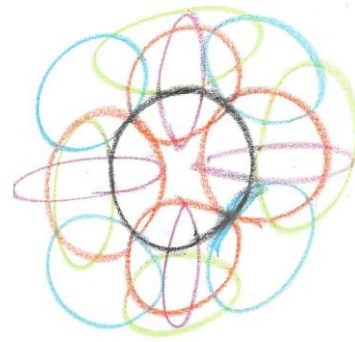


図 10 (ファレイ原子のループ構造)

定義 6 によって, ファレイ原子のループ構造は, 少し複雑さが減少した感があったが, インデックス構造が明確になるようには思えなかった. この問題を解決するために, 以下の AK 条件を考えた.

AK条件：インデックス e をもつファレイ原子の全てのファレイ点についてその成分の値は e 以下である。

定義 7. ルAK条件を満たすファレイ原子を **very good なファレイ原子**（またはAK-ファレイ原子）と呼ぶ。

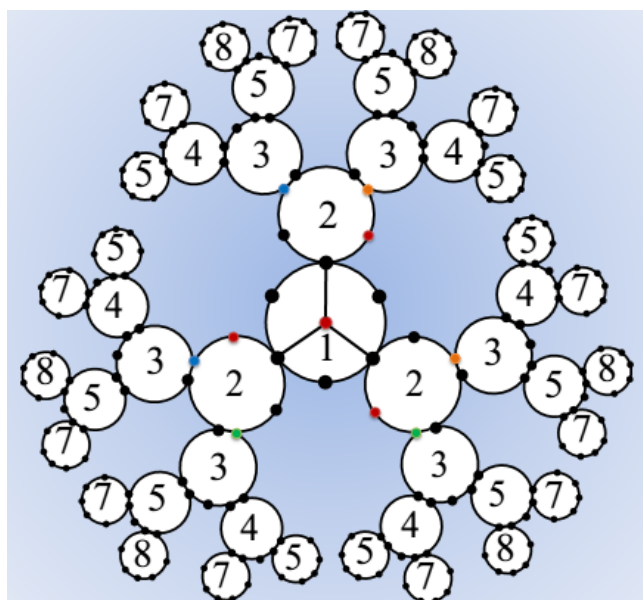


図 11 (very good なファレイ原子のインデックス構造)

コンピュータによる計算結果ではあるが、私達は次の予想を得ている。

主結果 8 (予想) .

- (1) 2つの very good なファレイ原子が交わるなら、それは2点である。
- (2) very good なファレイ原子全体から得られるインデックス構造は、ファレイツリーと同じ構造をもつ。
- (3) very good なファレイ原子全体は、3次元ファレイ空間である。

8. n 次元ファレイ空間の結晶構造

2次元と3次元の研究から、 n 次元ファレイ点の生成行列を以下の右下三角行列とする。

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

G_n の固有多項式は, $\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha} = 0$ である. ここで, $\alpha = 2k$ のときは $a_{\alpha} = \delta \cdot {}_{n-k}C_k$, $\alpha = 2k+1$ のときは $a_{\alpha} = \delta \cdot {}_{n-1-k}C_k$ である. δ は $n-k \equiv 1, 2 \pmod{4}$ のとき -1 , $n-k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ のとき $+1$ である. たとえば, $n=4$ のときは $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $n=5$ のときは $\lambda^5 - 3\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, $n=6$ のときは $\lambda^6 - 3\lambda^5 - 6\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ となる.

さて, G_n の固有多項式から得られる固有値はすべて実数であり, かつ 1 以上の固有値は 1 つだけしかない. それを φ_n とおき, n 次黄金比と呼ぶ. 以下の命題 3 は命題 1 や命題 2 と同様な方法で証明することができた.

命題 3. $\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ を任意の n 次ファレイ数とし, $\begin{pmatrix} a_m^1 \\ \vdots \\ a_m^n \end{pmatrix} = G^m \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ とすると, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m^n}{a_m^1} = \varphi_n$ となる.
--

4 次元以上のファレイ空間を研究すると, 3 次元以下とは異なる状況が起こっていた. 9 次元まで調査した結果, 基本ファレイ原子は必ず 1 つではなかった. そして, 各基本ファレイ原子によって, ファレイ空間はクラスに分割される場合があるように見えた. このことを, もう少し詳しく述べよう. n 次元

ファレイ空間においても変換 F は, $\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ の a^j の係数を $+1$ か -1 に置き換えて, G を作用させ, 得られ

たものの絶対値をとるものとする. このとき, 主結果 1 や主結果 6 と同様に, ある k が存在し,

$$(F^{-1})^k \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \text{ とすると, } a^1 > b^1, \dots, a^n > b^n \text{ となり, 最終的に } a^j = 0, 1 \text{ となる. このような } 0 \text{ と } 1 \text{ から}$$

なる n 次元ファレイ数は基本的なものと言える. そして, その中から基本ファレイ原子の構造が決ま

る. このことから 4 次元ファレイ空間を調査すると, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という 2 つの 7 点からなる基本ファレイ原子と, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 点からなる基

本ファレイ原子が存在した. これは 4 次元ファレイ空間が 3 つのクラスに分割されることを意味した. 以下が 9 次元までのファレイ空間の構造である.

表 1 (n 次元ファレイ空間のクラスと基本ファレイ原子)

次元	基本ファレイ原子の構成点の数	クラスの数
2	3	1
3	7	1
4	7	2
	1	1
5	31	1
6	63	1
7	15	8
	3	2
	1	1
8	15	16
	5	3
9	511	1

n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ の結晶構造の今後の研究課題

- ① クラス数が 2 以上になる空間は何次元か.
- ② 各クラスの基本ファレイ原子は結晶構造にどのように影響しているか.
- ③ 2 次元のインデックスツリーのような構造が高次元でも存在するか.

参考文献

- [1] 畑正義, 神経回路モデルのカオス, 朝倉書店,(1998)
- [2] Arnaldo Nogueira , Bruno Sevennec, Multidimensional Farey partitions, Indagationes Mathematicae Volume17, 2006
- [3] Seung-hwan Kim, Stellan Ostlund, Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems, Physical Review A Volume 34, Number 4, 1986

小収縮を持つファノ多様体について

東海大学・理学部数学科 月岡 透

1 ファノ多様体と小収縮

非特異ファノ多様体¹は3次元以下では完全に分類されている。ピカール数が2以上のファノ多様体の分類には端射線収縮の理論が有効である([5])が、4次元以上の固有の現象として、例外集合の余次元が2以上の双有理射、いわゆる小収縮の存在がある。したがって、小収縮を持つファノ多様体を調べることは興味深い。実際、ピカール数の上限問題においても重要である([2]を参照)。まず、いくつかの例を挙げる：

(例1) $X := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1)^{\oplus 2})$ の負切断を1点につぶす双有理射 $\varphi: X \rightarrow Z$ は小収縮である。 Z は1点を頂点とする $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$ 上の錐なので、ベロネーゼ埋め込みにより、 Z の定義方程式も記述できる。

(例2) $\mathbb{P}^n$ の $(n-2)$ 平面 P とその中の2次超曲面 $Q \subset P \simeq \mathbb{P}^{n-2}$ を考える。 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ を Q にそったブローアップとし、 $P' := \pi_*^{-1}P$ とすれば、 $N_{P'/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1)^{\oplus 2}$ となる。簡単な考察により、 P' を1点につぶす双有理射 $\varphi: X \rightarrow Z$ の存在が分かる(問題： Z の定義方程式を求めよ)。

(例3) $\mathbb{P}^n$ の $n+1$ 個の点

$$p_0 = (1:0:\cdots:0), p_1 = (0:1:\cdots:0), \dots, p_n = (0:0:\cdots:1)$$

を考える。 ℓ_{ij} を p_i と p_j を通る直線とする ($0 \leq i < j \leq n$)。 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^n$ を $p_0, p_1, \dots, p_n$ でのブローアップとし、 $C_{ij} := \pi_*^{-1}\ell_{ij}$ とおく。すべての C_{ij} に沿ってフリップ(の逆変換)を施した多様体を X とし、 C_{ij} に対応する部分を P_{ij} とおく。すると、 $N_{P_{ij}/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1)^{\oplus 2}$ となり、各 P_{ij} ($0 \leq i < j \leq n$) を1点につぶす双有理射 $\varphi: X \rightarrow Z$ の存在が示される(問題： Z の定義方程式を求めよ)。

このように小収縮はさまざまな形で現れる。次節では、ブローアップによる構成([3]を参照)について復習する。

¹本稿では、代数多様体は複素数体上定義されているとする。

2 小収縮の構成例

小収縮を作る方法はいくつかあるが、曲線と曲面のブローアップによる構成法 ([3] Example 2.6) についてまとめる。曲面ではなく余次元 2 の部分多様体を考えることにより、4 次元以上の一般次元で、小収縮を構成できる。まず記号と仮定を整理する：

- Y : 非特異 n 次元射影多様体 ($n \geq 4$)
- C : Y 上の非特異曲線
- S : Y の余次元 2 の非特異部分多様体
- C と S は 1 点で横断的に交わるとする (2 点以上で交わってもよいが、簡単のためこのように仮定する)
- $y_0 := C \cap S$
- $\pi : X \rightarrow Y$: C にそったブローアップ
- $E := \text{Exc}(\pi)$
- $E_0 := \pi^{-1}(y_0)$
- $e_0 : E_0 \simeq \mathbb{P}^{n-2}$ の直線
- $S' : \pi$ による S の狭義変換
- $\beta : \tilde{X} \rightarrow X$: S' にそったブローアップ
- $F := \text{Exc}(\beta)$
- $\tilde{E} := \beta^* E$
- $\tilde{E}_0 : \beta$ による E_0 の狭義変換
- $\tilde{e}_0 : \beta$ による $e_0 \not\subset S'$ の狭義変換
- $f : \mathbb{P}^1$ 束 $\beta|_F : F \rightarrow S'$ のファイバー

ここで、 $\pi|_{S'} : S' \rightarrow S$ は点 y_0 でのブローアップであることに注意する。また、 $\pi|_E : E \rightarrow C$ は $\mathbb{P}^{n-2}$ 束であり、 $\beta|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow E$ は $S' \cap E = S' \cap E_0 \simeq \mathbb{P}^{n-3}$ にそったブローアップであることに注意する。したがって、 $N_{E_0/E} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}$ であるが、 $N_{\tilde{E}_0/\tilde{E}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1)$ である。これより、

$$N_{\tilde{E}_0/\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1)$$

が分かる。端射線 $\mathbb{R}^+[\tilde{e}_0] \subset \overline{\text{NE}}(\tilde{X})$ は、 $\tilde{E}_0 \simeq \mathbb{P}^{n-2}$ を 1 点につぶす小収縮に対応する。端射線 $\mathbb{R}^+[f] \subset \overline{\text{NE}}(\tilde{X})$ は、 $\beta : \tilde{X} \rightarrow X$ を定める。

上記の構成法において、 Y は射影多様体であればどのようなものでもよいので、 $\tilde{X}$ がファノ多様体になるのはまれである。たとえば、 Y として標準因子 K_Y がネフとなる多様体を考えれば、

$$-K_{\tilde{X}} = (\beta \circ \pi)^*(-K_Y) - (n-2)\tilde{E} - F$$

は豊富になり得ない。また、 Y がファノ多様体であっても、 $\tilde{X}$ はファノ多様体になるとは限らない（むしろ稀である）。たとえば、 $n \geq 5$ とし、 $Y = \mathbb{P}^n$ 、 C は 2 次曲線とする。このとき、 C と 2 点で交わり、 S には含まれない直線 ℓ を考え、 $\Gamma := (\pi \circ \beta)_*^{-1}\ell$ とすれば、

$$K_{\tilde{X}} \cdot \Gamma = K_Y \ell + (n-2)\tilde{E} \cdot \Gamma + F \cdot \Gamma \geq -(n+1) + 2(n-2) + 0 = n-5 \geq 0$$

となり、 $-K_{\tilde{X}}$ は豊富でない。したがって、どのような場合に $\tilde{X}$ がファノ多様体になるかを調べるのは意味がある。

実際に、 $\tilde{X}$ がファノになるような (Y, C, S) の例を挙げる：

- $Y = \mathbb{P}^n$ 、 C を直線、 S は (1,1) 完全交差（つまりふたつの超平面の完全交差）とする。 S は C と交わるが、 C を含まないとする。
- $Y = \mathbb{P}^n$ 、 C を直線、 S は (1,2) 完全交差（つまり超平面と 2 次超曲面の完全交差）とする。 S と C は 1 点で横断的に交わると仮定する。
- $Y = \mathbb{P}^n$ 、 C を直線、 S は (1,2) 完全交差とする。 S と C は 2 点で横断的に交わると仮定する。

以上については、[6] で $n = 4$ の場合を説明した（ $n \geq 4$ でも $\tilde{X}$ がファノになることの証明は同様）。最後の例では、 S と C が 2 点で交わっているので、例外集合はそれに応じてふたつの既約成分よりなる。このように、 $Y = \mathbb{P}^n$ の場合は様々な例が構成できる。次節では、 $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の場合を考察する。

3 $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の場合

前節の記号に加えて、以下のように定める：

- $Y := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ ($n \geq 4$)
- $p : Y \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$: 自然な射影
- $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$: 自然な射影
- $H := p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$
- $L := q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$
- $y_0 := ((0 : 1), (1 : 0 : \cdots : 0))$
- $C := p^{-1}(p(y_0))$
- $V := \{uX_0 + vX_1 = 0\} \subset Y$
- D : 線形系 $|aH + bL|$ の元 ($a \geq 1, b \geq 0$)
- $S := V \cap D$
- S は滑らかで、 y_0 において C と横断的に交わるとする (そのように D を選ぶ)。
- $\tilde{H} := (\pi \circ \beta)^* H$
- $\tilde{L} := (\pi \circ \beta)^* L$

制限射 $p|_V : V \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ は $\{X_0 = X_1 = 0\} \subset \mathbb{P}^{n-3}$ に沿ったブローアップであることに注意する。また、 Y_t を $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーとし、 $\tilde{X}_t := (\pi \circ \beta)^{-1}(Y_t)$ とおく。このとき、 $(\pi \circ \beta)|_{\tilde{X}_t} : \tilde{X}_t \rightarrow Y_t$ は点 $C \cap Y_t$ と部分多様体 $S \cap Y_t$ に沿ったブローアップである。任意の $n \geq 3$ について、 $\tilde{X}_t$ がファノ多様体であるための必要十分条件は、 $1 \leq a \leq n-1$ である ([1])。一方、全空間 $\tilde{X}$ については、次元によらず次が成立：

命題： $n \geq 4$ とする。 $\tilde{X}$ がファノ多様体であることと次は同値：

$$(a, b) = (2, 0), (2, 1), (1, 0) \text{ または } (1, 1).$$

(証明の概略) ネフ錐 $Nef(\tilde{X})$ の構造は a, b により少しずつ異なる：

$$\begin{aligned} a = 1 \text{ かつ } b = 0 \text{ のとき、 } Nef(\tilde{X}) &= \mathbb{R}^+[\tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{H} - \tilde{E}, 2\tilde{H} + \tilde{L} - \tilde{E} - F] \\ a = 1 \text{ かつ } b \geq 1 \text{ のとき、 } Nef(\tilde{X}) &= \mathbb{R}^+[\tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{H} - \tilde{E}, 2\tilde{H} + b\tilde{L} - \tilde{E} - F] \\ a \geq 2 \text{ かつ } b = 0 \text{ のとき、 } Nef(\tilde{X}) &= \mathbb{R}^+[\tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{H} - \tilde{E}, a\tilde{H} + \tilde{L} - \tilde{E} - F] \\ a \geq 2 \text{ かつ } b \geq 1 \text{ のとき、 } Nef(\tilde{X}) &= \mathbb{R}^+[\tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{H} - \tilde{E}, a\tilde{H} + b\tilde{L} - \tilde{E} - F] \end{aligned}$$

一方、ブローアップの標準因子公式を繰り返し用いて、

$$K_{\tilde{X}} = \beta^* K_X + F = \beta^*(\pi^* K_Y + (n-2)E) + F$$

となる。 $-K_Y = nH + 2L$ に注意すれば、

$$-K_{\tilde{X}} = n\tilde{H} + 2\tilde{L} - (n-2)\tilde{E} - F$$

を得る。たとえば、 $(a, b) = (1, 0)$ の場合を考える。反標準因子をネフ錐の生成元を使って書き直すと、

$$-K_{\tilde{X}} = \tilde{H} + \tilde{L} + (n-3)(\tilde{H} - \tilde{E}) + (2\tilde{H} + \tilde{L} - \tilde{E} - F)$$

となるが、 $n > 3$ なので、 $-K_{\tilde{X}}$ は豊富である（たとえば [4] の 60 頁、Theorem 1.4.23 (ii) を参照）。その他の場合も同様。（証明終）

謝辞：本研究は JSPS 科研費 23740028 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] L. Bonavero, F. Campana, J. A. Wiśniewski, Variétés complexes dont l'éclatée en un point est de Fano. C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I 334 (2002), 463–468
- [2] C. Casagrande, Numerical invariants of Fano 4-folds. Mathematische Nachrichten Volume 286 (2013), 1107–1113
- [3] Y. Kawamata, Small contractions of four-dimensional algebraic manifolds. Math. Ann. 284 (1989), 595–600
- [4] R. Lazarsfeld, Positivity in Algebraic Geometry I, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 48, Springer (2004)

- [5] S. Mori and S. Mukai, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math. 36 (1981/82), 147–162 Erratum: Manuscripta Math. 110 (2003), 407
- [6] T. Tsukioka, 特殊な双有理射を持つ4次元ファノ多様体 (Fano 多様体の最近の進展) 数理解析研究所講究録 No.1897 (2014), 117–127

射影空間のガロワ埋め込み

吉原 久夫

1. 始めに

まず一般には余り知られていないガロワ埋め込みについて述べる。詳細は [3] をご覧ください。基礎体 k は代数閉体とする（必要に応じて標数の条件をつける）。 n 次元非特異射影代数多様体 V と、その上の very ample divisor D に対して、完備一次系 $|D|$ に付随した埋め込み $f: V \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^N \supset W \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & \mathbf{P}^n \end{array}$$

$$W \cap f(V) = \emptyset$$

W を $\mathbf{P}^N$ の $N - n - 1$ 次元一次多様体で、 $f(V)$ と交わらないとする。このとき、 W 中心の射影を p とすると、 $\pi = p \circ f: V \rightarrow \mathbf{P}^n$ は全射正則写像となる。 $k(V)$ を V の有理関数体とすると、 π は関数体の有限次拡大 $k(V)/\pi^*k(\mathbf{P}^n)$ を惹き起こす。この拡大は W によってきまるので（標数 0 のとき） $k(V)$ の $\pi^*k(\mathbf{P}^n)$ 上のガロワ閉包を K_W として、ガロワ群 $G_W = \text{Gal}(K_W/\pi^*k(\mathbf{P}^n))$ を $f(V)$ の W でのガロワ群という。これは分岐被覆 $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^n$ から定義されるモノドロミー群とも一致する。特に、拡大 $k(V)/\pi^*k(\mathbf{P}^n)$ がガロワ拡大のとき、 W をガロワ部分空間といい、このような部分空間が存在するような埋め込みをガロワ埋め込みという。また、 V_W は正規射影多様体で K_W を関数体にもち、 $V_W \rightarrow V$ が有限射になるものを $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^n$ のガロワ閉包多様体という。このとき以下の基本的なことが問題となる。

- (1) V のガロワ埋め込みを与える因子 D が存在するための V と D の条件は何か。また、 V に対して $\text{Pic}(V)$ の中でどのくらいガロワ埋め込みをもつ因子が存在するか。
- (2) 埋め込まれた $f(V)$ に対して、どのくらいガロワ部分空間が存在するか。またその配置はどのようなものか。
- (3) ガロワ埋め込みに対して、 G_W の $PGL(N, k)$ への表現を求める。特に、抽象群としての G_W の構造を決定する。
- (4) ガロワ埋め込みに対して、ガロワ対応を考察する。すなわち、 G_W の部分群にどのような多様体に対応するかを調べる。

- (5) W がガロワ部分空間でないとき、群 G_W およびガロワ閉包多様体の構造を調べる。
- (6) W と W' が (Grassmann 多様体の中で) 近いとき、 K_W と $K_{W'}$ は同型にならないかどうかを調べる。

これまでに得られている関係する成果と未解決問題は
<http://hyoshihara.web.fc2.com/>
 にある。

2. 定理と証明の概要

Theorem 1. $V = \mathbf{P}^n$ の d 次ガロワ埋め込みは群が可換ならば

$$G \cong \mathbf{Z}_d \oplus \mathbf{Z}_d \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_d \quad (n\text{-times})$$

であり、 $\pi : V = \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ は座標を適当に採ると

$$f(X_0 : X_1 : \cdots : X_n) = (X_0^d : X_1^d : \cdots : X_n^d)$$

と表される。

証明は簡単であるが概略を記しておく。 G はガロワ埋め込みのガロワ群であるとする。今の場合は $G \subset \mathrm{PGL}(n, k)$ となる [3]。

Lemma 2. H を π の分岐因子とすると

$$G_H = \{ \sigma \in G \mid \sigma|_H = id \}$$

は G の *cyclic subgroup* である。

Lemma 3. G は可換と仮定する。 H を π の分岐因子とすると、これは $\mathbf{P}^n$ の超平面であり、 G の任意の元 σ に対して $\sigma(H) = H$ である。

Lemma 3 より G は $\mathbf{P}^n \setminus H \cong \mathbf{C}^n$ に作用する。すなわち $G \subset GL(n, k)$ と見ることができる。 G はアーベル群なので同時に対角化できる。一方 Dolgachev [1] によると G は reflection によって生成されている。したがって、

$$G \ni \sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \dots, \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Lemma 4. 上の表現において $\mathrm{ord} \alpha_i = r_i$ とすると、任意の i に対して、 $r_i \leq d$ である。

$|G| = d^n$ なので [3] すべての i に対して $r_i = d$ である。 (Q.E.D.)

Corollary 5. $\mathbf{P}^2$ の素数 p 次のガロワ埋め込みは可換で $G \cong \mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$ で

$$\pi(X_0 : X_1 : X_2) = (X_0^p : X_1^p : X_2^p)$$

と表せる。

Proof. $|G| = p^2$ であるので、 G は可換である。 □

3. REMARKS

Remark 6. $\mathbf{P}^1$ のガロワ埋め込みでは、群として $\mathrm{PGL}(1, k)$ の有限部分群のすべてが現れる [4]。証明は、例えば、[2] を参照すれば定義式まですべて求められる。しかし、 $\mathbf{P}^n$ ($n \geq 2$) では状況が一変する。 $\mathbf{P}^2$ のガロワ埋め込みでは群の位数は d^2 (d は埋め込みの次数) でなければならない。しかし、例えば、自己同型 $(X_0 : X_1 : X_2) \mapsto (aX_0 + bX_1 : cX_0 + dX_1 : X_2)$ において $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $\mathrm{PGL}(1, k)$ の有限非可換自己同型の元、とすれば位数の条件が満たされない。

Problem 7. 定理において、非可換のときにどのようなになるか調べよ。特に、 $n = 2$ の時にどうであるか？

REFERENCES

- [1] I. Dolgachev, Reflection group in algebraic geometry, Bull. AMS **45** (2008), 1–60.
- [2] M. Namba, Branched coverings and algebraic functions, Pitman Research Notes in Mathematical Series. 161 (1987)
- [3] H. Yoshihara, Galois embedding of algebraic variety and its application to abelian surface, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **117** (2007), 69–85.
- [4] H. Yoshihara, Galois points for plane rational curves, Far east J. Math. Sci. **25** (2007), 273–284.

ガロワ点とガロワワイエルシュトラス点について

高橋 剛

新潟大学工学部情報工学科

2015 年 2 月 1 日

- ① はじめに
- ② 平面曲線のガロワ点
- ③ ガロワワイエルシュトラス点
- ④ 結果その 1
- ⑤ 結果その 2
- ⑥ 例: 5 次フェルマ曲線 (奇数次数, 外ガロワ点)

はじめに

発表の機会を与えて頂きまして, ありがとうございます.
本研究は米田二良氏 (神奈川工科大学) との共同研究です.

代数多様体の基礎体を複素数体 $k := \mathbb{C}$ とする.

平面曲線のカロワ点

まず非特異平面曲線のカロワ点に関する吉原氏と三浦氏による結果についてまとめる.

$C \subset \mathbb{P}^2$: d 次既約平面曲線 ($d \geq 3$)

$\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$: 点 $P \in \mathbb{P}^2$ からの射影

π_P によって, 関数体の拡大 $\pi_P^* : k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow k(C)$

Definition 1 (吉原)

点 P が平面曲線 C のカロワ点 (Galois point) であるとは, 体拡大 $k(C)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ がカロワ拡大になるときにいう.

さらに, $P \in C$ のときは内カロワ点 (inner Galois point), $P \notin C$ のときは外カロワ点 (outer Galois point) であるという.

Theorem 2 (三浦・吉原 2000, 吉原 2001)

$C \subset \mathbb{P}^2$: 非特異 d 次平面曲線, 点 $P \in \mathbb{P}^2$, $\deg \pi_P \geq 3$ と仮定. このとき

- ① P がガロワ点ならば, 体拡大 $k(C)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ のガロワ群は巡回群
- ② P が内ガロワ点であるための必要十分条件は, 射影変換により $P = (0 : 0 : 1)$, $C : XZ^{d-1} + f_d(X, Y) = 0$ となること
- ③ P が外ガロワ点であるための必要十分条件は, 射影変換により $P = (0 : 0 : 1)$, $C : Z^d + f_d(X, Y) = 0$ となること
- ④ C の内ガロワ点の個数は 0, 1, 4 であり, 4 個の内ガロワ点を持つ非特異平面曲線は 4 次曲線 $XZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$ と射影同値.
($XZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$ の内ガロワ点は $Y = 0$ 上の 4 点)
- ⑤ C の外ガロワ点の個数は 0, 1, 3 であり, 3 個の外ガロワ点を持つ非特異平面曲線はフェルマー曲線 $X^d + Y^d + Z^d = 0$ と射影同値.
($X^d + Y^d + Z^d = 0$ の外ガロワ点は, $(0 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 0)$)

Remark 3

- ① $d \geq 4$ のとき, 非特異 d 次平面曲線 C の任意の自己同型 $\sigma \in \text{Aut}(C)$ は, ある射影変換 $T \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \text{PGL}(3, k)$ の制限 $T|_C = \sigma$ となる.
- ② $d \geq 5$ のとき, 非特異 d 次平面曲線 C のガロワ点の個数は 0 か 1.

ガロワワイエルシュトラス点

ワイエルシュトラス点とガロワワイエルシュトラス点の定義を復習し、弱ガロワワイエルシュトラス点を定義してそれらの例をみる。

Definition 4 (ワイエルシュトラス点)

種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線 C' 内の点 P' がワイエルシュトラス点 (Weierstrass point) であるとは, $\dim_k H^0(C', O(gP')) \geq 2$ (つまり, 極因子が $(f)_\infty = nP'$, $0 < n \leq g$ をみたす有理関数 $f \in k(C')$ が存在する) となるときにいう。また,

$$H(P') := \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists f \in k(C') \text{ such that } (f)_\infty = nP'\}$$

をワイエルシュトラス半群と呼ぶ。

Remark 5

$H(P')$ は和 $+$ によってモノイドになる。 $\mathbb{N} \setminus H(P')$ はギャップ列と呼ばれ, その要素は $\#(\mathbb{N} \setminus H(P')) = g$ 個である。

Definition 6 (Morrison–Pinkham 1986)

種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線 C' 内の点 P' のワイエルシュトラス半群 $H(P')$ の正最小数を m とする。

P' がガロワワイエルシュトラス点 (Galois Weierstrass point) であるとは, 因子 mP' から得られる射 $\Phi_{|mP'|} : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ がガロワ被覆となるときにいう。

Remark 7

定義 6 において

- ① $\dim_k H^0(C', O(mP')) = 2$.
- ② 射 $\Phi_{|mP'|} : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ がガロワ被覆のとき, そのガロワ群は巡回群。
- ③ Morrison–Pinkham 1986 におけるガロワワイエルシュトラス点の定義では, ワイエルシュトラス点であることを仮定していない。しかし, 本講演ではガロワワイエルシュトラス点はワイエルシュトラス点となるものだけを扱う。

Example 8

$\mathbb{P}^2 \supset C$ を $XZ^4 + X^5 + Y^5 = 0$ とし, $P = (0 : 0 : 1)$ とする.

すると, 点 P は定理 2 より, C の内ガロワ点.

点 P での C に対する接線 T_PC は $X = 0$ なので, $I_P(C, T_PC) = 5$.

このことから, P はワイエルシュトラス点であり, $H(P) = \langle 4, 5 \rangle$.

さらに, $f := (Y/X)|_C \in k(C)$ とおくと, $(f)_\infty = 4P$ であり,

$\Phi_{|4P|}$ は $Q \mapsto (1 : f(Q))$ という射であるが,

これは P からの射影 π_P に他ならない.

P はガロワ点なので, $\Phi_{|4P|} = \pi_P$ はガロワ被覆であり,

P はガロワワイエルシュトラス点であることがわかる.

ガロワワイエルシュトラス点の定義の条件を少し変えて弱ガロワワイエルシュトラス点を以下のように定める.

Definition 9

種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線 C' 内の点 P' が弱ガロワワイエルシュトラス点 (weak Galois Weierstrass point) であるとは, 次の条件をみたすときにいう.

- ① P' はワイエルシュトラス点である.
- ② P' が完全分岐点 (total ramification point) となるガロワ被覆 $f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在する.

Remark 10

定義 9 において,

- ① $\deg f = \min\{H(P') \setminus \{0\}\}$ のときには, P' はガロワワイエルシュトラス点である.
- ② ガロワ被覆 f のガロワ群は巡回群である.

Example 11

$\mathbb{P}^2 \supset C$ を $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ とし, $P = (0 : 0 : 1)$ とする.

すると, 点 P は定理 2 より, C の外ガロワ点である.

$Q = (-1 : 1 : 0) \in C$ とすると, $T_Q C$ は $X + Y = 0$ で, $I_Q(C, T_Q C) = 5$.

このことから, Q はワイエルシュトラス点であり, $H(Q) = \langle 4, 5 \rangle$.

さらに, Q は射影 π_P の完全分岐点であることもわかる.

P はガロワ点で, π_P はガロワ被覆 ($\deg \pi_P = 5$) なので,

Q は弱ガロワワイエルシュトラス点であることがわかる.

Proposition 12

種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線 C' 内の点 P' が弱ガロワワイエルシュトラス点であると仮定する. さらに $H(P') = \langle a, b \rangle$ ($a < b$) であると仮定する. このとき次の性質をみたす射 $f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在する.

- ① f はガロワ被覆である.
- ② P' は f の完全分岐点である.
- ③ $\deg f = a$ or b である.

結果その1

平面曲線のガロワ点とガロワワイエルシュトラス点・弱ガロワワイエルシュトラス点との関係は、前節の2つの例で見た通りである。本節では、それを定理としてまとめておく。

Theorem 13

$C \subset \mathbb{P}^2$ を d 次非特異平面代数曲線 ($d \geq 4$) とし、 P を内ガロワ点とする。このとき、

- ① 点 P はワイエルシュトラス点であり、 $H(P) = \langle d-1, d \rangle$ である。
- ② P はガロワワイエルシュトラス点である。

Theorem 14

C' を種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線とし、点 P' はガロワワイエルシュトラス点であり、 $H(P') = \langle d-1, d \rangle$ ($d \geq 4$) であると仮定する。このとき、

- ① C' は d 次非特異平面代数曲線に同型である。
- ② C' を平面曲線としてみると、点 $P' \in C'$ は内ガロワ点である。
- ③ $\pi_{P'} = \Phi_{|(d-1)P'} \cdot$ 。

Theorem 15

$C \subset \mathbb{P}^2$ を d 次非特異平面代数曲線 ($d \geq 4$) とし, P を外ガロワ点とする. 点 $Q \in C$ を射影 π_P の完全分岐点とする. (注. 完全分岐点は存在する.) このとき,

- ① 点 Q はワイエルシュトラス点であり, $H(Q) = \langle d-1, d \rangle$ である.
- ② Q は弱ガロワワイエルシュトラス点である. (注. Q は π_P の完全分岐点, π_P はガロワ被覆, $\deg \pi_P = d$.)

Theorem 16

C' を種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線とし, 点 Q' は弱ガロワワイエルシュトラス点であり, Q' が完全分岐点となるガロワ被覆 $f: C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在して, その次数は $\deg f = d$ であり, $H(Q') = \langle d-1, d \rangle$ ($d \geq 4$) であると仮定する. このとき,

- ① C' は d 次非特異平面代数曲線に同型である.
- ② C' を平面曲線としてみると, 外ガロワ点 P' が存在する.
- ③ $\pi_{P'} = f$.

結果その2

本節では, 曲線の2重被覆を通して, $H(P') = \langle r, 2r \pm 1 \rangle$ というタイプの弱ガロワワイエルシュトラス点と平面曲線のガロワ点の関係について調べた結果を述べる.

平面曲線の次数が偶数か奇数かと注目するガロワ点が内か外かについて場合分けをして (つまり, 4つの場合に分けて) 結果を述べる.

奇数次数, 内ガロワ点

Theorem 17

$C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異平面代数曲線とし, その次数 d は 5 以上の奇数であると仮定する. 点 P を内ガロワ点として, ガロワ群 $\text{Gal}(k(C)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1)))$ は巡回群なのでその生成元を σ とする. $\iota := \sigma^{(d-1)/2}$ とおき, ι から得られる 2 重被覆を $\varphi: C \rightarrow C' := C/\langle \iota \rangle$ とする. このとき,

- ① $P' := \varphi(P)$ はワイエルシュトラス点であり, $H(P') = \langle (d-1)/2, d \rangle$.
- ② P' はガロワワイエルシュトラス点である.
- ③ $\pi_P = \Phi_{|(d-1)/2| P'} \circ \varphi$.

Theorem 18

C' を種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線とし, 点 P' はガロワワイエルシュトラス点であり, $H(P') = \langle r, 2r+1 \rangle$ ($r \geq 2$) であると仮定する. このとき, 次数 $d = 2r+1$ の非特異平面代数曲線 C とその内ガロワ点 P が存在して, C' と P' は Theorem 17 のようにして得られる.

偶数次数, 外ガロワ点

Theorem 19

$C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異, 次数 d は 4 以上の偶数であると仮定する. P を外ガロワ点として, ガロワ群は巡回群なのでその生成元を σ とする. $\iota := \sigma^{d/2}$ とおき, ι から得られる 2 重被覆を $\varphi: C \rightarrow C' := C/\langle \iota \rangle$ とする. 点 Q を π_P の完全分岐点とする. (注. 存在する.) このとき,

- ① $Q' := \varphi(Q)$ はワイエルシュトラス点であり, $H(Q') = \langle d/2, d-1 \rangle$.
- ② Q' はガロワワイエルシュトラス点である.
- ③ $\pi_P = \Phi_{|d/2| Q'} \circ \varphi$.

Theorem 20

C' を種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線とし, 点 Q' はガロワワイエルシュトラス点であり, $H(Q') = \langle r, 2r-1 \rangle$ ($r \geq 2$) であると仮定する. このとき, 次数 $d = 2r$ の非特異平面代数曲線 C とその外ガロワ点 P が存在して, C' と Q' は定理 19 のようにして得られる.

偶数次数, 内ガロワ点

Theorem 21

$C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異, 次数 d は 4 以上の偶数と仮定, 点 P を C の内ガロワ点とする. 位数 2 の C の自己同型 ι で $\iota(P) = P$ となるものが存在すると仮定し, ι から得られる 2 重被覆を $\varphi : C \rightarrow C' := C/\langle \iota \rangle$ とする. このとき,

- ① $P' := \varphi(P)$ はワイエルシュトラス点であり, $H(P') = \langle d/2, d-1 \rangle$.
- ② P' は弱ガロワワイエルシュトラス点である. (P' が完全分岐点となる $d-1$ 次のガロワ被覆 $f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在する.)

Theorem 22

C' を種数 $g \geq 2$ の非特異射影代数曲線とし, 点 P' は弱ガロワワイエルシュトラス点であり, $H(P') = \langle r, 2r-1 \rangle$ ($r \geq 2$) であり, P' が完全分岐点となる $2r-1$ 次のガロワ被覆 $f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在すると仮定. このとき, 次数 $d = 2r$ の非特異平面代数曲線 C とその内ガロワ点 P と, *involution* $\iota \in \text{Aut}(C)$ が存在して, C' と P' は定理 21 のようにして得られる.

奇数次数, 外ガロワ点

Theorem 23

$C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異, 次数 d は 5 以上の奇数, 点 P を外ガロワ点としてガロワ群 (巡回群) の生成元を σ とする. さらに, (P を固定する) 位数 2 の C の自己同型射 ι が存在すると仮定し, $\varphi : C \rightarrow C' := C/\langle \iota \rangle$ とする. このとき,

- ① $\text{Fix}(\sigma) \cap \text{Fix}(\iota) \cap C$ は 1 点からなる. (その点を Q とする.)
- ② $Q' := \varphi(Q)$ はワイエルシュトラス点であり, $H(Q') = \langle (d-1)/2, d \rangle$.
- ③ Q' は弱ガロワワイエルシュトラス点である. (Q' が完全分岐点となる d 次のガロワ被覆 $f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在する.)

Theorem 24

C' を種数 $g \geq 2$ とし, Q' は弱 GW 点, $H(Q') = \langle r, 2r+1 \rangle$ ($r \geq 2$), Q' が完全分岐点となる $2r+1$ 次のガロワ被覆 $f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在と仮定. このとき, $d = 2r+1$ 次の非特異平面曲線 C と外ガロワ点 P と *involution* $\iota \in \text{Aut}(C)$ が存在して, C' と Q' は定理 23 のようにして得られる.

例: 5 次フェルマ曲線 (奇数次数, 外ガロワ点)

5 次フェルマ曲線 $C : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ を例にして, Theorem 23 がどのようなになっているのを見よう.

$P = (0 : 0 : 1)$ とすると, 点 P は外ガロワ点である.

そのガロワ群は 5 次巡回群であるが, 生成元は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \zeta \end{pmatrix} \quad (\zeta \text{ は } 1 \text{ の原始 } 5 \text{ 乗根})$$

と表現される.

$\text{Fix}(\sigma) = \{P\} \cup (Z = 0)$. (注. $\mathbb{P}^2$ の自己同型としての固定点集合)

involution $\iota \in \text{Aut}(C) \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ が $\iota(P) = P$ のとき, $\iota(Z = 0) = (Z = 0)$ であるが, $\#(C \cap (Z = 0)) = 5$ なので $\text{Fix}(\sigma) \cap \text{Fix}(\iota) \cap C$ は 1 点だけであることがわかる.

例えば,

$$\iota = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $\text{Fix}(\sigma) \cap \text{Fix}(\iota) \cap C = \{Q := (-1 : 1 : 0)\}$. このとき, Q は $H(Q) = \langle 4, 5 \rangle$ である.

ここで, 射影変換

$$T = \begin{pmatrix} 1 : -1 : 0 \\ 1 : 1 : 0 \\ 0 : 0 : 1 \end{pmatrix} \quad (\sigma \text{ と } \iota \text{ を同時に対角化する行列})$$

によって, C を変換すると (T で引き戻す) と

$$C : 2X^5 + 20X^3Y^2 + 10XY^4 + Z^5 = 0, P = (0 : 0 : 1), Q = (0 : 1 : 0),$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \zeta \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{P}(1, 2, 1)$ 内の曲線 C' を $2\bar{X}^5 + 20\bar{X}^3\bar{Y} + 10\bar{X}\bar{Y}^2 + \bar{Z}^5 = 0$ とし,
 $\varphi : C \rightarrow C'$ を $(X : Y : Z) \mapsto (X, Y^2, Z)$ とすると,
 この φ は ι から得られる 2 重被覆に他ならない.

Q は φ の分岐点なので, $Q' := \varphi(Q) = (0, 1, 0)$ の W 半群は
 $H(Q') = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 2n \in H(Q)\}$ となるという結果 (加藤先生の結果?) より,
 $H(Q') = \langle 2, 5 \rangle$.
 特に, Q' はワイエルシュトラス点である.

$f : C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) \mapsto (\bar{X}^2 : \bar{Y})$ とすると,
 $C' : 2\bar{X}^5 + 20\bar{X}^3\bar{Y} + 10\bar{X}\bar{Y}^2 + \bar{Z}^5 = 0$ なので,
 f は 5 次巡回被覆で, Q' は完全分岐点である.

つまり, Q' は弱ガロワワイエルシュトラス点である.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & C' \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{2} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (X : Y : Z) & \xrightarrow{\varphi} & (X, Y^2, Z) \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow f \\ (X : Y) & \xrightarrow{2} & (X^2 : Y^2) \end{array}$$

GALOIS POINTS FOR LISSAJOUS CURVES (REVISITED)

三浦 敬

ABSTRACT. 本稿は、2015 年 1 月 10 日～11 日に、ソフトピアジャパンセンタービルで開催された「代数幾何シンポジウム 2014 in 岐阜」での筆者の発表に基づいている。リサージュ曲線に対するガロワ点の結果を踏まえて、アステロイドを念頭に、リサージュ曲線を拡張した曲線に対するガロワ群を求めたい。アステロイドは 4 個の尖った点を持つ美しい形の曲線で、高専の微分積分の授業においては、曲線の長さを求めたり、面積を求めたり、直線族の包絡線になっていたり、頻繁に登場する曲線のひとつである。発表の機会を与えてくださったオーガナイザーの先生方、そして有益なコメントをくださった聴講者の皆さまに感謝いたします。

1. INTRODUCTION

まずは、発表では省略したガロワ点の定義を簡単に述べておこう。 k を複素数体 $\mathbb{C}$ とし、本稿では基礎体として固定する。 K を k 上 1 変数代数関数体とする。このとき、体拡大 K/k を覗き込んでみたい。特に、どのような中間体がどれくらい存在するのかを知りたい。これが、本研究の当初の目的であった。そこで、体拡大 K/k の様子を以下のよう幾何の観点から考察することを考えよう。

$C \subset \mathbb{P}^2$ を d 次 ($d \geq 3$) 既約平面曲線 (特異点を許容する) とし、 $K = k(C)$ を C の関数体とする。すなわち、 C を用いて体拡大 K/k の様子を調べる。 C に対するガロワ点 (*Galois point for C*) という概念は、筆者の記憶が確かならば、吉原久夫先生が 1996 年に初めて定義された (cf. [6])。ガロワ点の概念を、ここで簡単に復習しておこう。

平面上の点 $P \in \mathbb{P}^2$ に対し、点 P を中心とする射影を考えることができる。

$$\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$$

この点射影は関数体の間の体拡大をひき起こす。

$$\pi_P^* : k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow k(C) = K$$

この体拡大は点 P によって決まるので、 $k(\mathbb{P}^1)$ を K_P で書くことにする。すなわち、 $\pi_P^* : K/K_P$. 拡大次数については $[K : K_P] = d - m_P$

本研究は JSPS 科研費 26400057 の助成を受けたものです。

(ただし m_P は C の P における重複度で、もし $P \notin C$ ならば $m_P = 0$ とおく) であることに注意する.

以上の状況で、ガロワ点とは次のように定義される.

Definition 1. 体拡大 K/K_P がガロワ拡大となるとき、点 $P \in \mathbb{P}^2$ を C に対するガロワ点であるという.

ガロワ点に関する言葉と記号を準備しよう. L_P を体拡大 K/K_P のガロワ閉包とし、 $\tilde{C}_P$ を L_P を関数体にもつ非特異曲線とする. 本稿では $\tilde{C}_P$ をガロワ閉包曲線と呼ぶことにする. $g(P)$ で $\tilde{C}_P$ の種数を表すことにする. ガロワ群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ を G_P で表し、点 P でのガロワ群と呼ぶ. $\delta(C)$ で C に対するガロワ点の個数を表すことにする. このとき、我々は次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} L_P & - & \tilde{C}_P & - & \{e\} \\ | & & \downarrow & & | \\ K = k(C) & - & C & - & H \\ | & & \downarrow & & | \\ K_P = k(\mathbb{P}^1) & - & \mathbb{P}^1 & - & G_P \end{array}$$

我々はこれまでに次のような問題意識のもと研究を進めてきた.

Problem 1. 平面曲線 C が与えられたとき、

- (i) C のガロワ点を探すこと、 $\delta(C)$ を決定すること、逆に $\delta(C)$ で曲線の特徴付けること.
- (ii) 点 P が平面上を動くとき、 $g(P)$ の範囲を決定すること.
- (iii) 点 P が平面上を動くとき、現れる G_P を決定すること.

曲線の次数が低い場合 ($d = 4, 5$) を中心に結果を得てきた. C が smooth のときは、文字通り議論が smooth に進み、まとまりある結果が得られている. しかし、一旦 C に特異点を許してしまうと、とても面白い対象とは思うが、非常に複雑な議論が必要となる. 残念ながら現在までに、十分な結果が得られているとは言い難い. すなわち、やるべきことは山積している.

2. LISSAJOUS CURVES

飯高茂先生の著書『平面曲線の幾何』([2]) により、リサージュ曲線を次のように定義する.

Definition 2. m, n を互いに素な正の整数とする. このとき次の3種類の曲線を定義する ($\theta \in \mathbb{R}$):

$$C(m, n) : \begin{cases} x = \cos m\theta \\ y = \cos n\theta \end{cases}$$

$$S(m, n) : \begin{cases} x = \sin m\theta \\ y = \sin n\theta \end{cases}$$

$$CS(m, n) : \begin{cases} x = \cos m\theta \\ y = \sin n\theta \end{cases}$$

本稿ではこれら 3 種類の曲線をリサージュ曲線と呼ぶ.

Remark 3. リサージュ曲線は node をたくさん持つ代数曲線を構成するときに大きな役割を果たしている. 例えば, Pecker [7]などを参照. リサージュ曲線が扱いやすい理由として, 特異点の多くが実平面 $\mathbb{R}^2$ に現れることだと思われる.

この研究のモチベーションは, 上に挙げたリサージュ曲線の解析に端を発するが, いかんせん, これらは $\mathbb{R}$ 上の曲線である. 我々は $\mathbb{C}$ 上でガロワ点の議論をしたいので, リサージュ曲線の定義を次の形に拡張する.

Definition 4. $t \in \mathbb{C}$ とし, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ とする. このとき, *Complex Lissajous curves* を次のように定義する.

$$\overline{C}(m, n) : x = \frac{1}{2} \left(t^m + \frac{1}{t^m} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(t^n + \frac{1}{t^n} \right)$$

$$\overline{S}(m, n) : x = \frac{1}{2i} \left(t^m - \frac{1}{t^m} \right), \quad y = \frac{1}{2i} \left(t^n - \frac{1}{t^n} \right)$$

$$\overline{CS}(m, n) : x = \frac{1}{2} \left(t^m + \frac{1}{t^m} \right), \quad y = \frac{1}{2i} \left(t^n - \frac{1}{t^n} \right)$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$, m, n は互いに素な正の整数.

Remark 5. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ に対し, $t = e^{i\theta}$ と置くと, ド・モアブルの定理を用いれば, 次が簡単に確かめられる.

$$\cos m\theta = \frac{1}{2} \left(t^m + \frac{1}{t^m} \right), \quad \sin m\theta = \frac{1}{2i} \left(t^m - \frac{1}{t^m} \right).$$

よって, Definition 4 は Definition 2 の拡張になっている.

端点の有無によりリサージュ曲線を 2 種類に分ける. 以下の定義は [1] による.

Definition 6. リサージュ曲線 C が端点を持つとき, C は *open* であると言い, 端点を持たないとき *closed* であると言う. 複素リサージュ曲線 $\overline{C}$ は C が *open* のときに *open* であるといい, C が *closed* のときに *closed* であるという.

Remark 7. この定義は少々微妙に感じられるかもしれない. しかし, 実際には端点の有無ではなく, 体の拡大で定義することもできるが, 目で見て分かる方法をここでは採用した.

Example 8. 例えば, $C(2, 3)$ は次のような形であり, 端点を持つ. すなわち *open* である. $CS(3, 2)$ は次のような形であり, 端点を持たない. すなわち *closed* である.

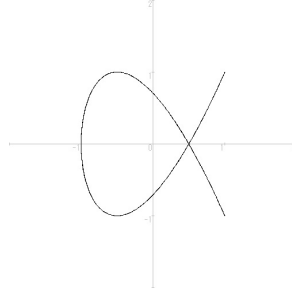


FIGURE 1. $C(2, 3)$

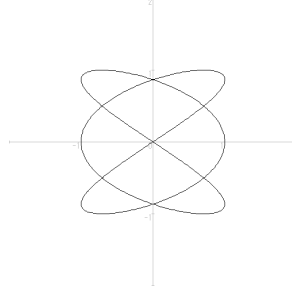


FIGURE 2. $CS(3, 2)$

open, *closed* の判定は以下のとおりである. 証明は [2], [3] などを参照のこと.

Lemma 9. $C(m, n)$ は常に *open* である. $S(m, n)$ は $m + n$ が奇数のとき *closed* でそれ以外は *open* である. $CS(m, n)$ は m が奇数のとき *closed* でそれ以外は *open* である.

3. GALOIS POINTS FOR LISSAJOUS CURVES

筆者の論文 [3] (または [4]) の結果を紹介する¹.

Theorem 1. 任意の “*closed*” なリサージュ曲線 C に対して, 常に $G_P \cong D_{2m}$, $G_{P'} \cong D_{2n}$ となる 2 個のガロワ点 P, P' が存在する. ここで, D_{2m} は位数 $2m$ の二面体群である.

一方 C が *open* であるとき, 次の結果を得る.

¹大垣での発表のときにも触れたが, MathSciNet で Lissajous がタイトルに入る論文を検索すると 30 編程度しかない. 結び目理論等で使われているようである.

Theorem 2. 任意の “open” なリサージュ曲線 C に対して, 2 次被覆 $\tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow C$ [resp. $\tilde{\pi}' : \tilde{C}' \rightarrow C$] が存在し, $\pi_P \circ \tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ [resp. $\pi_{P'} \circ \tilde{\pi}' : \tilde{C}' \rightarrow \mathbb{P}^1$] は D_{2m} [resp. D_{2n}] をガロワ群とするガロワ被覆を与える. すなわち, $\tilde{C}$ [resp. $\tilde{C}'$] は π_P [resp. $\pi_{P'}$] のガロワ閉包曲線であり, ガロワ群は $G_P \cong D_{2m}$ [resp. $G_{P'} \cong D_{2n}$] となる. また, 特に, これら $\tilde{C}, \tilde{C}'$ は空間リサージュ曲線で与えられる.

Remark 10. 上述の Theorem 1 について. 主張していることは, 少なくとも 2 個のガロワ点が存在することである. 大垣でも質問が出たように, 「ガロワ点は他にないのか?」ということは大きな問題である. これは, リサージュ曲線の変曲点, 複接線の数を数えることで簡単に解決できる! と思わすが, 物事はそんなに甘くない. と言うのも, リサージュ曲線は結構たくさんの変曲点, 複接線を持つ. それゆえ, 可能性を潰すのは容易ではない. 試しに $CS(3, 2)$ を具体的に計算してみた. 変曲点が 8 個, 複接線が 14 本. これらの配置を煩雑な計算で調べあげたところ, 他のガロワ点の可能性を潰すことができた. すなわち, $CS(3, 2)$ については, Theorem 1 にある, ガロワ点 2 個以外にガロワ点は存在しない (曲線の内にも外にも). もちろん, すべての closed なリサージュ曲線に対してこの主張が成り立つことを示したいが, なかなか困難である.

Remark 11. これも大垣で質問が出たが, もし仮に他にガロワ点が存在した場合, そのガロワ群は二面体群か? というもの. これが成り立てば非常に面白いと思うが, いくらなんでもそんなに上手く行かないだろうと個人的には思っている.

Theorem 1 の証明のアウトラインを述べておく. C は $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ でパラメトライズされているとする (具体的には Definition 4 のような式). このとき, $\mathbb{C}(x, y) \subset \mathbb{C}(t)$ である. 実は, $C : \text{closed} \Leftrightarrow \mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(t)$. このとき, 無限遠直線上の適当な P に対し $\pi_P^* : \mathbb{C}(x, y) \supset \mathbb{C}(x)$ であり, たとえば, $x = t^m + \frac{1}{t^m}$ であれば, $\mathbb{C}(t)$ の t に対し,

$$\sigma : t \mapsto \zeta z, \quad \tau : t \mapsto t^{-1}$$

(ただし, ζ は 1 の m 乗根) とすれば, $\langle \sigma, \tau \rangle \cong D_{2m}$ であり, $\mathbb{C}(t)^{\langle \sigma, \tau \rangle} = \mathbb{C}(x)$ となることから, P はガロワ点で $G_P \cong D_{2m}$.

$C : \text{open}$ の場合は, $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(x, y)] = 2$ となるので, C の適当な 2 次被覆を作ると, 上と同じように D_{2m} 被覆を得る. この 2 次被覆のモデルが空間リサージュ曲線となることは, 2 次拡大を構成するときに添加する判別式 (のルート) を計算するとすぐに分かる. 詳細は [3] を参照のこと.

4. 今回のテーマ

個人的に，リサージュ曲線の仲間たちを（勝手に）考えてみた．リサージュ曲線は CS タイプに限定する．

level?	I	II	III
	$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ 円	$\begin{cases} x = \cos^2 \theta \\ y = \sin^2 \theta \end{cases}$ 直線	$\begin{cases} x = \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases}$ アステロイド
	$\begin{cases} x = \cos m\theta \\ y = \sin n\theta \end{cases}$ リサージュ	?	??

Remark 12. 酒井文雄先生の著書『平面代数曲線』([8])によると，

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n - 1 = 0$$

をラメ (Lamé) 曲線という．特に， $n = 2/3$ のときがアステロイドである．

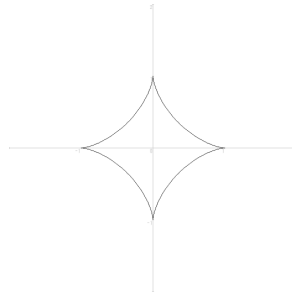


FIGURE 3. Astroid

Remark 13. 長さが一定の線分の端点のうち，片方が x 軸を，他方が y 軸を動くときにできる直線族の包絡線がアステロイドである．宇部高専 3 年生は偏微分の勉強をし，そこで包絡線を学ぶ．

上の表の「?」, 「??」はさておき，まずはアステロイドを調べてみよう．射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上で， $P = (0 : 0 : 1)$, $Q = (0 : 1 : 0)$, $R = (1 : 0 : 0)$ とおく．このとき，たとえば， $\pi_P : (X : Y : Z) \mapsto (X : Y)$ ．さらに， $Z \neq 0$ 上で， $x = X/Z$, $y = Y/Z$ とおくと， π_P, π_Q, π_R のひき起こす体拡大は，

$$\begin{aligned} \pi_P^* : \mathbb{C}(x, y) &\supset \mathbb{C}(y/x) \\ \pi_Q^* : \mathbb{C}(x, y) &\supset \mathbb{C}(x) \\ \pi_R^* : \mathbb{C}(x, y) &\supset \mathbb{C}(y) \end{aligned}$$

となる.

そこで, 次を問題をして設定する.

Problem 2. P, Q, R からの射影 π_P, π_Q, π_R を調べよ!

Example 14. 例として円 $x^2 + y^2 = 1$ について, π_P, π_Q, π_R を調べてみる. いずれも, 明らかに 2 次被覆を与える. すなわち, P, Q, R はすべてガロワ点で, ガロワ群は 2 次巡回群 C_2 となる. 体拡大の様子を具体的に書き下してみる. 円を $\overline{CS}(1, 1)$ だとみなす. すなわち, $x = 1/2(t + 1/t), y = 1/2i(t - 1/t)$ でパラメトライズされているとする. このとき, $\mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(t)$ である.

- (i) π_P について. $\pi_P^* : \mathbb{C}(t) \supset \mathbb{C}(y/x) = \mathbb{C}(\frac{t^2-1}{t^2+1})$ となる. このときガロワ群の作用は $G_P \ni \sigma, \sigma(t) = -t$ となる.
- (ii) π_Q について. $\pi_Q^* : \mathbb{C}(t) \supset \mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(t + \frac{1}{t})$ となる. このときガロワ群の作用は $G_Q \ni \sigma, \sigma(t) = \frac{1}{t}$ となる.
- (iii) π_R について. $\pi_R^* : \mathbb{C}(t) \supset \mathbb{C}(y) = \mathbb{C}(t - \frac{1}{t})$ となる. このときガロワ群の作用は $G_R \ni \sigma, \sigma(t) = -\frac{1}{t}$ となる.

上述の計算をもとに, アステロイドを調べてみる. まずは, Definition 4 を真似して, 複素版アステロイドを定義する.

Definition 15. $t \in \mathbb{C}$ とし, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ とする. 曲線 C は

$$x = \left\{ \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right\}^3, \quad y = \left\{ \frac{1}{2i} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right\}^3$$

でパラメトライズされるときに, *complex astroid* であるという.

簡単な計算から次が分かる.

Remark 16. complex astroid は 6 次曲線で, 2 重点を 10 個持つ. そのうち, 6 個が cusp で, 4 個が node である. また, $P, Q, R \notin C$. 特に, $\deg \pi_P = \deg \pi_Q = \deg \pi_R = 6$.

次も簡単な計算から確かめられるが, 少々ややこしい. 実際に, 6 次の定義方程式を用いて, 射影の分岐の様子を調べることでチェックできる.

Proposition 17. C : complex astroid とする. このとき P, Q, R はガロワ点ではない.

この命題を受けて,

Problem 3. P, Q, R からの射影 π_P, π_Q, π_R についての (ガロワ閉包までの) ガロワ群 G_P, G_Q, G_R を求めよ.

では、実際に求めてみる．いずれも同様の計算となるので、 π_Q について計算してみる．まず、 $\pi_Q^* : \mathbb{C}(x, y) \supset \mathbb{C}(x)$ は Remark 16 より 6 次拡大である．また、 $\mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}((t+1/t)^3, (t-1/t)^3) \subset \mathbb{C}(t)$ で $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}((t+1/t)^3)$ である．このとき、 $\mathbb{C}(t) \supset \mathbb{C}(t+1/t) \supset \mathbb{C}((t+1/t)^3)$ で、 $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(t+1/t)] = 2$, $[\mathbb{C}(t+1/t) : \mathbb{C}((t+1/t)^3)] = 3$ より、 $\mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(t)$ が分かる．

よって、 $\pi_Q^* : \mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(t) \supset \mathbb{C}((t+1/t)^3)$ となる．この 6 次拡大は Example 14 で扱った 2 次拡大を経由する．すなわち、

$$\mathbb{C}(t) \supset \mathbb{C}(t+1/t) \supset \mathbb{C}((t+1/t)^3)$$

のように、2 次拡大と 3 次拡大に分解する．特に、両者はともにガロワ拡大となっている．

このような場合、ガロワ群を計算することは可能で、それはリース積 (wreath product) を用いる方法である．ちょうどタイミング良く、筆者はリース積を用いてガロワ群を評価することを研究していた．それゆえ、この体拡大が現れたときは「キター！」という感じだった．リース積を用いたガロワ群の評価は、第 12 回代数曲線論シンポジウム報告集に掲載される予定 (cf. [5]).

Theorem 3. C : complex astroid とする．このとき、 P, Q, R はガロワ点ではなく、各点でのガロワ群は $C_2 \wr C_3$ へ埋め込まれる．特に、 $|C_2 \wr C_3| = 24$.

5. 主結果となるべき予定だったもの

§4 の表における「？」と「??」の部分を考える．そのために、アステロイドを念頭にリサージュ曲線の定義を拡張する².

Definition 18. $t \in \mathbb{C}$ とし、 $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ とする．このとき、レベル $[k_1, k_2]$ のリサージュ曲線³ (Lissajous curve of level $[k_1, k_2]$) を次のように定義する．

$$\overline{C}(m, n)^{[k_1, k_2]} : x = \left\{ \frac{1}{2} \left(t^m + \frac{1}{t^m} \right) \right\}^{k_1}, \quad y = \left\{ \frac{1}{2} \left(t^n + \frac{1}{t^n} \right) \right\}^{k_2}$$

$$\overline{S}(m, n)^{[k_1, k_2]} : x = \left\{ \frac{1}{2i} \left(t^m - \frac{1}{t^m} \right) \right\}^{k_1}, \quad y = \left\{ \frac{1}{2i} \left(t^n - \frac{1}{t^n} \right) \right\}^{k_2}$$

$$\overline{CS}(m, n)^{[k_1, k_2]} : x = \left\{ \frac{1}{2} \left(t^m + \frac{1}{t^m} \right) \right\}^{k_1}, \quad y = \left\{ \frac{1}{2i} \left(t^n - \frac{1}{t^n} \right) \right\}^{k_2}$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$, m, n は互いに素な正の整数． k_1, k_2 は正の整数．特に、 $k_1 = k_2$ のときは、単に $[k_1]$ と表すことにし、 $k_1 = k_2 = 1$ のときは、 $[1]$ を省略する．

²大垣で頂いたコメントをもとに、当日の発表よりもさらに拡張している．

³なにか適切な名称はないだろうか？

Remark 19. この記号を用いると, complex astroid とは $\overline{CS}(1,1)^{[3]}$ ということになる.

大垣でのシンポジウムで発表したかったのは, レベル [3] のリサーチ曲線に対し, Theorem 3 と同じ主張を述べた次のことであった⁴.

Conjecture. $C = \overline{CS}(m,n)^{[3]}$ とする. m は奇数であると仮定する (このとき, $\overline{CS}(m,n)$ は closed で, ガロワ点を 2 個持つ.). このとき, 点 Q, R でのガロワ群は,

$$G_Q \hookrightarrow D_{2m} \wr C_3$$

$$G_R \hookrightarrow D_{2n} \wr C_3$$

のように, リース積に埋め込まれる.

6. 後日談

上述の予想で, 筆者が証明できなかったのは,

$$\mathbb{C}(t^m + \frac{1}{t^m}, t^n - \frac{1}{t^n}) = \mathbb{C}(t) \Rightarrow \mathbb{C}((t^m + \frac{1}{t^m})^3, (t^n - \frac{1}{t^n})^3) = \mathbb{C}(t)$$

ということである. シンポジウムが終わり, 宇部に戻ってきた翌々日に, 同僚の白根竹人さんが「割合きれいに証明できますよ」と教えてくれた (流石!⁵). しかし, まだ筆者が理解できるレベルにまで到達していないので, ここには書かないでおく. また, 前原和寿先生からもメールでコメントを頂いた. 感謝いたします.

また, これもシンポジウムで質問があった, レベル [2] の曲線について. 簡単な計算から分かるように $\overline{CS}(m,n)^{[2]}$ は $\overline{C}$ タイプのリサーチ曲線となる. $\overline{C}$ タイプは常に open なので, ガロワ点を持つことはない. しかし, 適切なガロワ閉包を取れば Theorem 2 のときと同じように二面体被覆が得られるはずである.

最後に, レベル $[k_1, k_2]$ のリサーチ曲線に関する問題を列挙して, 拙稿の結びとしたい⁶.

Problem 4. C を レベル $[k_1, k_2]$ のリサーチ曲線とする. このとき,

- (1) C の次数 $\deg C$ を求めよ.
- (2) C の特異点の様子 (個数, タイプ) を調べよ.
- (3) C のガロワ点を求めよ. また, 個数を決定せよ.
- (4) 射影 π_P, π_Q, π_R を調べよ. 特に, ガロワ群 G_P, G_Q, G_R を求めよ.

⁴しかし, シンポジウムでお話した通り, 筆者には証明できなかった.

⁵2015/2/2 註 と書いたが, 証明は上手く行っていなかった. ということで現在も未解決のまま.

⁶解けたらご連絡を!

REFERENCES

- [1] Edward A. Hook, Multiple points on Lissajous's curves in two and three dimensions, *Ann. of Math. (2)* **4** (1903), 67–88.
- [2] 飯高 茂, 平面曲線の幾何, 共立講座 21 世紀の数学 18, 共立出版, 2001.
- [3] K. Miura, On dihedral Galois coverings arising from Lissajous's curves, *J. Geom.* **91** (2009), 63–72.
- [4] 三浦 敬, Galois points for Lissajous curves, 射影多様体の幾何とその周辺 2006 報告集 (2007), 97–107.
- [5] 三浦 敬, 非ガロワ点でのガロワ群について, 第 12 回代数曲線論シンポジウム報告集 (掲載予定).
- [6] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra* **226** (2000), 283–294.
- [7] D. Pecker, Simple constructions of algebraic curves with nodes, *Compositio Math.* **87** (1993), 1–4.
- [8] 酒井 文雄, 平面代数曲線, 数学のかんどころ 12, 共立出版, 2012.

〒 755-8555 山口県宇部市常盤台 2-14-1 宇部工業高等専門学校 一般科
E-mail address: kmiura@ube-k.ac.jp

A note on genus two fibrations on rational surfaces of degree seven

北川真也

一般の平面 3 次曲線が成すペンシルは 9 個の基点を持ち、基点を解消すると、階数 8 のルート格子 E_8 をモデル・ヴェイユ格子とする有理楕円曲面が得られる ([11]). 逆に、切断をもつ相対極小な有理楕円曲面は 9 回の適当な (-1) 曲線の縮約により、ファイバーの像が平面 3 次曲線のペンシルを成す. 有理曲面 X の相対極小な種数 2 曲線束 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ も同様に、特別な場合を除いて射影平面への双有理射 $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在して、 f の各ファイバーの v による像が平面曲線のペンシル Λ を成す. ピカール数 $\rho(X)$ に対して、 Λ の基点は無限近傍点も込めて数えると $\rho(X) - 1$ 個である. 基点を解消する事で、 Λ に付随する有理写像 $\Phi_{|\Lambda|}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ から元の $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が復元される.

f の切断を X 上の曲線とみなして、自己交点数が -1 となる切断を (-1) 切断と呼ぶ.

定理 1 ([4], [2], [6], [7]). X を非特異有理曲面、 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対極小な種数 2 曲線束とする. ピカール数 $\rho(X)$ について、 $11 \leq \rho(X) \leq 14$ である. f の一般ファイバーを F で表す. $\rho(X) \neq 14$ または f のモデル・ヴェイユ群が非自明と仮定すれば、双有理射 $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在する. さらに、それらの内で F の像の次数が最小となるように双有理射を選ぶと、 F の像の特異点の個数と重複度及び最小次数は次の通りである.

- (A) $\rho(X) = 11$ のとき, 5 重点と九つの 4 重点をもつ平面 13 次曲線,
- (B1) $\rho(X) = 12$ かつ f が (-1) 切断をもつとき,
八つの 3 重点と二つの 2 重点をもつ平面 9 次曲線,
- (B2) $\rho(X) = 12$ かつ f が (-1) 切断をもたないとき,
3 重点と十の 2 重点をもつ平面 7 次曲線,
- (C) $\rho(X) = 13$ のとき, 八つの 2 重点をもつ平面 6 次曲線,
- (D) $\rho(X) = 14$ のとき, 2 重点をもつ平面 4 次曲線.

ツェンの定理から、線織曲面はいつも切断を持つことが知られている。[1] にある其の証明を模倣して、次のことが分かる。

命題 2. 幾何種数が 0 なる非特異複素射影曲面の種数 2 曲線束は必ず切断を持つ。

証明. X を幾何種数が 0 なる非特異複素射影曲面とし、 B を非特異射影曲線、そして $f: X \rightarrow B$ は相対極小な代数曲線束で、一般ファイバー F は種数が 2 の曲線とする。 X の幾何種数が 0 なので、 $\text{NS}(X)$ と $H^2(X, \mathbb{Z})$ は同一視する。 $\{D.F \in \mathbb{Z} \mid D \in H^2(X, \mathbb{Z})\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルだから、整数 $n \geq 1$ を以って $n\mathbb{Z}$ の形に書ける。 $D \mapsto (1/n)(D.F)$ で定義される $\mathbb{Z}$ 準同型写像 $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ に着目する。このときポアンカレ双対定理から、任意の $D \in H^2(X, \mathbb{Z})$ に対して $D.F' = (1/n)(D.F)$ をみたす $F' \in H^2(X, \mathbb{Z})$ が存在する。したがって F は nF' と数値的に同値となる。特に $n^2 F'^2 = F^2 = 0$ から $F'^2 = 0$ である事に注意する。ここで種数公式から $nF'.K_X = F.K_X + F^2 = 2$ を得る上に、 $F'.K_X = F'.(K_X + F')$ は偶数である。したがって $n = 1$ でなければならない。よって $D_0.F = 1$ をみたす $D_0 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ が存在する。更に、次数が十分に大きい B の因子 L に対して、有効因子 $E \in |D_0 + f^*L|$ がとれる。このとき E の既約成分として、 $C.F = 1$ なる曲線 C が存在する。 $\square$

命題 2 より、 f は少なくとも一つは切断を持つ。その 1 つを適当に選び固定して、零切断 (O) とよぶ。また、 f の切断は X の曲線とみなす。ネロン・セヴェリ群 $\text{NS}(X)$ において、すべてのファイバーの既約成分全部と (O) が生成する部分群を T とおく。それらへ交点形式の (-1) 倍で内積をいれて、ネロン・セヴェリ格子 $\text{NS}(X)^-$ 、自明格子 T^- とよぶ。このとき塩田 [12] によるモデル・ヴェイユ格子の基本定理が成り立つ：モデル・ヴェイユ群 $\text{MWG}(f)$ は $\text{NS}(X)/T$ に同型、狭義モデル・ヴェイユ格子 $\text{MWL}(f)^0$ は直交補格子 $(T^-)^\perp \subset \text{NS}(X)^-$ に同型、モデル・ヴェイユ格子 $\text{MWL}(f)$ は $\text{MWL}(f)^0$ の双対格子に同型である。以上を受けて、フレーム格子を次のように定義する：

定義. $\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $\text{NS}(X_\lambda)^-$ が互いに同型な族とする。ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して、上の同一視で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $T_{\lambda_0}^- \subset T_\lambda^-$ が成り立つとき、 $\text{MWL}(f_{\lambda_0})$ を、族 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のフレーム格子とよぶ。

齋藤・榊原 [10] 及びヴィエト [8] 等の先行研究があり、定理 1 の (D) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面の族のフレーム格子は、[3, §7, Ch. 4] に於いて D_{12}^+ と呼ばれる階数 12 の正定値ユニモジュラ整格子である。

定理 1 の (B1) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面の族は、次のようにして小木曾・塩田による切断をもつ有理楕円曲面の分類 [9] に帰着する。特に、 E_8 がフレーム格子である。

定理 3. X を非特異有理曲面, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対極小な種数 2 曲線束とする. f の一般ファイバーを F で表す. $\rho(X) = 12$ かつ f は (-1) 切断 (O) をもつと仮定する. このとき f は (O) の他に (-1) 切断を持たず, 特異ファイバーについて次のどちらか一方が成り立つ:

- (i) 堀川 [5] による分類で (II_1) 型と命名された特異ファイバーを丁度 1 本だけ持つ. f の他の特異ファイバーは高々 (0) 型である.
- (ii) 堀川 [5] による分類で (I_1) 型と命名された特異ファイバーを丁度 2 本持つ. f の他の特異ファイバーは高々 (0) 型である.

さらに, $|F + 2K_X - 2(O)|$ は基点を持たないペンシルであり, 付随する射 $\Phi_{|F+2K_X-2(O)|}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は切断をもつ楕円曲線束を成す. $\Phi_{|F+2K_X-2(O)|}$ の相対極小モデルを $\epsilon: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ で表せば,

$$\text{MWG}(f) \simeq \text{MWG}(\epsilon) \quad \text{かつ} \quad \text{MWL}(f) \simeq \text{MWL}(\epsilon).$$

逆に, 任意の切断をもつ有理楕円曲面 $\epsilon: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して, 種数 2 の有理ファイバー曲面 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在して, f は 2 本の (I_1) 型の特異ファイバーと (-1) 切断 (O) を持ち, $\rho(X) = 12$, そして $\Phi_{|F+2K_X-2(O)|}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の相対極小モデルが元の $\epsilon: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ である.

定理 1 の (C) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面の族 $\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in \Lambda}$ のフレーム格子も, 次のように計算できる. 定理 1 の最小次数を与える双有理射 $X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^2$ で縮約される (-1) 曲線の X_λ への全引き戻しを e_i , 直線のそれを ℓ とおく. このとき適当に添え字を割り振って, $(O) = e_{12}$ かつ,

$$F = 6\ell - 2 \sum_{i=1}^8 e_i - \sum_{i=9}^{12} e_i, \quad \text{NS}(X_\lambda) = \mathbb{Z}\ell \oplus \bigoplus_{i=1}^{12} \mathbb{Z}e_i,$$

$-K_X + e_9 + e_{10} \in T_\lambda$ とできる. 一般の $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して

$$T_{\lambda_0} = \mathbb{Z}F \oplus \mathbb{Z}(O) \oplus \mathbb{Z}(-K_X + e_9 + e_{10}),$$

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $T_{\lambda_0} \subset T_\lambda$ が成り立つ. したがって, 次を得る.

定理 4. $\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in \Lambda}$ は, $\rho(X_\lambda) = 13$ なる種数 2 の有理ファイバー曲面の族とする. フレーム格子は階数 10 の正定値ユニモジュラ整格子であって, 適当な基底による拡大ディンキン図形は図 1 の通りである:

ここで, 各基底に円が対応して, 円内の数字は自己内積を表す. ただし自己内積が 2 の場合は省かれる. また二つの基底の内積が $(-k)$ のときに, 対応する二つの円を k 本の直線で結ぶ.

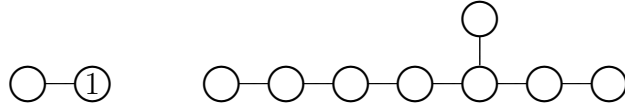


図 1.

定理 1 の (C) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面の族の部分族として, f_λ が堀川 [5] による分類で (V) 型と命名された特異ファイバーを丁度 1 本持つ族 $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in \Lambda}$ についても, 定理 3 と同様の結果が成り立つ. 特に, E_8 がフレーム格子である.

実は, 定理 1 の (B1), (C) 及び (D) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面は, いつも (-1) 切断を持ち, これを零切断に選ぶことで各々の族のフレーム格子が, 比較的容易に計算できた. しかし, (A) 及び (B2) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面は, (-1) 切断を持たない. その上, すべての切断の自己交点数が (-3) 以下である種数 2 の有理ファイバー曲面が存在する一方で, (-2) 切断しか持たない種数 2 の有理ファイバー曲面も存在して, 不揃いである.

例 5. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第一成分の座標を t , 第二成分の座標を x とする. また, $pr_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ で第一成分への射影を表す.

$$x^5 + tx^4 + tx^3 + t^2x + t^3 = 0$$

が定義する因子のザリスキ閉包を A とおく. 同じく $x + t = 0$ が定義する pr_1 の切断を C とする. pr_1 による $t = 0, \infty$ のファイバーをそれぞれ $\Gamma_{[0]}, \Gamma_{[\infty]}$ で表す. ここで, $B^\natural = A + C + \Gamma_{[0]} + \Gamma_{[\infty]}$ とおけば, $B^\natural$ は $\Gamma_{[0]}$ 上と $\Gamma_{[\infty]}$ 上で (V) 型の特異点を持つ. $B^\natural$ で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の有限二重被覆によって得られる正規曲面を, 更に特異点の標準解消を施して得られる曲面を $\tilde{X}$ で表す. pr_1 から誘導される $\tilde{X}$ の種数 2 曲線束の相対極小モデルを $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ とおく. このとき X は $K_X^2 = -2$ なる有理曲面で, $MWG(f)$ は自明である. f の唯一の切断 (O) は $(O)^2 = -2$ であり, C の $\tilde{X}$ への狭義引き戻しが $2(O)$ の全引き戻しである. f は $t = 0, \infty$ 上で (V) 型の特異ファイバーを持ち, その双対グラフは図 2 の通りである. また, f の他のファイバーは既約である.

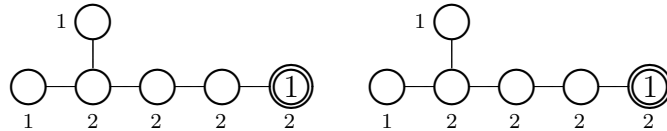


図 2.

次の補題から仮想切断を導入して、フレーム格子の定義を拡張する。

補題 6. D_1 及び D_2 は F との交点数が 1 となる X の因子とする. $\text{NS}(X)$ において, すべてのファイバーの既約成分全部と D_i が生成する部分加群を T_i とおく. このとき, $(T_1^-)^\perp \subset \text{NS}(X)^-$ と $(T_2^-)^\perp \subset \text{NS}(X)^-$ は格子として同型である.

証明. $L_i = (T_i^-)^\perp \subset \text{NS}(X)^-$, $i = 1, 2$ とおく. $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\alpha : L_1 \rightarrow L_2$ を, 任意の $H_1 \in L_1$ に対して $\alpha(H_1) = H_1 - (D_2 \cdot H_1)F$ で定める. 同じく $\beta : L_2 \rightarrow L_1$ を $\beta(H_2) = H_2 - (D_1 \cdot H_2)F$ とすれば, $\beta \circ \alpha$ と $\alpha \circ \beta$ はそれぞれ, L_1 と L_2 の恒等写像である. また, 明らかに α と β の双方共に交点数を保っているので, L_1 と L_2 は $\text{NS}(X)^-$ の部分格子として同型である. $\square$

定理 1 の (B2) に対応する種数 2 の有理ファイバー曲面の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in \Lambda}$ のフレーム格子は, 次のように計算できる. 定理 1 の最小次数を与える双有理射 $X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^2$ で縮約される (-1) 曲線の X_λ への全引き戻しを e_i , 直線のそれを ℓ とおく. このとき適当に添え字を割り振って, $(O)' = e_1 - e_2$ を仮想切断に取り,

$$F = 7\ell - 3e_1 - 2 \sum_{i=2}^{11} e_i, \quad \text{NS}(X_\lambda) = \mathbb{Z}\ell \oplus \bigoplus_{i=1}^{12} \mathbb{Z}e_i,$$

$e_{10} - e_{11}$, $-K_X + e_{11} \in T'_\lambda$ とできる. 一般の $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して

$$T'_{\lambda_0} = \mathbb{Z}F \oplus \mathbb{Z}(O)' \oplus \mathbb{Z}(e_{10} - e_{11}) \oplus \mathbb{Z}(-K_X + e_{11})$$

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $T_{\lambda_0} \subset T_\lambda$ が成り立つ. したがって, 次を得る.

定理 7. $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in \Lambda}$ は, $\rho(X_\lambda) = 12$ かつ (-1) 切断をもたない種数 2 の有理ファイバー曲面の族とする. フレーム格子は階数 10 の正定値ユニモジュラ整格子であって, 適当な基底による拡大ディンキン図形は図 3 の通りである:



図 3.

$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が (V) 型の特異ファイバーを 3 本もつならば, [5, 定理 2] より $\rho(X) = 11$ が従い, (A) の特殊な場合となる. このとき更に, f のモデル・ヴェイユ群が自明になる. 一方で (B2) の場合には, モデル・ヴェイユ群が自明となる例があまり構成できていない. 双対グラフが図 2 と同じになる特異ファイバーを持ちながら, モデル・ヴェイユ群が非自明となる例を構成できる.

謝辞. 例年は津山高専で開催されていたシンポジウムを, 昨年度に引き続き, 岐阜で開催させて頂きました. 連絡が遅くなり, 世話人の松田修先生をはじめ, 参加者の皆さんにご心配をおかけしました. しかしながら, シンポジウムでは活発に議論されて, 皆さんに喜んで頂けたような気が致します. また, 本稿執筆の機会を与えてくださった松田修先生に, 心から厚く御礼申し上げます.

参考文献

- [1] A. Beauville: *Complex algebraic surfaces*. London Mathematical Society Student Texts, **34**, Cambridge University Press, Cambridge, pp. x+132 (1996).
- [2] A. Calabri and C. Ciliberto, Birational classification of curves on rational surfaces, Nagoya Math. J. **199** (2010), 43–93.
- [3] Conway J. H., Sloane, N. J. A.: *Sphere packings, lattices and groups*, with additional contributions by E. Bannai, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **290**, Springer-Verlag, New York, 1990
- [4] M. De Franchis, Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2, Rend. Circ. Mat. Palermo **13** (1899), 1–27.
- [5] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, in Complex Analysis and Algebraic Geometry, a Volume Dedicated to Kodaira K., pp. 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press (1977).
- [6] S. Kitagawa, Pencils of genus two curves on rational surfaces, preprint.
- [7] S. Kitagawa, Extremal hyperelliptic fibrations on rational surfaces, Saitama Math. J. **30** (2013), 1–14.
- [8] K. V. Nguyen: On certain Mordell-Weil lattices of hyperelliptic type on rational surfaces. J. Math. Sci. (New York), **102**, 3938–3977 (2000)
- [9] K. Oguiso and T. Shioda, The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface, Comment. Math. Univ. St. Paul. **40** (1991), 83–99.
- [10] M.-H. Saito, K. Sakakibara: On Mordell-Weil lattices of higher genus fibrations on rational surfaces. J. Math. Kyoto Univ. **34**, 859–871 (1994)

- [11] T. Shioda, On the Mordell-Weil lattices, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39** (1990), 211–240.
- [12] T. Shioda, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve, in *New trends in algebraic geometry, Warwick, 1996*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **264**, pp. 359–373, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).

