

代数幾何シンポジウム 2013 in 岐阜
報告集

高専代数幾何学研究会編

(世話役：松田修，渡利正弘，北川真也)

2013 年 12 月

はじめに

本論文集は、2013 年度 8 月に岐阜県大垣市で開催した代数幾何シンポジウム 2013 の講演の記録と関連論文をまとめたものです。例年ですと、津山高専で開催しているこの会を、今年は大垣市で開催することができ、これまでとは違った意義を感じることができました。さらに、有志のご協力をいただきこのような報告集を出すことができました。記して感謝を申し上げます。

また、本シンポジウムの開催にあたり、津山高専校長裁量経費「津山高専創立 50 周年に係わる高専間の数学研究・教育連携の構築」（研究者代表：渡利正弘）、平成 23- 25 年度日本学術振興会科学研究補助金・基盤研究（C）課題番号 23531232（研究代表者：松田修）、授業料収入（教育研究）教育研究経費（北川真也）の支援を受けました。

2013 年 12 月 松田修，渡利正弘，北川真也

代数幾何シンポジウム 2013 in 岐阜

— 数学教育の話題もあります。 —

日時：8/8（木）・9（金）

場所：ソフトピアジャパン センタービル 10F 会議室 4 （大垣駅前）

プログラム

8 月 8 日（木）

午前（数学教育関連）

10:00-10:30

数学モデリングの実践例 1

「フラクタル連分数のカオスと n 次ペル方程式への発展研究」

間庭早紀子，丸尾優佳，尾島 悠莉（津山高専 3 年），松田修（津山高専）

10:45-11:15

数学モデリングの実践例 2

「Farey 数列の高次元化とその応用」，

小林祐志，赤松昌俊（津山高専 2 年），松田修（津山高専）

11:30-12:10

「有理曲面上の $\#$ 極小対とゴナリティー」松田 修（津山高専）

目次

飯高 茂： 第2種オイラー関数（オイラー関数の一般化）	1
Kazuhisa MAEHARA： Problems on Arithmetic Geometry --Mordell Conjecture of any dimension---	17
高橋 剛： 非特異5次曲線の二面体群に関する点射影	31
Hiroataka ISHIDA： Notes on certain surfaces of general type with a rational pencil	41
月岡 透： 小収縮を持つ4時限ファノ多様体の具体例	57
北川 真也： (V) 型の特異ファイバーを $3g-3$ 本持つ種数 $2g-2$ の有理ファイバー曲面 III	63
渡利 正弘： On the topology of compactified Jacobians of singular plane curves	73
松田 修：有理曲面上の $\mathbb{P}^1$ 極小対とゴナリティー	79
丸尾 優佳, 間庭 早紀子： n 次ペル方程式の研究	85
赤松昌俊, 小林祐志： ファレイ数列の高次元化の研究	99

第2種オイラー関数 (オイラー関数の一般化)

飯高 茂

平成 25 年 9 月 14 日

1 第2種オイラー関数 $\varphi_1(a)$

自然数 $a > 1$ に対して $1 < b < a$ を満たし, a と互いに素な自然数 b の個数を $\varphi(a)$ と書き, オイラー関数と言う. これはよく知られている.

一方, 負でない整数 d に対して 自然数 $n > 1$ の約数の d 乗の和を $\sigma_d(n)$ と表す. これは乗法性を持つ. すなわち,

$$a, b \text{ が互いに素なら } \sigma_d(ab) = \sigma_d(a)\sigma_d(b)$$

- $d = 0$ なら $\sigma_d(n)$ は約数の個数であり,
- $d = 1$ なら $\sigma_d(n)$ は約数の総和である.

$\sigma_0(n), \sigma_1(n)$ と $\sigma_2(n)$ については面白い性質があり研究するに足る対象である.

オイラー関数は a と互いに素な自然数 $b < a$ の個数なので, 約数の和関数 $\sigma_1(a)$ のように a と互いに素な自然数 $b < a$ の和を $\varphi_1(a)$ と書くことを考えて見たい. しかし, このように定義しても乗法性が成り立たないので実用的では無い.

そこで乗法性を成り立たせるように $\varphi_1(a)$ を定義しよう.

まず $a = p$ (素数の時) は p と互いに素な自然数 $b < p$ の和は $\sum_{b=1}^{p-1} b = \frac{p(p-1)}{2}$ となるので $\varphi_1(p) = \frac{p(p-1)}{2}$ となることは自然に受け入れられる.

一般に $a = p^e$ のとき, a より小さいが p の倍数以外の数の個数 $\varphi_1(p^e)$ は

$$\frac{p^e(p^e + 1)}{2} - p \frac{p^{e-1}(p^{e-1} + 1)}{2} = \frac{p^e(p^e - p^{e-1})}{2}.$$

よって $\varphi_1(p^e) = \frac{p^e(p^e - p^{e-1})}{2}$ と定める.

言い換えれば $\varphi_1(p^e) = \frac{p^e \varphi(p^e)}{2}$ と定義する.

さて一般の自然数 a については まず素因数分解して $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$ とおく. ここで $p_1, p_2, \dots, p_s$ は相異なる素数である. すなわち,

乗法性が成り立っているとして $\varphi_1(p_1^{e_1}) \varphi_1(p_2^{e_2}) \cdots \varphi_1(p_s^{e_s})$ を $\varphi_1(a)$ の定義とする. そしてこれを **第2種オイラー関数** とよぶことにする.

このようにオイラー先生の名前を借用するのはどうかと思う. しかし本企画は, 素人が数学の研究を始めよう, といって何か数学の発見をしようと趣旨である. 第2種オイラー関数とよんでこれを研究しようというので励みになるであろう. しかも, 本来のオイラー関数は $\varphi_0(a)$ と書いてもよい.

1.1 $\varphi_1(a)$ のオイラー関数表示

オイラー関数の乗法性によって $\varphi_1(p^e) = \frac{a\varphi(a)}{2^s}$ となる. s は a の素因子の個数である. $a > 1$ のとき

$$\varphi_1(a) = \frac{\varphi(a)a}{2^s} \leq \frac{(a-1)a}{2^s} \leq \frac{(a-1)a}{2^s} \leq \frac{(a-1)a}{2}$$

により, $\varphi_1(a) \leq \frac{(a-1)a}{2}$.

ここで等号が成立するなら $s = 1, \varphi(a) = a - 1$ なので a は素数.

1.2 $\varphi_1(a)$ の数表

オイラー関数の乗法性によれば $\varphi_1(a) = \frac{a\varphi(a)}{2^s}$ となる. ここで s は a の相異なる素数の個数である. これによると $\varphi_1(a)$ の計算は容易である. たとえば

$$\varphi_1(2) = \frac{2\varphi(2)}{2} = 1.$$

$$\varphi_1(3) = \frac{3\varphi(3)}{2} = 3,$$

$$\varphi_1(4) = \frac{4\varphi(4)}{2} = 4.$$

数表を与えよう.

表 1: オイラー関数と第 2 種オイラー関数

a	素因数分解	euler	素因数分解	euler2
2	[2]	1	[1]	1
3	[3]	2	[2]	3
4	[2,2]	2	[2]	4
5	[5]	4	[2,2]	10
6	[2,3]	2	[2]	3
7	[7]	6	[2,3]	21
8	[2,2,2]	4	[2,2]	16
9	[3,3]	6	[2,3]	27
10	[2,5]	4	[2,2]	10
11	[11]	10	[2,5]	55
12	[2,2,3]	4	[2,2]	12
13	[13]	12	[2,2,3]	78
14	[2,7]	6	[2,3]	21
15	[3,5]	8	[2,2,2]	30
16	[2,2,2,2]	8	[2,2,2]	64
17	[17]	16	[2,2,2,2]	136
18	[2,3,3]	6	[2,3]	27
19	[19]	18	[2,3,3]	171
20	[2,2,5]	8	[2,2,2]	40
21	[3,7]	12	[2,2,3]	63

1.3 $\varphi_1(a)$ による素数判定

$a > 1$ のとき

$$\varphi_1(a) = \frac{\varphi(a)a}{2^s} \leq \frac{(a-1)a}{2^s} \leq \frac{(a-1)a}{2^s} \leq \frac{(a-1)a}{2}$$

により, $\varphi_1(a) \leq \frac{(a-1)a}{2}$.

ここで等号が成立するなら $s = 1, \varphi(a) = a - 1$ なので a は素数. このようにして $\varphi_1(a)$ による素数判定法ができた.

オイラー関数の性質をみながら第 2 種オイラー関数ではどのような結果がでるだろうか. 少しずつやってみるしかない.

2 $a = 2p$ の場合

自然数 a が素数 p の 2 倍, すなわち $2p$ としよう. さらに p は奇数として計算する. $2, p$ は互いに素なので, 乗法性によって $a = 2p$ のとき

$$\varphi_1(a) = \varphi_1(2p) = \varphi_1(2)\varphi_1(p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

すると $8\varphi_1(a) = 4p(p-1)$. ゆえに

$$8\varphi_1(a) = a(a-2). \quad (1)$$

自然数 a が式 (1) を満たすとする, a は偶数. よって $a = 2k$ と書ける.

$k = 2^e L; e \geq 0, L: \text{奇数}$ と表すと $a = 2k = 2^{e+1}L$ により

式 (1) の左辺は

$$8\varphi_1(a) = 8\varphi_1(2^{e+1}L) = 8\varphi_1(2^{e+1})\varphi_1(L) = 2^{2e+3}\varphi_1(L)$$

式 (1) の右辺は $2^{e+1}L(2^{e+1}L - 2)$. ゆえに

$$2^e \varphi_1(L) = L(2^e L - 1).$$

これより $e = 0$.

$$\varphi_1(L) = L(L-1).$$

一方 $\varphi_1(L) = \frac{L \cdot \varphi(L)}{2^s}$. よって $\varphi(L) = 2^s(L-1) \leq L-1$. ゆえに $s = 1, L$ は素数. かくして次の定理をえた.

定理 1 自然数 a が奇素数 p の 2 倍, すなわち $2p$ とかける必要十分条件は次の等式を満たすことである.

$$8\varphi_1(a) = a(a-2). \quad (2)$$

簡単な結果ではあるが, 第 2 種オイラー関数を用いて得られた最初の結果なので定理としておく.

さて, 第 2 種オイラー関数をオイラー関数で書着直してみよう.

$8\varphi_1(a) = a(a-2)$ を満たす自然数 a があるとき, $\varphi_1(a) = \frac{a\varphi(a)}{2^s}$ を上式に代入すると

$$\varphi(a) = 2^{s-3}(a-2). \quad (3)$$

意外に簡単で美しい形になった. ここで s は異なる素因子の個数である. これが式 (2) と対等な式とはにはわかには信じがたいほどだ. 簡単な場合, たとえば $a = 2p$ なら $s = 2, a - 2 = 2(p - 1)$ なので式 (3) は成り立つ. だから, 大丈夫であろう.

$a = 2p$ と書けるときの約数の和関数 $\sigma(a)$ を用いると $2\sigma(a) = 3a + 6$ となる. 逆にこの式を満たす場合 $a = 2p$ と表されるが, この場合 p は 4 または奇素数である. $8 = 2 \times 4$ となるので 4 を擬素数と呼んだ.

擬素数やエイリアンが出る場合は, 面白いとみてもよい. しかし, 約数の和関数ではなく第 2 種オイラー関数を用いて類似した結果を考えると例外的な場合はあまりでてこないらしい.

読者は $3p$ の場合を試みるとよい.

3 $a = q^\varepsilon p$ の場合

与えられた奇素数 q と自然数 ε に対して $a = q^\varepsilon p$ の場合, (ただし $p \neq q$.) $\varphi_1(a) = \varphi_1(q^\varepsilon p) = 2(p - 1) = \frac{q^{\varepsilon-1}(q-1)p(p-1)}{4}$ によれば

$$q\varphi_1(a) = \frac{(q-1)}{4q^\varepsilon}a(a-q). \quad (4)$$

次に自然数 a が式 (4) を満たすとき, $a = q^\varepsilon p$ と書けるかどうかをみてみたい.

その前に $\varphi_1(a) = \frac{a\varphi(a)}{2^s}$ により式 (4) を書き直すと次の形になる.

$$q\varphi(a) = 2^{s-2}(q-1)(a-q^\varepsilon). \quad (5)$$

さて, この式を満たす自然数 a を求めよう.

式 (5) を $\text{mod } q$ で考えると $-a \equiv 0 \pmod{q}$.

$a = q^e L$ とおく. ここでは $e > 0, L \not\equiv 0 \pmod{q}$. すると $s \geq 2$.

式 (5) に代入すると

$$q^e(q-1)\varphi(L) = (q-1)2^{s-2}(q^e L - q^\varepsilon).$$

$\eta = \varepsilon - e$ とおけば

$$\varphi(L) = 2^{s-2}(L - q^\eta).$$

1. $\eta = 0$ すなわち $\varepsilon = e$ のときは

$$\varphi(L) = 2^{s-2}(L - 1).$$

$s \geq 2$ により $2^{s-2}(L - 1) \geq L - 1$. $L > 1$ なので $\varphi(L) \leq L - 1$. よって $\varphi(L) = (L - 1)$. したがって L は素数で $a = q^\varepsilon L$.

2. $\eta > 0$ のときは

$$q^\eta = L - \frac{\varphi(L)}{2^{s-2}}.$$

L の素因子の個数を $s(L)$ とおけば $s = s(L) + 1$.

3.1 $q^n = L - \varphi(L)$

オイラー関数の場合に $q^n = L - \varphi(L)$ の解を求める.

表 2: 3^n の場合

L	素因数分解	$\varphi(L)$	$[q^n]$
115	[5, 23]	88	$[3^3]$
187	[11, 17]	160	$[3^3]$
781	[11, 71]	700	$[3^4]$
1195	[5, 239]	952	$[3^5]$
1357	[23, 59]	1276	$[3^4]$
1537	[29, 53]	1456	$[3^4]$
2563	[11, 233]	2320	$[3^5]$
3859	[17, 227]	3616	$[3^5]$
7909	[11, 719]	7180	$[3^6]$
9259	[47, 197]	9016	$[3^5]$

表 3: 5^n の場合

L	素因数分解	$\varphi(L)$	$[q^n]$
69	[3, 23]	44	$[5^2]$
133	[7, 19]	108	$[5^2]$
1469	[13, 113]	1344	$[5^3]$
1853	[17, 109]	1728	$[5^3]$
2033	[19, 107]	1908	$[5^3]$
2369	[23, 103]	2244	$[5^3]$
2737	[7, 17, 23]	2112	$[5^4]$
2813	[29, 97]	2688	$[5^3]$
3293	[37, 89]	3168	$[5^3]$
3569	[43, 83]	3444	$[5^3]$
3713	[47, 79]	3588	$[5^3]$
3869	[53, 73]	3744	$[5^3]$
3953	[59, 67]	3828	$[5^3]$
4333	[7, 619]	3708	$[5^4]$
7969	[13, 613]	7344	$[5^4]$

3.2 $L - \frac{\varphi(L)}{2^{s(L)-1}} = q^n$ の解

$L - \frac{\varphi(L)}{2^{s(L)-1}}$ が素数べき q^n の場合はどのくらい解があるのだろうか. このように問いかけてもどうなるかは見当もつかないのでパソコン君にやってもらおう.

第 2 種オイラー関数の場合 L の素因子の個数がからんだ修正項がついている. この結果解の数が少なくなっている.

たとえば, $q^e = 3^e$ の場合には解がないらしい.

これが本当ならば $q = 3$ のとき $q\varphi(a) = 2^{s-2}(q-1)(a-q^e)$ にはエイリアン解が無い.

パソコン君に探せてもエイリアン解はみつからないという.

研究課題 3^e の場合に第 2 種オイラー関数を用いるとエイリアン解は存在しないことを示せ.

表 4: $q^\eta = L - \varphi(L)$ の解; 一般の場合

L	素因数分解	$\varphi(L)$	$[q^\eta]$
15	[3,5]	8	[7]
33	[3,11]	20	[13]
35	[5,7]	24	[11]
51	[3,17]	32	[19]
65	[5,13]	48	[17]
69	[3,23]	44	$[5^2]$
77	[7,11]	60	[17]
87	[3,29]	56	[31]
91	[7,13]	72	[19]
95	[5,19]	72	[23]
115	[5,23]	88	$[3^3]$
119	[7,17]	96	[23]
123	[3,41]	80	[43]
133	[7,19]	108	$[5^2]$
141	[3,47]	92	$[7^2]$
143	[11,13]	120	[23]
161	[7,23]	132	[29]
177	[3,59]	116	[61]
185	[5,37]	144	[41]
187	[11,17]	160	$[3^3]$

3.3 5^η の場合の解

表 5: $q^n = L - \frac{\varphi(L)}{2^{s(L)}-1}$ の解

L	素因数分解	$[q^n]$	$\varphi(L)$
6	[2,3]	[5]	2
14	[2,7]	[11]	6
15	[3,5]	[11]	8
22	[2,11]	[17]	10
33	[3,11]	[23]	20
35	[5,7]	[23]	24
38	[2,19]	[29]	18
62	[2,31]	[47]	30
65	[5,13]	[41]	48
66	[2,3,11]	[61]	20
69	[3,23]	[47]	44
77	[7,11]	[47]	60
85	[5,17]	[53]	64
87	[3,29]	[59]	56
94	[2,47]	[71]	46
95	[5,19]	[59]	72
166	[2,83]	$[5^3]$	82
221	[13,17]	$[5^3]$	192

3.4 $q^e = 5^2$ の場合の解

$q^e = 5^2$ の場合の解を求めてみよう.

この場合はエイリアン解 $a = 30$ が 1 つある.

オイラー関数ではこの場合, エイリアン解が無い. 第 2 種オイラー関数にしたら簡単ながらエイリアン解が 1 つみつかった.

しかしこれはごく例外的だ. 第 2 種オイラー関数ではエイリアン解は無くならないにしてもかなり少なくなる. 第 2 種オイラー関数は制約力がそれなりに強いと考えてみたくなる.

3.5 $q^e = 5^4$ の場合の解; オイラー関数のとき

$q^e = 5^4$ の場合の解 a を 30000 以下に限って求めてみよう.

$q = 5^4$ 印のついたエイリアン解が 12 個ある.

表 6: $[5^n]$ の場合の解; 第 2 種オイラー関数を用いる

L	素因数分解	$[q^n]$	$\varphi(L)$
6 *	[2,3]	[5]	2
166	[2,83]	$[5^3]$	82
221	[13,17]	$[5^3]$	192
4166	[2,2083]	$[5^5]$	2082

表 7: 第 2 種オイラー関数を用いる

a	素因数分解	$\varphi(a)$
30 *	[2,3,5]	8
50	$[2,5^2]$	20
75	$[3,5^2]$	40
175	$[5^2,7]$	120
275	$[5^2,11]$	200
325	$[5^2,13]$	240

3.6 $q = 5^4$ の場合の解, 第 2 種オイラー関数

印のついたエイリアン解が 3 個でしかも最初にあるだけ. 行儀の良い模範的なエイリアンである.

表 8: $q = 5^4$ の場合の解 a ; オイラー関数のとき

a	素因数分解	$\varphi(a)$
1250	$[2, 5^4]$	500
1725 *	$[3, 5^2, 23]$	880
1875	$[3, 5^4]$	1000
3325 *	$[5^2, 7, 19]$	2160
4375	$[5^4, 7]$	3000
6875	$[5^4, 11]$	5000
7345 *	$[5, 13, 113]$	5376
8125	$[5^4, 13]$	6000
9265 *	$[5, 17, 109]$	6912
10165 *	$[5, 19, 107]$	7632
10625	$[5^4, 17]$	8000
11845 *	$[5, 23, 103]$	8976
11875	$[5^4, 19]$	9000
14065 *	$[5, 29, 97]$	10752
14375	$[5^4, 23]$	11000
16465 *	$[5, 37, 89]$	12672

4 素因子が複数個でかつべきの場合

q_1, q_2 を相異なる素因数とし, $Q = q_1 q_2, \overline{Q} = (q_1 - 1)(q_2 - 1)$ とおく. q_1, q_2 と異なる素因数 p に対して $m = Q^\varepsilon, a = mp$ とおく.

$$\varphi(a) = \varphi(Q^\varepsilon)\varphi(p) = Q^{\varepsilon-1}\overline{Q}(p-1)$$

によって, オイラー関数のときの基本方程式

$$Q\varphi(a) = \overline{Q}(a - Q^\varepsilon). \quad (6)$$

ができた. $Q = 6$ のとき $\overline{Q} = 2$, そして

$$3\varphi(a) = a - 6^\varepsilon.$$

第2種オイラー関数のときは

$$Q\varphi(a) = 2^{s-3}\overline{Q}(a - Q^\varepsilon). \quad (7)$$

s は a の相異なる素因子の数である.

$Q = 6$ のときは

$$3\varphi(a) = 2^{s-3}(a - 6^\varepsilon).$$

表 9: $q = 5^4$ の場合の解 a ; オイラー関数のとき

17845 *	[5, 43, 83]	13776
18125	[5 ⁴ , 29]	14000
18565 *	[5, 47, 79]	14352
19345 *	[5, 53, 73]	14976
19375	[5 ⁴ , 31]	15000
19765 *	[5, 59, 67]	15312
23125	[5 ⁴ , 37]	18000
25625	[5 ⁴ , 41]	20000
26875	[5 ⁴ , 43]	21000
29375	[5 ⁴ , 47]	23000

表 10: $q = 5^4$ の場合の解 a ; 第 2 種オイラー関数のとき

a	素因数分解	$\varphi(a)$
750 *	[2, 3, 5 ³]	200
830 *	[2, 5, 83]	328
1105 *	[5, 13, 17]	768
1250	[2, 5 ⁴]	500
1875	[3, 5 ⁴]	1000
4375	[5 ⁴ , 7]	3000
6875	[5 ⁴ , 11]	5000
8125	[5 ⁴ , 13]	6000
10625	[5 ⁴ , 17]	8000
11875	[5 ⁴ , 19]	9000
14375	[5 ⁴ , 23]	11000
18125	[5 ⁴ , 29]	14000

こうして, 第 2 種オイラー関数という複雑そうなものが係数に 2^{s-3} がつくというわずかな違いしかない.

5 $a = 6^\varepsilon p$ の場合

そこで, パソコン君に計算してもらう.

表 11: $a = 6^\varepsilon p$ の場合; オイラー関数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
5520 *	$[2^4, 3, 5, 23]$	1408
6480	$[2^4, 3^4, 5]$	1728
8976 *	$[2^4, 3, 11, 17]$	2560
9072	$[2^4, 3^4, 7]$	2592
14256	$[2^4, 3^4, 11]$	4320
16848	$[2^4, 3^4, 13]$	5184
22032	$[2^4, 3^4, 17]$	6912
24624	$[2^4, 3^4, 19]$	7776

エイリアンは * がついているがわずか 2 つ.

表 12: $a = 6^\varepsilon p$ の場合; 第 2 種オイラー関数 (エイリアンはいない.)

a	素因数分解	$\varphi(a)$
6480	$[2^4, 3^4, 5]$	1728
9072	$[2^4, 3^4, 7]$	2592
14256	$[2^4, 3^4, 11]$	4320
16848	$[2^4, 3^4, 13]$	5184
22032	$[2^4, 3^4, 17]$	6912
24624	$[2^4, 3^4, 19]$	7776

5.1 証明

1. オイラー関数のとき

$a = 6^\varepsilon \cdot p$ とおけば

$3\varphi(a) = a - 6^\varepsilon$ の解 a を探す.

$a > 2$ のとき $\varphi(a)$ は偶数なので上の式より a も偶数. $a = 2^e k, (k : \text{奇数})$ と表すと

$3\varphi(a) = 3 \times 2^{e-1} \times 2\varphi(k)$, と $a - 6^\varepsilon = 2^e k - 6^\varepsilon$.

よって

$$3 \times 2^e \times \frac{\varphi(k)}{2} = 2^e k - 6^\varepsilon.$$

すなわち

$$\frac{3\varphi(k)}{2} = k - 2^\eta 3^\varepsilon.$$

ここで $\eta = \varepsilon - e$.

$\eta > 0$ のとき

$k : \text{奇数}$ によって, $\frac{\varphi(k)}{2}$ も奇数 になる. すると, オイラー関数の性質で k の素因子は 1 個で $k = q^E$ と素数 q で書ける.

$$3 \times q^{E-1} \frac{q-1}{2} = q^E - 2^\eta 3^\varepsilon$$

になるので $q = 3$. $3 \times q^{E-1} \frac{q-1}{2} = 3^E, q^E = 3^E$ によって矛盾する.

$\eta = 0$ のとき $a = 2^\varepsilon k$ なので

$$3 \frac{\varphi(k)}{2} = k - 3^\varepsilon.$$

これより, k は 3 の倍数. $k = 3^f L$ (L は 3 で割れない) と表すとき

$$3^f \varphi(L) = 3^f L - 3^\varepsilon.$$

よって $\eta = \varepsilon - f$ とおけば

$$\varphi(L) = L - 3^\eta.$$

$\eta = 0$ なら $\varphi(L) = L - 1$. よって L は素数なのでこれを p と書くと $a = 6^\varepsilon p$.

$\eta > 0$ なら $\varphi(L) = L - 3^\eta$ の解 L によって $a = 2^\varepsilon 3^f L$.

これからエイリアン解が出て来る.

2. 第2種オイラー関数のとき

$3\varphi(a) = 2^{s-3}(a - 6^\varepsilon)$ の解 a を探す.

最初に a が偶数であること背理法で示す.

a が奇数なら s は a の相異なる素因子の数なので $\varphi(a)$ を素因数分解したときの2の指数は s 以上. $2^{s-3}a$ の2の指数は $s-3$ なのでこれは矛盾.

$a = 2^e k, (k : \text{奇数})$ と表すと

$$3 \times 2^{e-1} \times \varphi(k) = 2^{s-3}(2^e k - 6^\varepsilon).$$

$k : \text{奇数}$ でその相異なる素因子の数は $s-1$ なので $2^{e-1} \times \varphi(k)$ を素因数分解したときの2の指数は $e-1 + s-1 = e+s-2$ 以上.

一方 $\varepsilon > e$ なら $2^{s-3}(2^e k - 6^\varepsilon)$ の2の指数は $s-3+e$. これは矛盾するから $\varepsilon = e$.

したがって $a = 2^e k$ なので

$$3\varphi(k) = 2^{s-2}(k - 3^\varepsilon).$$

これより, k は3の倍数. $k = 3^f L$ (L は3で割れない) と表すとき

$$2 \times 3^f \times \varphi(L) = 2^{s-3}(3^f L - 3^\varepsilon).$$

ゆえに

$$\varphi(L) = 2^{s-3}(L - 3^\eta).$$

ここで $\eta = \varepsilon - f$. さらに $s-2$ は L の相異なる素因子の数.

$\eta = 0$ なら L は素数なのでこれを p と書くと $a = 6^\varepsilon p$.

$\eta > 0$ なら $\varphi(L) = 2^{s-3}(L - 3^\eta)$ の解 L によって $a = 2^\varepsilon 3^f L$.

6 15^ε のとき

$m = 15^\varepsilon$ のとき $a = mp = 15^\varepsilon p$, ($p \neq 3, 5$: 素数) とすると

$$\varphi(a) = \varphi(mp) = 15^{\varepsilon-1}(p-1).$$

なので $15\varphi(a) = 8a - 15^\varepsilon$.

表 13: $m = 15^3$ のとき; オイラー関数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
6750	$[2, 3^3, 5^3]$	1800
17955 **	$[3^3, 5, 7, 19]$	7776
23625	$[3^3, 5^3, 7]$	10800
36975 *	$[3, 5^2, 17, 29]$	17920
37125	$[3^3, 5^3, 11]$	18000
43875	$[3^3, 5^3, 13]$	21600
45135 *	$[3^2, 5, 17, 59]$	22272
54855 *	$[3^2, 5, 23, 53]$	27456
57375	$[3^3, 5^3, 17]$	28800
61335 *	$[3^2, 5, 29, 47]$	30912
64125	$[3^3, 5^3, 19]$	32400
77625	$[3^3, 5^3, 23]$	39600
85695 *	$[3, 5, 29, 197]$	43904

エイリアン解のうち, 1 番目にある 17955 ($[3^3, 5, 7, 19]$) は表 5 にある $L = 133 = 7 \times 9$ から出て来る. 実際, $L - \varphi(L) = 133 - 108 = 5^2$. しかし, それ以外のエイリアンはみな a の 3 の指数が 3 未満なのである. したがって, これらは素性のわからないエイリアンである.

表 14: 15^ε のとき (続き)

a	素因数分解	$\varphi(a)$
97875	$[3^3, 5^3, 29]$	50400
104625	$[3^3, 5^3, 31]$	54000
124875	$[3^3, 5^3, 37]$	64800
126195 *	$[3, 5, 47, 179]$	65504
137535 *	$[3, 5, 53, 173]$	71552
138375	$[3^3, 5^3, 41]$	72000
145125	$[3^3, 5^3, 43]$	75600
147795 *	$[3, 5, 59, 167]$	77024
158625	$[3^3, 5^3, 47]$	82800
178875	$[3^3, 5^3, 53]$	93600
182895 *	$[3, 5, 89, 137]$	95744
199125	$[3^3, 5^3, 59]$	104400
205875	$[3^3, 5^3, 61]$	108000

表 15: $m = 15^\varepsilon$ のとき; 第 2 種オイラー関数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
6750	$[2, 3^3, 5^3]$	1800
23625	$[3^3, 5^3, 7]$	10800
37125	$[3^3, 5^3, 11]$	18000
43875	$[3^3, 5^3, 13]$	21600
57375	$[3^3, 5^3, 17]$	28800
64125	$[3^3, 5^3, 19]$	32400
77625	$[3^3, 5^3, 23]$	39600

Problems on Arithmetic Geometry —Mordell Conjecture of any dimension—

Kazuhisa Maehara

September 28, 2013

Abstract

After Mochizuki's theory, in this article we shall prove Mordell Conjecture of any dimension by obtaining Diophantine inequalities for algebraic points over an open dense subset of a projective smooth variety of log-general type.

1 Introduction

Let X be a normal scheme which is proper and flat over $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Let X^{an} denote the compact normal analytic space whose underlying set of complex points $X(\mathbf{C})$.

- Definition 1**
1. An arithmetic line bundle on X is a pair of a line bundle L on X and a hermitian metric $|\cdot|_L$ on the line bundle L^{an} on X^{an} which is compatible with the complex conjugation on X^{an} . This will be denoted by $\bar{L}$.
 2. When $\bar{L}, \bar{M}$ are arithmetic line bundles on X , a homomorphism $\bar{L} \rightarrow \bar{M}$ is defined to be a homomorphism $L \rightarrow M$ such that the local sections s of L with $|s|_L \leq 1$ map to those of M with $|s|_M \leq 1$.
 3. The global sections of $\bar{L}$ over X are the set of homomorphisms $\bar{\mathcal{O}}_X \rightarrow \bar{L}$. Here $\bar{\mathcal{O}}_X$ is a pair of $\mathcal{O}_X$ with trivial metric on $\mathcal{O}_{X^{an}}$.
 4. The isomorphism classes of arithmetic line bundles on X with addition defined by tensor products form a group $\mathrm{APic}(X)$.
 5. Let $f : Y \rightarrow X$ be a morphism of normal and flat, proper schemes over $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. The inverse image of an arithmetic line bundle $\bar{L}$ on X is a pair of f^*L with $f^*|\cdot|_L$, which we denote by $f^*\bar{L}$ or $\bar{L}|_Y$ for the sake of simplicity.

Let F be a finite extension of the rational number field $\mathbf{Q}$, i.e., a number field. Let $\mathcal{O}_F$ be the integral closure of $\mathbf{Z}$ in F . Let $V(F)$ be the set of valuations of F , which decomposes as a disjoint of nonarchimedean and archimedean valuations, i.e., $V(F)^{non} \cup V(F)^{arc}$. Let F_v be the completion of F at $v \in V(F)$ and $|\cdot|_v : F_v \rightarrow \mathbf{R}$ for the real valued valuation map determined by v . Let $v \in V(F)^{non}$ be a nonarchimedean

valuation. $\text{ord}_v : F_v \rightarrow \mathbf{Z}$ is the order defined by v . q_v denotes the cardinality of the residue field of F_v . A finite formal sum $\sum_{v \in V(F)} c_v v$ is an arithmetic divisor, where c_v is an integer if v is a nonarchimedian valuation and c_v is a real number if v is an archimedian valuation. This divisor is said to be effective if all the c_v are non negative. The set of arithmetic divisors forms an arithmetic divisor group $\text{ADiv}(F)$. A principal arithmetic divisor is

$$\sum_{v \in V(F)^{\text{non}}} \text{ord}_v(f) \cdot v - \sum_{v \in V(F)^{\text{arc}}} [F_v : \mathbf{R}] \cdot \log(|f|_v) \cdot v$$

where $f \in F$. These principal arithmetic divisors form the principal arithmetic divisor group, which denotes $\text{APrc}(F)$. It is well-known that

$$\text{APic}(\text{Spec}(\mathcal{O}_F)) \cong \text{ADiv}(F)/\text{APrc}(F)$$

The degree of an arithmetic divisor $\sum_{v \in V(F)} c_v v$ is defined to be

$$\deg_F(\sum_{v \in V(F)} c_v v) = \sum_{v \in V(F)^{\text{non}}} c_v \log(q_v) + \sum_{v \in V(F)^{\text{arc}}} c_v$$

which determines a homomorphism $\text{ADiv}(F) \rightarrow \mathbf{R}$ which factors through $\text{APiv}(\text{Spec}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow \mathbf{R}$ since the kernel of $\deg$ is $\text{APrc}(F)$. Let K be a finite extension of F . Defining

$$\underline{\deg}_K = \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \cdot \deg_K, \text{ we have}$$

$$\underline{\deg}_K(\bar{L}) = \underline{\deg}_F(\bar{L})$$

Note that

$$X(\bar{\mathbf{Q}}) = \bigcup_{[F:\mathbf{Q}] < \infty, F \subset \mathbf{Q}} X(F)$$

For a geometric point $x \in X(\bar{\mathbf{Q}})$, i.e., $x : \text{Spec}(F) \rightarrow X$, we have a morphism $x_F : \text{Spec}(\mathcal{O}_F) \rightarrow X$. Given an arithmetic line bundle L on X , we define a real number

$$\text{ht}_{\bar{L}}(x) = \underline{\deg}_F(x_F^* \bar{L})$$

This is called height function.

We denote by $X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d} \subset X(\bar{\mathbf{Q}})$, where d is a non-negative integer or the infity ∞ the union of the subsets $X(F)$ when F is a number field with $[F : \mathbf{Q}] \leq d$. A compact domain is a compact subset of a topological space which is the closure of its interior. Let $V \subset V(\mathbf{Q})$ be a finite set that contains all the archimedian points $V(\mathbf{Q})^{\text{arc}}$. For each $v \in V^{\text{arc}} = V \cap V(\mathbf{Q})^{\text{arc}}$ (resp. $v \in V^{\text{non}} = V \cap V(\mathbf{Q})^{\text{non}}$), let

$$K_v \subset X^{\text{an}}$$

(resp.

$$K_v \subset X(\bar{\mathbf{Q}})$$

) be a non-empty complex conjugate stable compact domain (resp. a non-empty $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_v/\mathbf{Q}_v)$ -stable subset whose intersection with each $X(K) \subset X(\bar{\mathbf{Q}}_v)$, for $K \subset \bar{\mathbf{Q}}_v$

a finite extension of $\mathbf{Q}_v$ is a compact domain in $X(K)$ such that $K_v \neq X^{an}$ (resp. $K_v \neq X(\bar{\mathbf{Q}})$). We set

$$K_V \subset X(\bar{\mathbf{Q}})$$

which is the set of points $x \in X(F) \subset X(\bar{\mathbf{Q}})$ where $[F : \mathbf{Q}] < \infty$ such that since $F \subset F_{v=\text{arc}}, F \subset F_{v=\text{non}},$

1. for each archimedean valuation $v \in V^{\text{arc}}$ the set of $[F : \mathbf{Q}]$ -points of $X(\mathbf{C})$ determined by $x \in X(F)$ is contained in K_v .
2. for each non archimedean valuation $v \in V^{\text{non}}$ the set of $[F : \mathbf{Q}]$ -points of $X(\mathbf{Q}_v)$ determined by $x \in X(F)$ is contained in K_v . This K_V is said to be a compactly bounded subset of $X(\bar{\mathbf{Q}})$. $\{K_v\}_{v \in V}$ is said to be the bounding domains of K_V .

Proposition 1 1. Let L and M be line bundles on X and $\bar{L}, \bar{M}$ arithmetic line bundles. We have

$$\text{ht}_{\bar{L} \times \bar{M}}(x) = \text{ht}_{\bar{L}}(x) + \text{ht}_{\bar{M}}(x)$$

for $x \in X(\bar{\mathbf{Q}})$.

2. If some tensor power of $L_{\mathbf{Q}} = L|_{X_{\mathbf{Q}}}$ is spanned by its global sections, then there exists a constant C for all $x \in X(\bar{\mathbf{Q}})$.

$$\text{ht}_{\bar{L}}(x) \geq C$$

3. The BD-class of $\text{ht}_{\bar{L}}$ depends only on the isomorphism class of the line bundle $L_{\mathbf{Q}}$ on $X_{\mathbf{Q}}$. We can write a BD-class of $\text{ht}_{L_{\mathbf{Q}}}$ or ht_L instead of the BD-class of $\text{ht}_{\bar{L}}$.
4. Let d be a natural number and C a real number. Assume a line bundle $L_{\mathbf{Q}}$ is ample on $X_{\mathbf{Q}}$. Then the set of points $x \in X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$ such that $\text{ht}_{\bar{L}} \leq C$ is finite.

Definition 2 1. Let L be a finite extension field of a number field K and B, A rings of integers of L and K , respectively. Let $\text{Tr}_{L/K}$ be the trace map and a fractional ideal

$$\{x \in L | \text{Tr}_{L/K}(xB) \subset A\}$$

, which is called codifferent ideal and is denoted by $D(B/A)^{-1}$. Since $B \subset D(B/A)^{-1}$, $(B : D(B/A)^{-1}) = D(B/A)$ is an integral ideal of B , which is said to be different ideal of L/K or conjugate difference product of B/A .

2. Given a geometric point $\text{Spec}(\bar{\mathbf{Q}}) \rightarrow X$, we have a minimal field of definition F of x .
3. Let Z be a normal noetherian scheme Z and D an effective Cartier divisor contained in the regular locus of Z . Then the closed reduced subscheme D_{red} is also an effective Cartier divisor.

4. Let $x \in X(\bar{\mathbf{Q}})$ and F a minimal definition field of x . The different ideal of $F/\mathbf{Q}$ determines an effective arithmetic divisor :

$$\delta_x \in \text{ADiv}(F)$$

which is supported in $V(F)^{\text{non}}$.

5. The following map

$$\text{logdiff}_X : X(\bar{\mathbf{Q}}) \ni x \mapsto \deg_F(\delta_x) \in \mathbf{R}$$

is said to be log-different function logdiff_X on $X(\bar{\mathbf{Q}})$.

6. Given an effective Cartier divisor D on X , let U_X denote $X \setminus D$. Let $x \in U_X(F) \subset U_X(\mathbf{Q})$, where F is a minimal definition field of x . This point x gives rise to a unique morphism $\text{Spec}(\mathcal{O}_F) \rightarrow X$. Hence we have a pull-back of D to $\text{Spec}(\mathcal{O}_F)$ and we denote it by D_x . Then (D_x) is an effective arithmetic divisor in $\text{ADiv}(F)$ which is supported in $V(F)^{\text{non}}$. $(D_x)_{\text{red}} \in \text{ADiv}(F)$ is said to be the conductor of x and the following map is said to be log-conductor function:

$$\text{logcond}_D : U_X(\bar{\mathbf{Q}}) \ni x \mapsto \deg_F((D_x)_{\text{red}})$$

7. The log-different function logdiff_X on $X(\mathbf{Q})$ depends only on $X_{\mathbf{Q}}$. The BD-class of logcond_D on $U_X(\mathbf{Q})$ depends only on $(X_{\mathbf{Q}}, D_{\mathbf{Q}})$.

Proposition 2 Let D be an effective Cartier divisor on X , $\bar{L} = (L, | - |_L)$ an arithmetic line bundle on X such that $L = \mathcal{O}_X(D)$. Let $U_X = X \setminus D$, $\text{ht}_D = \text{ht}_{\bar{L}}$. Then there exists a constant C that depends only on $(X_{\mathbf{Q}}, D_{\mathbf{Q}})$ such that

$$\text{logcond}_D \leq \text{ht}_D + C$$

on $U_X(\bar{\mathbf{Q}})$.

Proof 1 Let D be an effective Cartier divisor on X , $\bar{L} = (L, | - |_L)$ an arithmetic line bundle on X such that $L = \mathcal{O}_X(D)$. Let $U_X = X \setminus D$, $\text{ht}_D = \text{ht}_{\bar{L}}$. Then the arithmetic line bundle $\bar{L}$ has a hermitian metric $| - |_L$ on a line bundle L^{an} over X^{an} determined by L compatible with the complex conjugation. For $x \in X(\bar{\mathbf{Q}})$ it gives $x_F : \text{Spec}(\mathcal{O}_F) \rightarrow X$, where F is the minimal definition field of x , and

$$\text{ht}_{\bar{L}} = \deg_F(x_F^* \bar{L}) \in \mathbf{R}$$

Let s is a global section of L which gives D . Then the contribution of height of $\bar{L}$ at archimedian primes is given by the continuous function $|s|_{\bar{L}}$ on the compact analytic space X^{an} . Hence it is bounded. At nonarchimedian primes the difference is given by $(x_F^* D)_{\text{red}}$ of logcond_D .

We refer to ([Baki], [Mzk0], [Mzk1], [Mzk2], [Mzk3], [Mzk4]).

Theorem 1 (Mochizuki) *The following two equivalent assertions hold.*

1. (ABC Conjecture) *Let X be a smooth, proper, geometrically connected curve over a number field and $D \subset X$ a reduced divisor. Let U_X denote $X \setminus D$, d a positive number and ϵ a positive real number. Suppose $\omega_X(D)$ is big, i.e., $\kappa(U_X) = 1$. Then the inequality of BD-classes of functions*

$$\text{ht}_{\omega_X(D)} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_D)$$

holds on $U_X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

2. (ABC Conjecture for S -supported compactly bounded set) *Let S be a finite set of prime numbers. Let $P = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1$ be the projective line over $\mathbf{Q}$, C the divisor consisting of the three points $0 + 1 + \infty$. Let d be a positive number and ϵ a positive real number. Let $K_V \subset U_X(\bar{\mathbf{Q}})$ be a compactly bounded subset of $P(\bar{\mathbf{Q}})$ such that $V \supset S$, $V^{\text{arc}} = V(\mathbf{Q})^{\text{arc}}$. Then the inequality of BD-classes of functions*

$$\text{ht}_{\omega_P(C)} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_P + \log \text{cond}_C)$$

holds on $K_V \cap U_P(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

We shall prove the following theorems by using and by virtue of Mochizuki's theorems ([Baki], [Mzk0], [Mzk1], [Mzk2], [Mzk3], [Mzk4]).

Theorem 2 *Let X be a smooth, projective, geometrically irreducible and reduced scheme, i.e., variety over a number field. Let D be a geometrically reduced divisor with only normal crossings on X . Let $U_X = X \setminus D$, d a strictly positive integer, and ϵ a positive real number. Let ω_X be a canonical invertible sheaf of X . Suppose $\omega_X(D)$ is big, i.e., U_X is of log-general type. Then one obtains an inequality of bounded discrepancy classes*

$$\text{ht}_{\omega_X(D)} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_D)$$

of functions on $U_X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

Theorem 3 *Let X be a smooth, projective, geometrically irreducible and reduced scheme, i.e., variety over a number field. Let D be a geometrically reduced divisor with only normal crossings on X . Let $U_X = X \setminus D$, d a strictly positive integer, and ϵ a positive real number. Let ω_X be a canonical invertible sheaf of X . Suppose $\omega_X(D)$ is big, i.e., U_X is of log-general type. Let L be an ample invertible sheaf over X . There exist integers m and N such that $(\omega_X(D)^{\otimes m} \otimes L^{-1})^{\otimes N}$ is effective which is denoted by E . Then there exist only finite number of d -rational points on $(X \setminus (D + E))(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$ such that $\log \text{cond}_D(x)$ is bounded.*

Theorem 4 *Let X be a smooth, projective, geometrically irreducible and reduced scheme, i.e., variety over a number field. Let d be a strictly positive integer, and ϵ a positive real number. Let ω_X be a canonical invertible sheaf of X . Then one obtains an inequality of bounded discrepancy classes*

$$\text{ht}_{\omega_X} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_X)$$

of functions on $X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

2 Plan of proofs

After Mochizuki's theory, we first make a following lemma.

Theorem 5 *Let X be a smooth, projective, geometrically irreducible and reduced scheme, i.e., variety over a number field. Let d be a strictly positive integer, and ϵ a positive real number. Let ω_X be a canonical invertible sheaf of X . Suppose X is of general type. Then one obtains an inequality of bounded discrepancy classes*

$$\text{ht}_{\omega_X} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_X)$$

of functions on $X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

Theorem 6 *Let $P = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1 \times \cdots \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1$ an n -product of the projective line over $\mathbf{Q}$. Let D_P be a divisor defined by the product of the pull-backs $p_i^*(0 + 1 + \infty)$ where the i -th projection is $p_i : P \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}$. Let $U_P = P \setminus D_P$. Let $\epsilon > 0$ a real number. Let ω_P be an invertible sheaf for the canonical line bundle on P . Then the inequality of BD-classes of functions*

$$\text{ht}_{\omega_P(D_P)} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_P + \log \text{cond}_{D_P})$$

holds on $U_P(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

The last theorem is obtained by iterated products of projective lines with the divisor of 3 points after Mochizuki's theorem.

Kummer-Kawamata covering technique is useful.

Let Y be a Kummer-Kawamata covering of P ramified along D_P . Then ω_Y is ample.

$$\text{ht}_{\omega_Y} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_Y)$$

3 Proof

Proposition 3 *Let X, Y be a normal schemes proper flat over $\mathbf{Z}$. Let $(x, y) \in X \times Y(F)$, where F is a minimal field of definition of (x, y) . The different ideal of F determines an effective arithmetic divisor*

$$\delta_{(x,y)} \in A\text{Div}(F)$$

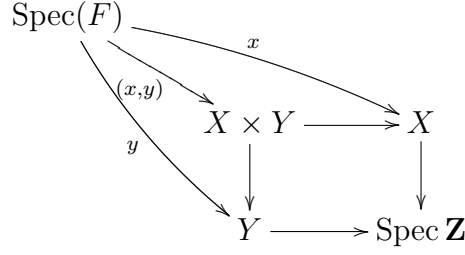
which is supported in $V(F)^{\text{non}}$. The assignment

$$(x, y) \in X \times Y(\bar{\mathbf{Q}}) \mapsto \log \text{diff}_{X \times Y}((x, y)) = \underline{\deg}_F(\delta_{(x,y)}) \in \mathbf{R} = \log \text{diff}_X(x) + \log \text{diff}_Y(y)$$

determines a well-defined log-different function on $X \times Y(\bar{\mathbf{Q}})$.

Proof 2 *The different divisor δ_x of F (resp. the different divisor δ_y) is determined by the different ideal of $x \in X(F)$ (resp. the different ideal of $y \in Y(F)$). The arithmetic divisor associated to the different ideals of (x, y) is*

$$\delta_{(x,y)} = \delta_x + \delta_y$$



Proposition 4 Let X, Y be a normal schemes proper flat over $\mathbf{Z}$ and D a normal crossing divisor on D . Let $(x, y) \in X \times Y(F)$, where F is a minimal field of definition of (x, y) . The height function $\text{ht}_D(x, y) = \underline{\deg}((x, y)_F^*(\bar{L}))$ (resp. $\log\text{cond}_D(x, y) = \underline{\deg}((x, y)_F^*(D)_{\text{red}})$) where $\bar{L}$ is an arithmetic line bundle associated to D over $X \times Y$. The assignment

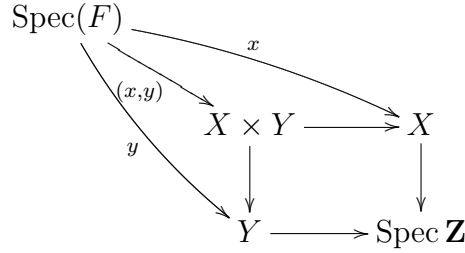
$$(x, y) \in X \times Y(\bar{\mathbf{Q}}) \mapsto \text{ht}_D(x, y) = \text{ht}_{D|X}(x) + \text{ht}_{D|Y}(y)$$

(resp.

$$(x, y) \in X \times Y(\bar{\mathbf{Q}}) \mapsto \log\text{cond}_D(x, y) = \log\text{cond}_{D|X}(x) + \log\text{cond}_{D|Y}(y)$$

) holds .

Proof 3 Let $(x, y) \in X \times Y(F)$, where F is a minimal field of definition of (x, y) . The height function $\text{ht}_D(x, y) = \underline{\deg}((x, y)_F^*(\bar{L}))$ (resp. $\log\text{cond}_D(x, y) = \underline{\deg}((x, y)_F^*(D)_{\text{red}})$) where $\bar{L}$ is an arithmetic line bundle associated to D over $X \times Y$. Since the following diagram is commutative



The assignment

$$(x, y) \in X \times Y(\bar{\mathbf{Q}}) \mapsto \text{ht}_D(x, y) = \text{ht}_{D|X}(x) + \text{ht}_{D|Y}(y)$$

(resp.

$$(x, y) \in X \times Y(\bar{\mathbf{Q}}) \mapsto \log\text{cond}_D(x, y) = \log\text{cond}_{D|X}(x) + \log\text{cond}_{D|Y}(y)$$

) holds .

Proposition 5 Let P be n times products of projective lines $\mathbf{P}^1$ over a number field and U_P n times products of projective lines minus divisors of $0, 1, \infty$, respectively. Let C be the sum pull-back of each divisor $0 + 1 + \infty$ on each projective line. Then

$$\text{ht}_{\omega_{U_P}} \lesssim (1 + \epsilon)(\log\text{diff}_P + \log\text{cond}_C)$$

on $U_P(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

Proposition 6 *Let X be a proper smooth scheme over a number field and D_X a divisor with normal crossings only on X . There exist an ample divisor H_X and a number e such that*

1. $D_X + H_X$ has normal crossings only on X .
2. Let Y be a multi-Kummer covering ramified along $D_X + H_X$ with ramification index e , i.e.,

$$Y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_m] / (T_i^e - a_i)$$

, where $\sum_i \operatorname{div}(a_i) = D_X + H_X$ locally.

3. $eD_Y = D_X$, $eH_Y = H_X$ and $D_Y + H_Y$ has normal crossings only.
4. $K_X + D_X + H_X = K_Y + D_Y + H_Y$.
5. K_Y is ample.

Proof 4 1. One can easily take an ample divisor H_X such that $D_X + H_X$ has normal crossings only.

2. A multi-Kummer covering ramified along with the same ramified index is an algebraic regular stack.
3. Since e is a ramification index, $eD_Y = D_X$, $eH_Y = H_X$ and $D_Y + H_Y$ has normal crossings only.
4. Since $Y \setminus (D_Y + H_Y) \rightarrow X \setminus (D_X + H_X)$ is étale, $K_X + D_X + H_X = K_Y + D_Y + H_Y$.
5. Let $A = K_X + D_X + H_X$. One can take H_X such that A is ample. One can furthermore take an ample H_X and sufficiently large e such that

$$K_Y = A - \frac{1}{e}(D_X + H_X)$$

is ample.

Proposition 7 *Let X be a proper regular scheme over a number field, d a number, $1 > \epsilon > 0$ and D_X a divisor with normal crossings only on X . Let Y be a multi-Kummer covering ramified along $D_X + H_X$ with the same ramification index e , where $D_X + H_X$ has normal crossings only and H_X is ample such that ω_Y is ample. Assume $\operatorname{ht}_{\omega_Y} \lesssim (1 + \epsilon^2)(\log \operatorname{diff}_Y)$ on $(Y \setminus D_Y)(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$, where $d' = ed$. Then*

$$\operatorname{ht}_{\omega_X(D_X)} \lesssim (1 + \epsilon^2)(\log \operatorname{diff}_X + \log \operatorname{cond}_{D_X}) + \epsilon^2 \operatorname{ht}_{H_X}$$

on $U_X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$, $U_X = X \setminus D_X$. Furthermore, assume $K_X + D_X$ is big such that $K_X + D_X - \epsilon H_X$ is an effective divisor E . Then

$$\operatorname{ht}_{\omega_X(D_X)} \lesssim (1 + 2\epsilon)(\log \operatorname{diff}_X + \log \operatorname{cond}_{D_X})$$

on $(X \setminus (D_X + E))(\bar{\mathbf{Q}})$.

Proof 5 Note that K_Y is ample,

$$K_X + D_X + H_X = K_Y + D_Y + H_Y$$

and

$$e(D_Y + H_Y) = D_X + H_X.$$

$$\begin{aligned} \text{ht}_{K_X+D_X} &\approx \text{ht}_{K_X+D_X+H_X} - \text{ht}_{H_X} \cong \text{ht}_{K_Y+D_Y+H_Y} - \text{ht}_{H_X} \lesssim \\ &(1 + \epsilon^2)\text{logdiff}_Y + \text{ht}_{D_Y} + \text{ht}_{H_Y} - \text{ht}_{H_X} \approx \\ (1 + \epsilon^2)(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X} + \text{logcond}_{H_X} - \text{logcond}_{D_Y} - \text{logcond}_{H_Y}) + \text{ht}_{D_Y} + \text{ht}_{H_Y} - \text{ht}_{H_X} \lesssim \\ &(1 + \epsilon^2)(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X}) + \epsilon^2 \text{ht}_{H_X} \end{aligned}$$

Furthermore, assume $K_X + D_X$ is big such that $K_X + D_X - \epsilon H_X$ is an effective divisor E .

$$(1 + \epsilon^2)(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X}) + \epsilon^2 \text{ht}_{H_X} \lesssim$$

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon^2)(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X}) + \epsilon \text{ht}_{K_X+D_X} = \\ (1 + \epsilon(1 + \epsilon))(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X}) \end{aligned}$$

Hence

$$\text{ht}_{\omega_X(D_X)} \lesssim (1 + 2\epsilon)(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X})$$

on $(X \setminus (D_X + E))(\bar{\mathbf{Q}})$.

Proposition 8 Let X be a proper smooth scheme over a number theory and D_X a divisor with normal crossings only on X . Assume $K_X + D_X$ is big. Let Y be a multi-Kummer covering ramified along D_X with the same ramification index e . Then K_Y is big for sufficiently large e . Further assume $\text{ht}_{\omega_Y} \lesssim (1 + \epsilon')(\text{logdiff}_Y)$ on $(Y \setminus D_Y)(\bar{\mathbf{Q}})$, where $D_Y = (f^{-1}D_X)_{\text{red}}$, $f : Y \rightarrow X$. Then

$$\text{ht}_{\omega_X(D_X)} \lesssim (1 + \epsilon)(\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X})$$

on $U_X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$, $U_X = X \setminus D_X$, if $\epsilon' < \epsilon$.

Proof 6 D_X has normal crossings only. Let Y be a multi-Kummer covering ramified along D_X with the same ramification index e , i.e.,

$$Y = \text{Spec} \mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_m] / (T_i^e - a_i)$$

, where $D_X = \sum_i D_i$, $\sum_i \text{div}(a_i) = D_i$ locally.

Then Y is a smooth algebraic stack and D_Y has normal crossings only. Since $Y \setminus D_Y \rightarrow X \setminus D_X$ is étale, one has $K_X + D_X = K_Y + D_Y$, $eD_Y = D_X$. Note that $\text{logdiff}_X + \text{logcond}_{D_X} \approx \text{logdiff}_Y + \text{logcond}_Y$, $0 \lesssim \text{logcond}_X$ (resp. $0 \lesssim \text{logcond}_Y$) on

$U_X(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$ (resp. $U_Y(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$). Note that $\text{ht}_D \approx \log\text{cond}_D$ for a normal crossing divisor D .

One obtains

$$\text{ht}_{K_X+D_X} \approx \text{ht}_{K_Y+D_Y} \lesssim (1 + \epsilon') \log\text{diff}_Y + \text{ht}_{D_Y} \lesssim$$

$$\begin{aligned} & (1 + \epsilon')(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X} - \log\text{cond}_{D_Y}) + \text{ht}_{D_Y} \lesssim \\ & (1 + \epsilon')(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X} - \log\text{cond}_{D_Y}) + (1 + \epsilon') \log\text{cond}_{D_Y} \approx \\ & (1 + \epsilon')(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X}) \end{aligned}$$

on $U_Y(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$. Hence one obtains

$$\text{ht}_{K_X+D_X} \lesssim (1 + \epsilon)(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X})$$

on $U_X(\mathbf{Q})^{\leq d}$, if $\epsilon' < \epsilon$.

Proposition 9 *Let X be a proper smooth scheme over a number theory and D_X a divisor with normal crossings only on X . Assume $K_X + D_X$ is ample. Let Y be a multi-Kummer covering ramified along D_X with the same ramification index e . Let $f : Y \rightarrow X$ be a finite morphism and $(Y, D_Y) \rightarrow (X, D_X)$ an induced log-étale morphism such that $D_Y = f^{-1}(D_X)_{\text{red}}$ has normal crossings only and $K_X + D_X = K_Y + D_Y$. Assume $\text{ht}_{K_Y} \lesssim (1 + \epsilon) \log\text{diff}_Y$ on $(Y \setminus D_Y)(\bar{\mathbf{Q}})$.*

Then K_Y is ample. And one obtains

$$\text{ht}_{K_X} \lesssim (1 + \epsilon)(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X}) + \epsilon \text{ht}_{D_X}$$

on $U_X(\mathbf{Q})^{\leq d}$.

Proof 7 *One has*

$$\begin{aligned} \text{ht}_{K_X} & \approx \text{ht}_{K_X+D_X} - \text{ht}_{D_X} \approx \text{ht}_{K_Y+D_Y} - \text{ht}_{D_X} \lesssim (1 + \epsilon) \log\text{diff}_Y + \text{ht}_{D_Y} - \text{ht}_{D_X} \lesssim \\ & (1 + \epsilon)(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X} - \log\text{cond}_{D_Y}) + \text{ht}_{D_Y} - \text{ht}_{D_X} \lesssim \\ & (1 + \epsilon)(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X}) + \epsilon \text{ht}_{D_X} \end{aligned}$$

on $U_Y(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$, $d' = ed$.

In the proof above, one can find a number m such that $mK_Y - D_X$ is ample since K_Y is ample.

$$\text{ht}_{D_X} \lesssim m \text{ht}_{K_Y} \lesssim m \text{ht}_{K_X+D_X}$$

since $K_Y + D_Y = K_X + D_X$ and $0 \lesssim \text{ht}_{D_Y}$ on $U_Y(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$.

$$\text{ht}_{K_X} \lesssim (1 + \epsilon)(\log\text{diff}_X + \log\text{cond}_{D_X}) + m \epsilon \text{ht}_{K_X+D_X}$$

Proposition 10 *Let $f : Y \rightarrow X$ be a generically finite morphism and $(Y, D_Y) \rightarrow (X, D_X)$ an induced log-étale morphism such that $D_Y = f^{-1}(D_X)_{\text{red}}$ has normal crossings only and $K_X + D_X = K_Y + D_Y$. Assume $\text{ht}_{K_Y} \lesssim (1 + \epsilon) \log \text{diff}_Y$ on $(Y \setminus D_Y)(\bar{\mathbf{Q}})$. Then*

$$\text{ht}_{K_X + D_X} \lesssim (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_{D_X})$$

on $U_X(\mathbf{Q})^{\leq d}$.

Proof 8 *Let $f : Y \rightarrow X$ be a generically finite morphism and $(Y, D_Y) \rightarrow (X, D_X)$ an induced log-étale morphism such that $D_Y = f^{-1}(D_X)_{\text{red}}$ has normal crossings only and $K_X + D_X = K_Y + D_Y$. On $U_Y(\mathbf{Q})^{\leq d'}$ one has*

$$\begin{aligned} \text{ht}_{K_X + D_X} &\approx \text{ht}_{K_Y + D_Y} \lesssim (1 + \epsilon) \log \text{diff}_Y + \text{ht}_{D_Y} \lesssim \\ (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_X - \log \text{cond}_Y) &+ \text{ht}_{D_Y} \lesssim \\ (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_{D_X}) & \end{aligned}$$

Hence one obtains

$$\text{ht}_{K_X + D_X} \lesssim (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_{D_X})$$

on $U_X(\mathbf{Q})^{\leq d}$.

The next is a key proposition.

Proposition 11 *Let Y be a proper smooth scheme over $\mathbf{Q}$ with K_Y big. Let P be n times products of projective lines $\mathbf{P}^1$ over $\mathbf{Q}$. Consider a dominant rational map from Y onto P and resolve the indeterminacy of the rational map to designate them by $p : Z \rightarrow Y$ and $f : Z \rightarrow P$. Assume D_P is a normal crossing divisor on P such that $K_P + D_P$ is ample. We define $D_Z = f^{-1}(D_P)_{\text{red}}$. We may further assume D_Z has normal crossings only. Then there exists an exceptional divisor E*

$$\text{ht}_{K_Y} \lesssim (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_Y)$$

on some dense subset of $(U_Y \setminus E)(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d}$.

Proof 9 *Note that $K_P + D_P = K_Z + D_Z$. One has*

$$\begin{aligned} \text{ht}_{K_Z} &\approx \text{ht}_{K_Z + D_Z} - \text{ht}_{D_Z} \approx \text{ht}_{K_P + D_P} - \text{ht}_{D_Z} \lesssim \\ (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_P + \log \text{cond}_{D_P}) - \text{ht}_{D_Z} &\approx (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_Z + \log \text{cond}_{D_Z}) - \text{ht}_{D_Z} \lesssim \\ (1 + \epsilon) \log \text{diff}_Z + \epsilon \text{ht}_{D_Z} & \end{aligned}$$

Since Z is of general type, there exists a number m such that

$$mK_Z \geq D_Z$$

Let $E_m = mK_Z - D_Z$.

$$0 \lesssim \text{ht}_{mK_Z} - \text{ht}_{K_{D_Z}}$$

$0 \lesssim \text{ht}_{D_Z}$ on $(U_Z \setminus E_m)(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$.

We must think images about these inequalities here.

$$(1 + \epsilon) \log \text{diff}_Z + \epsilon \text{ht}_{D_Z} \lesssim (1 + \epsilon) \log \text{diff}_Z + \epsilon m \text{ht}_{K_Z}$$

One hence has

$$(1 - m\epsilon) \text{ht}_{K_Z} \lesssim (1 + \epsilon) \log \text{diff}_Z$$

Note that there exists an exceptional divisor E such that

$$K_Z = K_Y + E, 0 \lesssim \text{ht}_E$$

One has

$$(1 - m\epsilon) \text{ht}_{K_Y} \lesssim (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_Y + \log \text{cond}_E)$$

on $(U_Z \setminus E)(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$.

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow p & \swarrow x \\ E & \longrightarrow Y & \longleftarrow \text{Spec}(F) \end{array}$$

One obtains

$$\text{ht}_{K_Y} \lesssim \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - m\epsilon)} \log \text{diff}_Y$$

on $(U_Y \setminus p(E_m + E))(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$. Given any $0 < \epsilon' \ll 1$ there exists an $\epsilon > 0$ such that

$$1 + \epsilon' = \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - m\epsilon)}$$

since the function of ϵ

$$\frac{(1 + \epsilon)}{(1 - m\epsilon)}$$

increases continuously for $0 \leq \epsilon < \frac{1}{m}$ from 1 at $\epsilon = 1$. One obtains

$$\text{ht}_{K_Y} \lesssim (1 + \epsilon') (\log \text{diff}_Y)$$

and

$$\text{ht}_{K_Y} \lesssim (1 + \epsilon'') (\log \text{diff}_Y)$$

for $\epsilon' \leq \epsilon''$ since $\log \text{diff}_Y \geq 0$. One should consider all maps $Z \rightarrow P$ and all D_Z to hold inequalities on $Y(\bar{\mathbf{Q}})^{\leq d'}$ to complete the proof.

Remark 1 1. In the inequality

$$\text{ht}_{\omega_X(D_X)} \lesssim (1 + \epsilon) (\log \text{diff}_X + \log \text{cond}_{D_X})$$

one may choose D_X as an ample divisor such that D_X is linear equivalent to a multiple divisor, so there exists a sufficiently small epsilon > 0 such that

$$(1 + \epsilon) \log \text{cond}_{D_X} \lesssim \text{ht}_{D_X}$$

2. To prove our mordell problem of high dimension it is sufficient to have the following inequality

$$\text{ht}_{\omega_X(D_X)} \lesssim (1 + \epsilon)(\log \text{diff}_X + \text{ht}_{D_X})$$

References

- [Bak] Bourbaki, N., *Element de Mathematique*, Algebre commutative Chapitres 5 a 7, N.Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heiderberg 2006, pp. 351.
- [Mzk0] Mochizuki, S., *Arithmetic Elliptic Curves in General position*, Shinichi MochizukiatmarkRIMS February 2009 pp.25.
- [Mzk1] Mochizuki, S., *Inter-universal Teichmuller Theory I: Construction Hodge Theater* Shinichi MochizukiatmarkRIMS, July 31 2013
- [Mzk2] Mochizuki, S., *Inter-universal Teichmuller Theory II:Construction Hodge Aracherov theoretic Evaluation* Shinichi MochizukiatmarkRIMS, July 31 2013
- [Mzk3] Mochizuki, S., *Inter-universal Teichmuller Theory III:Canonical Splittings of the Log-theta-lattice* Shinichi MochizukiatmarkRIMS, July 31 2013
- [Mzk4] Mochizuki, S., *Inter-universal Teichmuller Theory IV:Log-volume Computations and Set-theoretic Foundation* Shinichi MochizukiatmarkRIMS, July 31 2013

非特異平面 5 次曲線の二面体群に関する点射影

高 橋 剛

1 Introduction

基礎体を複素数体 $\mathbb{C}$ とする. $\mathbb{P}^2 \supset C$ を非特異平面曲線とし, その次数を $d \geq 4$ とする. 点 $P \in C$ (もしくは $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$) 中心の射影 $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ について考える. 射影 π_P から関数体の拡大 $\pi_P^* : \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow \mathbb{C}(C)$ が得られるが, $\mathbb{C}(C)$ の部分体としての $\pi_P^*(\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ は点 P によって決まるので, $K := \mathbb{C}(C)$, $K_P := \pi_P^*(\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ とおく. 拡大 K/K_P がガロア拡大となるとときに, 射影の中心点は「ガロア点」であるという. 特に $P \in C$ のときは内ガロア点, $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ のときは外ガロア点という. 非特異平面曲線のガロア点については, 次の結果が知られている. (基礎体が標数 0 の代数閉体の場合)

Theorem 1 ([3, 8]). 非特異平面曲線 C の次数 d は $d \geq 4$ と仮定する. このとき:

- (1) 点 $P \in C$ (resp. $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$) がガロア点であるための必要十分条件は, 適当な射影変換を施して P の座標と C の定義方程式を $P = (0 : 0 : 1)$,

$$C : YZ^{d-1} + f_d(X, Y) = 0 \text{ (resp. } Z^d + f_d(X, Y) = 0)$$

とできることである. ここで, $f_d(X, Y)$ は d 次斉次多項式である.

- (2) $P \in C$ (resp. $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$) はガロア点であると仮定すると, ガロア群 $\text{Gal}(K/K_P)$ は位数 $d-1$ (resp. d) の巡回群 C_{d-1} (resp. C_d) である.
- (3) 内ガロア点の個数は (resp. 外ガロア点の個数は) $0, 1, 4$ 個 (resp. $0, 1, 3$ 個) であり, さらに 4 個の内ガロア点をもつ曲線 (resp. 3 個の外ガロア点を持つ曲線) は 4 次曲線 $YZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$ (resp. フェルマ d 次曲線 $F(d)$, i.e., $X^d + Y^d + Z^d = 0$) に射影同値である.
- (4) 曲線 $YZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$ の 4 個の内ガロア点は $(0 : 0 : 1)$, $(0 : -\omega : 1)$, $(0 : -\omega^2 : 1)$, $(0 : -1 : 1)$ である. (ω は 1 の原始 3 乗根) また, フェルマ曲線 $F(d) : X^d + Y^d + Z^d = 0$ の 3 個の外ガロア点は $(0 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 0)$ である.

2013 年 11 月 1 日提出. 代数幾何シンポジウム in 岐阜 報告集
長岡工業高等専門学校 一般教育科, 940-8532 新潟県長岡市西片貝町 888 番地
E-mail address: takeshi@nagaoka-ct.ac.jp

拡大 K/K_P がガロア拡大でないときには, そのガロア閉包 L_P を考える. ガロア群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ について, 一般的な平面曲線や一般的な点について次の結果がある.

Theorem 2 ([3, 8]). 非特異平面曲線 C (次数 $d \geq 4$) の multitangent line すべての和集合を $C^\#$ とする. すべての点 $P \in C \setminus C^\#$ (resp. $P \in \mathbb{P}^2 \setminus (C \cup C^\#)$) に対して, ガロア群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ は $d-1$ 次の (resp. d 次の) 対称群 S_{d-1} (resp. S_d) である.

Theorem 3 ([6]). 点 $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ に対して, ガロア群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ が d 次の対称群 S_d にならない点の高々有限個である.

Theorem 4 ([1]). もし C が d 次の一般的な平面曲線ならば, すべての点 $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ に対して, ガロア群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ は d 次の対称群 S_d である.

Problem 5. 「もし C が d 次の一般的な平面曲線ならば, すべての点 $P \in C$ に対して, ガロア群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ は $d-1$ 次の対称群 S_{d-1} である。」という結果があって然るべきと思うのですが, 私は書かれている論文を知りません.

これらの結果を受けて, その次の目標として, ガロア群 $\text{Gal}(L_P/K_P)$ が巡回群や対称群とはならない射影の中心点 P について, Theorem 1 のような結果を目指して研究したい.

Definition 6. 点 P に対するガロア群が $\text{Gal}(L_P/K_P) = *$ のとき, その群の名前を使って, 射影の中心点 P を $*$ -point と呼ぶ. 例. C_d -point, D_4 -point, S_d -point など. (注. この名前については, 射影に関するものだと思われるような名前, もしくはもっとインパクトのある名前の方がより良いのではないかと私は思っています.)

本報告では非特異平面 5 次曲線の D_4 -point $P \in C$ (D_4 : 位数 8 の二面体群) について述べたい.

Definition 7. C を非特異平面 5 次曲線とする. このとき,

$$\Delta(C, D_4) := \{P \in C \mid P \text{ は } D_4\text{-point}\}, \delta(C, D_4) := \#\Delta(C, D_4)$$

と定義する.

次の定理が主定理である.

Theorem 8 (Main Theorem). C を非特異平面 5 次曲線とする. このとき, $\delta(C, D_4) = 0, 1, 3, 5, 15$ である. さらに, 15 個の D_4 -point を持つ C はフェルマ 5 次曲線 $F(5) : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ に射影同値である.

本報告では証明は記していない. 詳しい証明は別の論文にて発表する予定である. ([7])

2 先行結果, 諸結果, 例

以下, C は非特異平面 5 次曲線とする. $\tilde{C}_P$ を関数体が L_P である非特異射影曲線とし, $g(P)$ を $\tilde{C}_P$ の種数とする. 非特異平面 5 次曲線の点射影については, 三浦敬氏による結果がある.

Theorem 9 ([2]). C を非特異 5 次曲線とする. このとき:

- (1) 点 $P \in C$ が D_4 -point であるための必要十分条件は, 適当な射影変換を施すことによって, P の座標と C の定義方程式が $P = (0 : 0 : 1)$,

$$C : f_1(X, Y)Z^4 + f_3(X, Y)Z^2 + f_5(X, Y) = 0$$

とできることである. ただし, $f_i(X, Y)$ ($i = 1, 3, 5$) はゼロではない i 次斉次多項式である.

- (2) 点 $P \in C$ は D_4 -point であると仮定すると, 拡大 K/K_P の部分体 K' で $[K : K'] = 2$, $[K' : K_P] = 2$ となるものが存在する. さらに, K' を関数体とする非特異射影曲線の種数は 2 である.
- (3) 点 $P \in C$ は D_4 -point であると仮定すると, $g(P) = 16, 17$. さらに, $\delta_{16}(C)$ (resp. $\delta_{17}(C)$) を $g(P) = 16$ なる D_4 -point (resp. $g(P) = 17$ なる D_4 -point) の個数とすると, $5\delta_{16}(C) + 6\delta_{17}(C) \leq B(C)$ となる. ここで, $B(C)$ は C の bitangent line の本数である.

C の双対曲線の種数の計算により, $B(C)$ の上限を得ることができるが, さらに次のことがわかる.

Lemma 10. $\delta(C, D_4) \leq 20$.

また, フェルマ 5 次曲線 $F(5)$ の D_4 -point は次のように調べられている.

Theorem 11 ([4]). フェルマ 5 次曲線 $F(5) : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ について:

- (1) 点 $P \in F(5)$ が $F(5)$ の flex でないならば, $\text{Gal}(L_P/K_P) = S_4$, $g(P) = 85$;
- (2) 点 $P \in F(5)$ が $F(5)$ の flex ならば (つまり, 3 直線 $XYZ = 0$ と $F(5)$ の共通部分の 15 点), P は D_4 -point で $g(P) = 16$.

点 $P = (0 : -1 : 1)$ がフェルマ 5 次曲線 $F(5) : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ の D_4 -point であることは次のようにして分かる. 射影変換

$$T : (\tilde{X} : \tilde{Y} : \tilde{Z}) \mapsto (X : Y : Z) = (\tilde{X} : \tilde{Y} + \tilde{Z} : \tilde{Y} - \tilde{Z})$$

によって, $(0 : 0 : 1) \mapsto P$, $F(5)$ の定義方程式は

$$T^*(F(5)) : 10\tilde{Y}\tilde{Z}^4 + 20\tilde{Y}^3\tilde{Z}^2 + \tilde{X}^5 + 2\tilde{Y}^5 = 0$$

となる. Theorem 9 (1) によって, 点 P は D_4 -point である.

Theorem 9 から, 以下の補題が比較的容易に分かる.

Lemma 12. 点 $P \in C$ が D_4 -point ならば, $I_P(C, T_PC) = 3$ または 5. ここで, T_PC は点 P での C の接線, $I_P(C, T_PC)$ は C と T_PC との点 P での局所交点数である.

Remark 13. d 次非特異平面曲線 C ($d \geq 4$) の自己同型は全て $\mathbb{P}^2$ の射影変換の制限となっていることに注意する. ([5]) つまり, 任意の $\sigma \in \text{Aut}(C)$ に対して射影変換 $T_\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ が存在し $T_\sigma|_C = \sigma$ となる. さらに, $T_1, T_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ が $T_1|_C = T_2|_C = \sigma \in \text{Aut}(C)$ ならば, $T_1 = T_2$ である. 本報告では特に断りなく $\sigma \in \text{Aut}(C)$ を $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ の元として, 行列で表現する. ただし, $A \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ は, 射影変換 $(X : Y : Z) \mapsto (\tilde{X} : \tilde{Y} : \tilde{Z})$ を $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})^t = A(X, Y, Z)^t$ によって定めるものとする. $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})^t, (X, Y, Z)^t$ は $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}), (X, Y, Z)$ の転置行列による列ベクトルである.

Lemma 14. 点 $P \in C$ は D_4 -point であるとする. このとき次の性質を満たす involution $\iota_P \in \text{Aut}(C)$ が存在する:

- (1) $\iota_P \neq \text{id}_C$, $\iota_P^2 = \text{id}_C$;
- (2) $\iota_P(P) = P$. さらに点 P を通る任意の直線 l に対して $\iota_P(l) = l$ となる.

このような ι_P は D_4 -point P に対して, 唯一つである. (ι_P を D_4 -point に付随した involution と呼びたい.)

Lemma 15. D_4 -point P に付随した involution ι_P の固定点の集合は

$$\text{Fix}(\iota_P) := \{Q \in \mathbb{P}^2 \mid \iota_P(Q) = Q\} = \{P\} \cup l_P$$

となる. ここで, l_P は P を通らない直線である. (l_P を ι_P の固定点直線と呼びたい.)

Remark 16. 射影変換 $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ に対して, その固定点の集合

$$\text{Fix}(\sigma) = \{Q \in \mathbb{P}^2 \mid \sigma(Q) = Q\}$$

は次のいずれかのタイプである:

- (1) $\text{Fix}(\sigma)$ は 1 点, 2 点, もしくは 1 本の直線;
- (2) $\text{Fix}(\sigma)$ は一直線上に並ばない 3 点;
- (3) $\text{Fix}(\sigma)$ は 1 点と一直線;
- (4) $\text{Fix}(\sigma) = \mathbb{P}^2$.

特に, σ の位数が有限のときは, その表現行列が対角化可能なので, (2), (3), (4) のタイプのいずれかとなる.

Lemma 17. $P := (0 : 0 : 1) \in C$ かつ

$$\iota := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut}(C)$$

と仮定すると, C の定義方程式は $f_1(X, Y)Z^4 + f_3(X, Y)Z^2 + f_5(X, Y) = 0$ となる. ただし, $f_i(X, Y)$ は i 次斉次多項式である ($i = 1, 3, 5$). さらに, 多項式として $f_3(X, Y) = 0$ のとき P はガロア点であり, $f_3(X, Y) \neq 0$ のとき P は D_4 -point である.

Lemma 18. 2 点 $P, Q \in C$ ($P \neq Q$) は D_4 -point であるとする. このとき $\iota_P(Q) \neq P, Q$ であり, 3 点 $P, Q, \iota_P(Q)$ は一直線上に並ぶ.

Lemma 19. $\mathbb{P}^2$ の任意の直線 l に対して, $\#(\Delta(C, D_4) \cap l) = 0, 1, 3, 5$.

Lemma 20. 2 点 $P, Q \in C$ ($P \neq Q$) は D_4 -point であるとし, l を P と Q を通る直線とする. このとき, $\#(\Delta(C, D_4) \cap l) = 3$ ならば, $\iota_P|_l \circ \iota_Q|_l \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ の位数は 3 であり, $\#(\Delta(C, D_4) \cap l) = 5$ ならば, $\iota_P|_l \circ \iota_Q|_l \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ の位数は 5 である.

Remark 21. 直線 l に対して, $\#(\Delta(C, D_4) \cap l) \geq 2$ ならば $\#(C \cap l) = 5$.

Proposition 22. 2 点 $P, Q \in C$ ($P \neq Q$) は D_4 -point であるとする. このとき $\sigma(P) = Q$ となる C の自己同型 $\sigma \in \text{Aut}(C)$ が存在する.

Proposition 22 により, $g(P) = 16$ と $g(Q) = 17$ という 2 種類の D_4 -point をもつ C は存在しない.

Example 23. $\delta(C, D_4) = 3$ と 5 の例を記す.

- (1) 曲線 C を $X^5 + Y^4Z + YZ^4 = 0$ により定義されるものとし, $P_i := (0 : -\omega^{i-1} : 1)$ ($i = 1, 2, 3$) とする. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根である. すると, C は非特異平面 5 次曲線であり, $\delta(C, D_4) = 3$, $\Delta(C, D_4) = \{P_1, P_2, P_3\}$ である.
 $P_1, P_2, P_3 \in \Delta(C, D_4)$ については容易である. 例えば,

$$T : (\tilde{X} : \tilde{Y} : \tilde{Z}) \mapsto (X : Y : Z) = (\tilde{X} : \tilde{Y} + \tilde{Z} : \tilde{Y} - \tilde{Z})$$

という射影変換を考えると, $T((0 : 0 : 1)) = P_1$ であり,

$$T^*(C) : (6\tilde{Y})\tilde{Z}^4 + (-4\tilde{Y}^3)\tilde{Z}^2 + (\tilde{X}^5 - 2\tilde{Y}^5) = 0$$

となる. Theorem 9 により, P_1 は D_4 -point である.

D_4 -point に付随する involution は

$$\iota_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \iota_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \iota_{P_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

である. P_1, P_2, P_3 を通る直線は $l : X = 0$ であり, $\iota_{P_1}|_l \circ \iota_{P_2}|_l$ の位数は 3 である. Lemma 20 により, $\#(\Delta(C, D_4) \cap l) = 3$ である. 定義方程式のヘシアンを調べることにより, C はフェルマ曲線とは射影同値ではないことがわかる. 従って, Theorem 8 により, $\delta(C, D_4) = 3$ である.

- (2) 曲線 C を $X^5 + X^3YZ + Y^5 + Z^5 = 0$ により定義されるものとし,

$$P_i := (0 : -\zeta^{i-1} : 1) \quad (i = 1, \dots, 5)$$

とする. ただし, ζ は 1 の原始 5 乗根である. すると, C は非特異平面 5 次曲線であり, $\delta(C, D_4) = 5$, $\Delta(C, D_4) = \{P_1, \dots, P_5\}$ である.

$P_1, \dots, P_5 \in \Delta(C, D_4)$ については容易である. 例えば,

$$T : (\tilde{X} : \tilde{Y} : \tilde{Z}) \mapsto (X : Y : Z) = (\tilde{X} : \tilde{Y} + \tilde{Z} : \tilde{Y} - \tilde{Z})$$

という射影変換を考えると, $T((0 : 0 : 1)) = P_1$ であり,

$$T^*(C) : (10\tilde{Y})\tilde{Z}^4 + (-\tilde{X}^3 + 20\tilde{Y}^3)\tilde{Z}^2 + (\tilde{X}^5 + \tilde{X}^3\tilde{Y}^2 + 2\tilde{Y}^5) = 0$$

となる. Theorem 9 により, P_1 は D_4 -point である. さらに, P_1 は C の通常 flex (つまり, $I_{P_1}(C, T_{P_1}C) = 3$) である. フェルマ曲線には通常 flex はないので, C はフェルマ曲線とは射影同値ではない. 従って, Theorem 8 により, $\delta(C, D_4) = 5$ である.

3 Theorem 8 の証明について

C は非特異平面 5 次曲線とする. Theorem 8 の証明は以下の Lemma 24, Lemma 35 を示すことでなされる.

Lemma 24. 5 個の D_4 -point P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 が一直線上に並んでいて, さらに別の D_4 -point P_0 が存在したと仮定する. このとき, C はフェルマ 5 次曲線 $F(5)$ に射影同値であり, $\delta(C, D_4) = 15$.

Proof. Lemma 24 の証明は以下の手順による. $P_1, \dots, P_5$ を通る直線を $l : X = 0$ とする. $\sigma := \iota_1 \circ \iota_2 \in \text{Aut}(C)$ とおき, $\iota_0, \iota_1, \iota_2, \sigma$ などを使ってたくさんの D_4 -point を見つけていく. Lemma 10 の $\delta(C, D_4) \leq 20$ に矛盾しないように D_4 -point を配置すると C はフェルマ 5 次曲線となることがわかる. 具体的には以下の claim を証明していく.

Claim 25. $l_{P_1} \cap l_{P_2} \cap l = \emptyset$.

2 直線 l_{P_1}, l_{P_2} の交点を Q_1 とする. このとき, $Q_1 \in \text{Fix}(\sigma) \setminus l$ である.

Claim 26. $\#(\text{Fix}(\sigma) \cap l) = 2$.

$\text{Fix}(\sigma) \cap l =: \{Q_2, Q_3\}$ とする. $Q_1, Q_2, Q_3 \notin C$ に注意する. うまく座標を取り直して, $Q_1 = (1 : 0 : 0), Q_2 = (0 : 1 : 0), Q_3 = (0 : 0 : 1)$ とする. すると, $\sigma \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ は対角行列で表現される.

Lemma 20 により, $\sigma^5|_l = \text{id}_C$ なので, 自然な群の完全列が次のように得られる.

$$1 \rightarrow \langle \sigma^5 \rangle \rightarrow \langle \sigma \rangle \rightarrow \langle \sigma|_l \rangle \rightarrow 1$$

Claim 27. $\sigma^5 = \text{id}_C$.

Claim 28. $\text{Fix}(\sigma)$ は 1 点とそれを通らない一直線の和集合であると仮定すると, Q_2, Q_3 は C のガロア点である.

Theorem 1(3) によれば, 外ガロア点を 2 点以上持つと, C はフェルマ 5 次曲線と射影同値となる.

注意) フェルマ 5 次曲線 $F(5)$ のときには, $\text{Fix}(\sigma)$ は必ず一直線上にはない 3 点となるので, Claim 28 のようなことは起こらない.

以下, $\text{Fix}(\sigma)$ は必ず一直線上にはない 3 点, つまり, $\text{Fix}(\sigma) = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ と仮定する.

Claim 29. 点 $P \in \mathbb{P}^2 \setminus \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ に対して, 5 点 $P, \sigma(P), \dots, \sigma^4(P)$ が一直線上にあるための必要十分条件は, $P \in V(XYZ)$ である. ただし, $V(XYZ)$ は多項式 XYZ によって定義される代数的集合, つまり 3 直線 $XYZ = 0$ である. さらに, $P \notin V(XYZ)$ のときは, 5 点 $P, \sigma(P), \dots, \sigma^4(P)$ のうちのどの 3 点も一直線上にはない.

Claim 30. 15 個の D_4 -point $P_1, \dots, P_{15}$ が存在し, さらに, 添え字をうまく付けると 5 点 $P_{i+1}, \dots, P_{i+5}$ ($i = 0, 1, 2$) は一直線上にある.

上の claim の $P_1, \dots, P_5$ は Lemma 24 の仮定にある 5 点であり, $l: X = 0$ 上にある.

Claim 31. $P_1, \dots, P_{15} \in V(XYZ)$.

この claim は, $P_6, \dots, P_{15} \notin V(YZ)$ と仮定すると $\delta(C, D_4) \geq 30$ となるから Lemma 10 に矛盾する, という議論により証明される.

Claim 32. うまく座標を取ると, 15 点 $P_1, \dots, P_{15} \in V(XYZ)$ は $F(5) \cap V(XYZ)$ の 15 点と同じ座標にすることができる. ここで, $F(5)$ はフェルマ 5 次曲線 $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ である.

Claim 33. $\{P_1, \dots, P_{15}\} = F(5) \cap V(XYZ)$ のとき,

$$P_1 = (0 : -1 : 1), P_2 = (0 : -\zeta : 1), P_6 = (-1 : 0 : 1)$$

(ζ は 1 の原始 5 乗根) とすると, この 3 点に付随する involution は次のようになる.

$$\iota_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \iota_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \\ 0 & \zeta^4 & 0 \end{pmatrix}, \iota_{P_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claim 34. $\iota_{P_i}(C) = C$ ($i = 1, 2, 6$) をみたす非特異平面 5 次曲線はフェルマ 5 次曲線 $F(5)$ だけである. つまり C の定義方程式を $F(X, Y, Z) = 0$ とすると, $\iota_{P_i}^* F = \lambda_i F$ ($i = 1, 2, 6$, $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) をみたす 5 次斉次多項式 F は $c(X^5 + Y^5 + Z^5)$ ($c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) だけである.

以上により, Lemma 24 が証明される. □

Lemma 35. 任意の直線上に D_4 -point は 3 点以下であると仮定すると, $\delta(C, D_4) \leq 3$ である.

Proof. 一直線上には D_4 -point は 3 点以下 (つまり, 0, 1, 3 点の何れか) と仮定する. さらに, 3 個の D_4 -point P_1, P_2, P_3 が直線 l 上に並んでいて, 他にもう 1 点 D_4 -point P_4

が存在したと仮定する. 以下の claim を示していき矛盾を導くことにより Lemma 35 を証明する.

Claim 36. Remark 21 より, $\#(l \cap C) = 5$ なので $l \cap C = \{P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2\}$ とおく. すると, 任意の $i = 1, 2, 3$ に対して, $\iota_{P_i}(Q_1) = Q_2, \iota_{P_i}(Q_2) = Q_1$.

Claim 37. このとき, 次の性質をみたす 5 個の D_4 -point $P_5, \dots, P_9$ がさらに存在する: 9 点 $P_1, \dots, P_9$ のなかの任意の 2 点 P_i, P_j ($i \neq j$) に対し, この 2 点を通る直線上にもう 1 点 $P_k \in \{P_1, \dots, P_9\} \setminus \{P_i, P_j\}$ が存在する.

Claim 38. Claim 37 の 9 点に対して, (必要なら番号を付け替えて) 3 点 $\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_4, P_5, P_6\}, \{P_7, P_8, P_9\}$ はそれぞれ一直線上にあるとし, その 3 直線を $L_{123}, L_{456}, L_{789}$ とかくことにする. そのとき, この 3 直線は 1 点では交わらない.

Claim 39. 適当な射影変換によって, Claim 37 の 9 点はフェルマ 3 次曲線 $F(3) : X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ と 3 直線 $XYZ = 0$ の交点の位置にあるとしてよい.

Claim 40. 9 個の D_4 -point が Claim 39 の位置にあるとする. このとき, 9 点全ての付随 involution が決定できる. 特に, その 2 つは次である.

$$\iota = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota' = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\omega : 1 \text{ の原始 3 乗根})$$

Claim 41. 9 個の D_4 -point が Claim 39 の位置にあるとする. このとき,

$$(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0) \in C$$

である.

以上の Claim により, Lemma 35 は次のように証明される. $\sigma := \iota \circ \iota'$ とおくと,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut}(C)$$

である. 射 $C \rightarrow C/\langle \sigma \rangle$ を考えると, この射は 3 次 cyclic covering で分岐点は 3 点である. しかしこれは Riemann–Hurwitz の公式に矛盾する. $\square$

Lemma 24, Lemma 35 により, Theorem 8 を得る.

参考文献

- [1] F. Cukierman, Monodromy of projections, *Mat. Contemp.*, 16:9–30, 1999, 15th School of Algebra (Portuguese) (Canela, 1998).
- [2] K. Miura, Field theory for function fields of plane quintic curves. *Algebra Colloq.* 9 (2002), no. 3, 303–312.
- [3] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves. *J. Algebra* 226 (2000), no. 1, 283–294.
- [4] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for the function field of the quintic Fermat curve. *Comm. Algebra* 28 (2000), no. 4, 1979–1988.
- [5] M. Namba, *Geometry of projective algebraic curves*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 88. Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.
- [6] G. P. Pirola and E. Schlesinger, Monodromy of projective curves. *J. Algebraic Geom.* 14 (2005), no. 4, 623–642.
- [7] T. Takahashi, Point projection of a nonsingular plane quintic curve and the dihedral group of order eight. preprint.
- [8] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves. *J. Algebra* 239 (2001), no. 1, 340–355.

Notes on certain surfaces of general type with a rational pencil

Hirotaka Ishida

Introduction

S を複素一般型代数曲面, C を種数 $g(C)$ の非特異代数曲線とする. $f: S \rightarrow C$ を相対的極小な代数曲線族とする. 代数多様体 X に対して, X の標準因子を K_X とする. $K_f = K_S - f^*K_C$ と定め, これを f の相対標準因子という. 代数曲線族 f には, 代数曲面 S の不変量の双対化である相対的オイラー・ポアンカレ標数 $\chi_f = \deg f_*K_f$ と相対標準因子の自己交点数 K_f^2 が定義できる. このとき, S のオイラー・ポアンカレ標数 $\chi(\mathcal{O}_S)$ と χ_f , K_S^2 と K_f^2 との間には, それぞれ以下の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\chi_f &= \chi(\mathcal{O}_S) - (g(C) - 1)(g(f) - 1), \\ K_f^2 &= K_S^2 - 8(g(C) - 1)(g(f) - 1),\end{aligned}$$

ここで, $g(f)$ を f の一般ファイバーの種数とする.

以下, f を局所自明ではないとする. f が局所自明ではないとき, $\chi_f > 0$ である (cf. [2, III, Theorem 17.3]). 従って, f のスロープ $\lambda(f)$ を K_f^2/χ_f と定義することができる. $g(f) \geq 2$ であるとき, 代数曲線族の不変量 $\lambda(f)$, $g(f)$ の間には Xiao[14, Theorem 2] によるスロープ不等式 $4 - 4/g(f) \leq \lambda(f) \leq 12$ が成り立つ. (f が超楕円曲線族である場合には, Horikawa [5, V, Theorem 2.1] と Persson [11, Proposition 2.12] により示された.) つまり, $\lambda(f) < 4$ であれば, スロープ不等式により, $g(f)$ の上限は $4/(4 - \lambda(f))$ であることが分かる. また, Konno [8, Corollary 4.1] によるスロープ不等式を用いると, f が非超楕円曲線族で, f_*K_f が半安定であるならば, $g(f)$ の上限は $6/(5 - \lambda(f))$ であることが分かる. このように, 代数曲線族の構造を制限すると, ファイバーの種数の取り得る値の範囲が変化する. 特に, ファイバーの種数の上限が存在しない代数曲線族の構造の中で最も易しいものは, スロープが 4 である超楕円曲線族ということになる.

そこで, スロープが 4 である超楕円曲線族 f に着目すると, 以下の定理が成り立つ.

定理 0.1 (Ishida [6, Theorem 0.1]) $f: S \rightarrow C$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. $\lambda(f) = 4$ であるとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$\chi_f \geq \Delta(g(f)) = \begin{cases} g(f)/2 - 1 & (g(f) \geq 4 : \text{even}) \\ g(f) - 3 & (g(f) \geq 5 : \text{odd}) \end{cases}$$

さらに, $g \geq 4$ を満たす $g \in \mathbb{Z}$ に対して, $\lambda(f) = 4, g(f) = g, \chi_f = \Delta(g)$ となる相対的極小超楕円曲線族が存在する.

注意 0.2 任意の 正の整数 z に対して, $\lambda(f) = 4, \chi_f = z$ かつ $g(f)$ が 2 または 3 である相対的極小な超楕円曲線族 f は存在する (cf. [12, Théorème 2.9], [6, Theorem 0.2]).

定理 0.1 の証明において構成した $\lambda(f) = 4, \chi_f = \Delta(g(f))$ を満たす超楕円曲線族の底空間は楕円曲線であった. 従って, 底空間が射影平面である場合には, このような超楕円曲線族の相対的オイラー・ポアンカレ標数の下限は $\Delta(g(f))$ よりも大きい可能性がある.

そこで, 本稿ではスロープが 4 である射影直線上の超楕円曲線族の相対的オイラー・ポアンカレ標数の下限について考察し, 以下の定理を示す.

定理 0.3 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. $\lambda(f) \leq 4$ であるとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$\chi_f \geq \Gamma(g(f)) = \begin{cases} 3g(f) - 9 & (g(f) \geq 6) \\ \left\lfloor \frac{3g(f)}{2} \right\rfloor & (2 \leq g(f) \leq 5) \end{cases}.$$

ただし, $[a]$ は実数 a を超えない整数を表す. さらに, $g \geq 2$ を満たす $g \in \mathbb{Z}$ に対して, $\lambda(f) = 4, g(f) = g, \chi_f = \Gamma(g)$ が成り立つ相対的極小な超楕円曲線族 f が存在する.

注意 0.4 講演では $g(f) = 3, 5$ のとき, χ_f の下限はそれぞれ 5, 8 と発表しましたが, どちらも χ_f が 1 つ小さいものの存在が証明できたので, 訂正します.

一方, 以下の定理で実現されている超楕円曲線族の底空間は射影直線であることを注意しておく.

定理 0.5 (Ishida [7, Theorem 0.3]) g, z を (i), (ii) のいずれかを満たす正の整数とする.

(i) g は 6 以上の偶数かつ $z \geq g^2 + \frac{g}{2} - 2$.

(ii) g は 5 以上の奇数かつ $z \geq g^2 - 1$.

このとき, $g(f) = g, \chi_f = z, \lambda(f) = 4$ を満たす相対的極小超楕円曲線族 f は存在する.

1 超楕円曲線族の不変量

本節では, 超楕円曲線族の不変量の計算を行う. $f: S \rightarrow C$ を相対的極小な超楕円曲線族とする. f の相対標準写像の像は C 上の有理曲線族となる. この有理曲線族に対してブローアップとブローダウンを繰り返すことにより, C 上の射影直線束 $pr: W \rightarrow C$ が得られ, S は W の正規 2 重被覆 $\varphi: S' \rightarrow W$ に双有理同値となる (cf. [1, Theorem III. 4]). つまり, $\mu: \tilde{S} \rightarrow S'$ を S' の特異点解消, $\rho: \tilde{S} \rightarrow S$ を $\mu \circ \varphi \circ pr$ のファイバーに含

まれる (-1) -曲線の縮約とするとき, 以下の図式が可換であることが知られている (cf. [4, Lemma 4], [6, p. 470]) :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\mu} & S' \\ \rho \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S & \dashrightarrow & W \\ & \searrow f & \downarrow pr \\ & & C \end{array}$$

ここで, μ としては S' の標準解消をとる. 標準解消とは以下の手順で定められる特異点解消である (cf. [3]). K を S' の有理関数体とし, $S_0 = S'$, $W_0 = W$ とおく. B_0 を $\varphi = \varphi_0$ の分岐因子とする. $\nu_1: W_1 \rightarrow W_0$ を W_0 上の 1 点を中心とするブローアップとし, E_1 を ν_1 の例外因子とする. $\varphi_1: S_1 \rightarrow W_1$ を W_1 の K -正規化とする. このとき, 自然な双有理射 $\mu_1: S_1 \rightarrow S_0$ をとることができ, 以下の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\mu_1} & S_0 = S' \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 \\ W_1 & \xrightarrow{\nu_1} & W_0 = W \end{array}$$

ブローアップ ν_1 の中心における分岐因子 B_0 の重複度を m_1 とすれば, φ_1 の分岐因子は $B_1 = \nu_1^* B_0 - 2[m_1/2]E$ である (cf. [10, Proposition 2.3]). ここで, $[a]$ は実数 a を超えない最大の整数とする.

上の操作を分岐因子が特異点をもたないようになるまで繰り返して, 以下の 2 重被覆の列を得ることができる :

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{S} = S_n & \xrightarrow{\mu_n} & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_1 \xrightarrow{\mu_1} S_0 = S' \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & & & \downarrow \varphi_1 \quad \downarrow \varphi_0 = \varphi \\ W_n & \xrightarrow{\nu_n} & W_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W_1 \xrightarrow{\nu_1} W = W \end{array}$$

分岐因子 B_n が特異点をもたないことから, S_n は非特異曲面となり, $\mu = \mu_n \circ \mu_{n-1} \circ \cdots \circ \mu_1: \tilde{S} \rightarrow S'$ は S' の特異点解消となる.

$pr: W \rightarrow C$ を C 上の階数 2, 次数 $d \geq 0$ のベクトル束に付随する射影直線束とする. H を $pr: W \rightarrow C$ の tautological divisor とし, F を pr のあるファイバーとする. f は超楕円曲線族であることから, W 上の分岐因子 B は $2(g(f) + 1)H + 2NF$ ($N \in \mathbb{Z}$) に代数的同値であるとしてよい. このとき, Horikawa [3, Lemma6], Persson [10, Corollary 2.2] により, χ_f, K_f^2 は以下のように計算できる (cf. [6, Lemma 1.3]).

補題 1.1 (Horikawa [3, Lemma6], Persson [10, Corollary 2.2]) $f: S \rightarrow C$ を相対的極小な超楕円曲線族とする. d, N を上記のようにとる. $m_1, m_2, \dots, m_n$ を標準解消におけるブローアップの中心となる特異点の重複度とする. このとき, f は以下の数値的性質を

もつ:

$$\chi_f = \frac{dg(f)(g(f)+1)}{2} + Ng(f) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{m_k}{2} \right] \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right), \quad (1)$$

$$K_f^2 = 2d(g(f)^2 - 1) + 4N(g(f) - 1) - \sum_{k=1}^n 2 \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right)^2 \\ + (\text{the number curves contracted by } \rho). \quad (2)$$

2 χ_f の値の下限

本節では, 定理 0.3 の不等式の証明を行う. 相対的極小かつ局所自明ではない超楕円曲線族 $f: S \rightarrow C$ に対して, W, d, N や $m_1, m_2, \dots, m_n$ などの記号を前節と同じ意味とし, $M = d(g(f)+1) + 2N$ とおく. W の基本変換を繰り返すことにより, ブローアップ ν_k の中心における B_k の重複度は $g(f) + 2$ 以下と仮定することができる (cf. [5, V, p. 746]). 従って, W は $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, $[m_k/2] \leq [g(f)/2] + 1$ を満たすものとする. ここで, 補題 1.1 により, 以下の不等式が成り立つ.

補題 2.1 $f: S \rightarrow C$ を相対的極小かつ局所自明ではない超楕円曲線族とする. すべての k に対して, $[m_k/2] \leq m$ を満たすならば, 次の不等式が成り立つ:

$$\frac{2M(g(f) - m)}{m\lambda(f) - 4(m - 1)} \leq \chi_f \leq \frac{g(f)}{2} M. \quad (3)$$

(証明) 式 (2) と $[m_k/2] \leq m$ ($k = 1, 2, \dots, n$) により,

$$\begin{aligned} 2(g(f) - 1)M - K_f^2 &\leq \sum_{k=1}^n 2 \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{4 \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right)}{\left[\frac{m_k}{2} \right]} \frac{1}{2} \left[\frac{m_k}{2} \right] \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{4(m - 1)}{m} \frac{1}{2} \left[\frac{m_k}{2} \right] \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right) \\ &= \frac{4(m - 1)}{m} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{m_k}{2} \right] \left(\left[\frac{m_k}{2} \right] - 1 \right). \end{aligned}$$

を得る. さらに, $K_f^2 = \lambda(f)\chi_f$ と式 (1) から,

$$2(g(f) - 1)M - \lambda(f)\chi_f \leq \frac{4(m - 1)}{m} \left(\frac{g(f)}{2} M - \chi_f \right)$$

が成り立つ. これを変形して,

$$2M(g(f) - m) \leq \{m\lambda(f) - 4(m - 1)\}\chi_f$$

を得る. また, 式 (1) より, $\chi_f \leq g(f)M/2$ は自明であるから, 不等式 (3) が示せた. $\square$

以下では, S を一般型曲面かつ $C = \mathbb{P}^1$ を仮定する. 特に, W が Hirzebruch 曲面であることに注意する.

さらに, $d = 0$ と仮定すると, W は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であり, 射影直線への射影がもう 1 つ存在する. S が一般型曲面でなくてはならないことから, 第 2 射影もファイバーの種数が 2 以上の代数曲線族である必要がある. このことから, $N \geq 3$ であり, $M = d(g(f) + 1) + 2N$ は 6 以上の偶数をすべて取り得る. 一方, $d > 0$ を仮定すると, φ の分岐因子が W の極小切断を含む可能性があることから, $2N \geq -d$ でなければならず, その結果として $M = d(g(f) + 1) + 2N \geq g(f)$ となる. このことから, $g(f)$ が奇数の場合は M は $g(f) + 1$ 以上の偶数をすべて取り得, $g(f)$ が偶数の場合は M は $g(f) + 1$ 以上 $2g(f) - 1$ 以下の奇数と $2g(f)$ 以上の整数をすべて取り得る. 以上を合わせると, M の取り得る値は以下ようになる.

$$M = \begin{cases} 6, 8, \dots, g(f) - 2, g(f), g(f) + 1, g(f) + 2, \dots & (g(f) \text{ は偶数}) \\ 6, 8, 10, \dots & (g(f) \text{ は奇数}) \end{cases}$$

このとき, 補題 2.1 を用いて, χ_f の取り得る値を考察すると以下の系を得る.

補題 2.2 整数 g と有理数 λ を $g \geq 2, 4(g-1)/g \leq \lambda \leq 12$ を満たすものとする. S を複素一般型曲面とし, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\lambda_f = \lambda, g(f) = g$ を満たす相対的極小かつ局所自明ではない超楕円曲線族とする. M を上記のようにとる. このとき, 次のことが成り立つ:
(i) g が 6 以上の整数かつ M が 6 以上 g 以下の整数ならば, M は偶数かつ

$$A(g, \lambda, M) = \frac{2M(2g - M)}{\lambda M - 4(M - 2)} \leq \chi_f \leq \frac{g}{2} M, \quad (4)$$

(ii) $M \geq g + 1$ ならば,

$$B(g, \lambda, M) = \frac{2M(g - [g/2] - 1)}{\lambda([g/2] - 1) - 4[g/2]} \leq \chi_f \leq \frac{g}{2} M, \quad (5)$$

(証明) 補題 2.1 において, $m = [g/2] + 1$ と取ることができることから, 直ちに不等式 (5) が成り立つことが分かる.

$g \geq 6, 6 \leq M \leq g$ の場合を考える. M の取り得る値を考察すると, $d = 0$ でなければならず, M は偶数である. $d = 0$ ($W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) ならば, 任意の W 上の点を通る H に線形同値な切断が存在する. よって, $m_k \leq B \cdot H = 2N = M$ であり, 補題 2.1 を適用すると,

$$A(g, \lambda, M) = \frac{2M(2g - M)}{\lambda M - 4(M - 2)} \leq \chi_f \leq \frac{g}{2} M$$

を得る. さらに, $[M/2] \leq [g/2] + 1$ だから, $B(g, \lambda, M) < A(g, \lambda, M)$ となる. 従って, 不等式 (4) が成り立つ. $\square$

補題 2.2 を用いると, $g(f)$ が 6 以上である場合に χ_f の下限を求めることができる.

命題 2.3 整数 g と有理数 λ を $g \geq 6$, $4(g-1)/g \leq \lambda \leq 4$ を満たすものとする. S を複素一般型曲面とし, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\lambda_f = \lambda$, $g(f) = g$ を満たす相対的極小かつ局所自明ではない超楕円曲線族とする. このとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$\chi_f \geq \frac{12(g-3)}{3\lambda-8}.$$

(証明) はじめに, $6 \leq M \leq g$ のときの χ_f の下限 $A(g, \lambda, M)$ の最小値を求める. $6 \leq M \leq g-2$ とすると, M は偶数であり,

$$\begin{aligned} A(g, \lambda, M+2) - A(g, \lambda, M) &= \frac{2(M+2)(2g-(M+2))}{\lambda(M+2)-4((M+2)-2)} - \frac{2M(2g-M)}{\lambda M-4(M-2)} \\ &= \frac{4\{(4-\lambda)M^2-2(\lambda+4)M+16g-16\}}{\{\lambda M-4(M-2)\}\{\lambda(M+2)-4M\}} \\ &\geq \frac{4\{(4-\lambda)M^2-2(\lambda+4)M+16M+16\}}{\{\lambda M-4(M-2)\}\{\lambda(M+2)-4M\}} \\ &= \frac{4\{(4-\lambda)(M-1)^2+\lambda+12\}}{\{\lambda M-4(M-2)\}\{\lambda(M+2)-4M\}} \end{aligned}$$

となる. ここで, $\lambda \leq 4$ であることから, $(4-\lambda)(M-1)^2+\lambda+12 > 0$ である. 従って, $A(g, \lambda, 6) = 12(g-3)/(3\lambda-8)$ のときが最小であることが分かる.

次に, g が偶数の場合に, $A(g, \lambda, 6)$ と $B(g, \lambda, M)$ とを比較する. $M \geq g+3$ とすると,

$$\begin{aligned} B(g, \lambda, M) - A(g, \lambda, 6) &= \frac{2M(g-2)}{\lambda(g+2)-4g} - \frac{12(g-3)}{3\lambda-8} \\ &\geq \frac{2(g+3)(g-2)}{\lambda(g+2)-4g} - \frac{12(g-3)}{3\lambda-8} \\ &= \frac{6\lambda\{-(g-3/2)^2+33/4\}+32(g^2-5g+3)}{\{\lambda(g+2)-4g\}(3\lambda-8)} \end{aligned}$$

である. $g \geq 6$ だから, $-(g-3/2)^2+33/4 < 0$ である. さらに, $\lambda \leq 4$ より,

$$\frac{6\lambda\{-(g-3/2)^2+33/4\}+32(g^2-5g+3)}{\{\lambda(g+2)-4g\}(3\lambda-8)} \geq \frac{8(g-5)(g-6)}{\{\lambda(g+2)-4g\}(3\lambda-8)}$$

を得る. 先と同様に計算すると, $M = g+2$ ならば,

$$B(g, \lambda, M) - A(g, \lambda, 6) \geq \frac{8(g-4)(g-8)}{\{\lambda(g+2)-4g\}(3\lambda-8)},$$

$M = g+1$ ならば,

$$B(g, \lambda, M) - A(g, \lambda, 6) \geq \frac{8(g^2-13g+34)}{\{\lambda(g+2)-4g\}(3\lambda-8)}$$

を得る.

このことから, $M \geq g+3$, $g \geq 6$ または $M = g+2$, $g \geq 8$ または $M = g+1$, $g \geq 10$ のいずれかが成り立つならば, $B(g, \lambda, M) \geq A(g, \lambda, 6)$ である. つまり, $g \leq 10$ かつ g が偶数ならば, $\chi_f \geq A(g, \lambda, 6)$ であることが示せた. また, もし, $\chi_f < A(g, \lambda, 6)$ であれば, (a) $g = 6$, $M = 7$, (b) $g = 6$, $M = 8$, (c) $g = 8$, $M = 9$ となることも分かる.

以下では, $\chi_f < A(g, \lambda, 6)$ となる曲線族が存在しないことを (a), (b), (c) の場合に分けて示す.

(a) $g = 6$, $M = 7$ の場合. 不等式 (5) により, $B(6, \lambda, 7) < \chi_f < A(6, \lambda, 6)$ である. 特に, $\lambda > 52/15$ でなくてはならない. さらに, $\lambda \leq 4$ を仮定していたので, $B(6, \lambda, 7) < \chi_f < A(6, \lambda, 6)$ から,

$$\begin{aligned} 3\chi_f + 7 &\leq K_f^2 < \frac{8}{3}\chi_f + 12, \\ 7 &\leq \chi_f \leq 15 \end{aligned}$$

を得る. これらを満たす $gM/2 - \chi_f$, $2(g-1)M - K_f^2$ の値の組は, 以下の組のみである:

$$\begin{aligned} (gM/2 - \chi_f, 2(g-1)M - K_f^2) = &(14, 42), (13, 39), (13, 38), (12, 36), (12, 35), \\ &(11, 33), (11, 32), (10, 30), (10, 29), (9, 27), \\ &(8, 24), (7, 21). \end{aligned}$$

式 (1), (2) から $gM/2 - \chi_f = \sum_{k=1}^n [m_k/2]([m_k/2] - 1)/2$, $2(g-1)M - K_f^2 \leq \sum_{k=1}^n 2([m_k/2] - 1)^2$ である. $m_k \leq 8$ より $([m_k/2]([m_k/2] - 1)/2, 2([m_k/2] - 1)^2) = (1, 2), (3, 8), (6, 18)$ であるから, $gM/2 - \chi_f = 12$ の場合のみ実現できる可能性がある. 従って, $m_1 = m_2 = 8$ かつ $m_k \leq 3$ ($k = 3, 4, \dots, n$) でなくてはならない. また, $m_k = 7$ となる k は存在しないから, 2つの重複度 8 の特異点は B に含まれるファイバー上にのみ存在し得る. 他方, $M = 7$ ならば, $d = 1$, $N = 0$ であるから, B があるファイバー F を含むならば, B は極小切断を含み, F 以外のファイバーを含むことはない. 従って, B は重複度 8 の特異点を 2 つもつことができないことが分かる.

(b) $g = 6$, $M = 8$ の場合. (a) と同様にして, $B(6, \lambda, 8) < \chi_f < A(6, \lambda, 6)$ から,

$$\begin{aligned} 11/3 &< \lambda \leq 4 \\ 3\chi_f + 8 &\leq K_f^2 < \frac{8}{3}\chi_f + 12, \\ 8 &\leq \chi_f \leq 12 \end{aligned}$$

を得る. これらを満たす $gM/2 - \chi_f$, $2(g-1)M - K_f^2$ の値の組は以下の組のみである:

$$(gM/2 - \chi_f, 2(g-1)M - K_f^2) = (16, 48), (16, 47), (15, 45), (14, 32), (13, 39).$$

しかし, これらはすべて実現することができない.

(c) $g = 8, M = 9$ の場合. $B(8, \lambda, 9) < \chi_f < A(6, \lambda, 6)$ から,

$$\begin{aligned} 88/23 < \lambda &\leq 4 \\ \frac{16}{5}\chi_f + \frac{54}{5} &\leq K_f^2 < \frac{8}{3}\chi_f + 20, \\ 14 &\leq \chi_f \leq 17 \end{aligned}$$

を得る. これらを満たす $gM/2 - \chi_f, 2(g-1)M - K_f^2$ の値の組は以下の組だけである:

$$(gM/2 - \chi_f, 2(g-1)M - K_f^2) = (22, 70), (22, 69), (21, 67), (20, 64).$$

ここで, $m_k \leq 10$ なので, $([m_k/2]([m_k/2]-1)/2, 2([m_k/2]-1)^2) = (1, 2), (3, 8), (6, 18), (10, 32)$ である. よって, $gM/2 - \chi_f = 20, m_1 = m_2 = 10$ かつ $m_k \leq 3$ ($k = 3, 4, \dots, n$) となる. $g = 8, M = 9$ ならば, $d = 1, N = 0$ であるから, (a) の場合と同じ理由で実現することができないことが分かる. 以上より, $\chi_f < A(6, \lambda, 6)$ となる 3 つの場合 (a), (b), (c) がすべて起こりえない. 従って, g が 6 以上の偶数のとき, $\chi_f \geq 12(g-3)/(3\lambda-8)$ が成り立つ.

最後に, g が奇数の場合に, $A(g, \lambda, 6)$ と $B(g, \lambda, M)$ とを比べる. $M \geq g+1$ とすると,

$$\begin{aligned} B(g, \lambda, M) - A(g, \lambda, 6) &= \frac{2M(g-1)}{\lambda(g+1) - 4(g-1)} - \frac{12(g-3)}{3\lambda-8} \\ &\geq \frac{2(g+1)(g-1)}{\lambda(g+1) - 4(g-1)} - \frac{12(g-3)}{3\lambda-8} \\ &= \frac{6\lambda\{-(g-2)^2 - 9\} + 32(g^2 - 6g + 5)}{\{\lambda(g+1) - 4(g-1)\}(3\lambda-8)} \end{aligned}$$

が成り立つ. $g \geq 7$ であることから, $-(g-2)^2 - 9 < 0$ である. ここで, $\lambda \leq 4$ かつ $g \geq 7$ より,

$$\begin{aligned} B(g, \lambda, M) - A(g, \lambda, 6) &\geq \frac{6\lambda\{-(g-2)^2 - 9\} + 32(g^2 - 6g + 5)}{\{\lambda(g+1) - 4(g-1)\}(3\lambda-8)} \\ &\geq \frac{8(g-5)(g-7)}{\{\lambda(g+1) - 4(g-1)\}(3\lambda-8)} \geq 0 \end{aligned}$$

となる. よって, g が 7 以上の奇数の場合も $\chi_f \geq 12(g-3)/(3\lambda-8)$ であることが示せた. $\square$

命題 2.3 から直ちに以下の系を得る.

系 2.4 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. $g(f) \geq 6, \chi_f = 3g(f) - 9$ であるならば, $\lambda(f) \geq 4$ である.

次に $2 \leq g(f) \leq 5$ の場合を考察する. まず次の補題を示す.

補題 2.5 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. $\bar{\rho}: S \rightarrow \bar{S}$ を S の極小モデル, ϵ を $\bar{\rho}$ により縮約される例外曲線の数とする. このとき, $8(g(f) -$

1) $-\epsilon < K_f^2$ かつ $\{K_f^2 - 4(g(f) - 1)\}\epsilon \leq 4(g(f) - 1)^2$ が成り立つ. 特に, $\epsilon \neq 0$ であるならば, 以下の不等式が成り立つ:

$$8(g(f) - 1) - \epsilon < K_f^2 \leq 4(g(f) - 1) + \frac{4(g(f) - 1)^2}{\epsilon}.$$

(証明) $\bar{S}$ が S の極小モデルで, S が一般型曲面であるから,

$$0 < K_{\bar{S}}^2 = K_S^2 + \epsilon = K_f^2 - 8(g(f) - 1) + \epsilon$$

が成り立つ. 従って, $8(g(f) - 1) - \epsilon < K_f^2$ を得る.

C を $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ のあるファイバーの $\bar{\rho}$ による固有変換像とし, C の算術種数を $p_a(C)$ と表す. F と $\bar{\rho}$ により縮約される各例外曲線との交点数を $l_1, l_2, \dots, l_\epsilon$ とする. このとき, $C^2 = \sum_{i=1}^\epsilon l_i^2 \geq \epsilon$ かつ $p_a(C) = g(f) + \sum_{i=1}^\epsilon l_i(l_i - 1)/2$ であるから,

$$\begin{aligned} K_{\bar{S}} \cdot C &= 2p_a(C) - C^2 = 2g(f) - 2 + \sum_{i=1}^\epsilon l_i(l_i - 1) - C^2 \\ &= 2g(f) - 2 - \sum_{i=1}^\epsilon l_i \leq 2g(f) - 2 - \epsilon \end{aligned}$$

を得る. Hodge の指数定理から, $K_{\bar{S}}^2 \cdot C^2 \leq (K_{\bar{S}} \cdot C)^2$ が成り立つ (cf. [13, p. 127]). よって, $(K_f^2 - 8(g(f) - 1) + \epsilon)\epsilon \leq \{2(g(f) - 1) - \epsilon\}^2$ を得る. 従って $\epsilon \neq 0$ であれば, $K_f^2 \leq 4(g(f) - 1) + 4(g(f) - 1)^2/\epsilon$ が成り立つ. $\square$

系 2.6 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. ϵ を補題 2.5 のようにとる. このとき, $\epsilon < 2(g(f) - 1)$ である.

(証明) $\bar{S}$ が一般型曲面であるから, $K_{\bar{S}}$ はネフである. 特に, $0 \leq K_{\bar{S}} \cdot C \leq 2(g(f) - 1) - \epsilon$ が成り立つ. 補題 2.5 より, $\{\epsilon^2 - 2(g(f) - 1)\}^2 > 0$ より $\epsilon \neq 2(g(f) - 1)$ である. $\square$

補題 2.5 を用いると, $2 \leq g(f) \leq 5$ の場合に χ_f の下限を示すことができる.

命題 2.7 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. $\lambda(f) \leq 4$, $2 \leq g(f) \leq 5$ であるとき, $\chi_f \geq [3g(f)/2]$. が成り立つ.

(証明) $\chi_f \leq [3g(f)/2] - 1$ を仮定して, 矛盾を示す. 補題 2.5 と仮定から, $8(g(f) - 1) - \epsilon < K_f^2 \leq 4([3g(f)/2] - 1) = 6g(f) - 4$ が成り立つ. 従って, 系 2.6 から $\epsilon = 2g(f) - 3$ でなければならない. 補題 2.5 から,

$$6g(f) - 5 < \chi_f \leq 4(g(f) - 1) + \frac{4(g(f) - 1)^2}{2g(f) - 3}$$

を得る. 一方,

$$4(g(f) - 1) + \frac{4(g(f) - 1)^2}{2g(f) - 3} - (6g(f) - 5) - 1 = \frac{2(2 - g(f))}{2g(f) - 3}$$

であるから, $2 < g(f) \leq 6$ のとき, $6g(f)-5$ より大きく, $4(g(f)-1)+4(g(f)-1)^2/(2g(f)-3)$ 以下の整数は存在しない.

また, $g(f) = 2$ ならば, $\epsilon = 1$, $\chi_f = 2$, $K_f^2 = 8$ でなければならない. $\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}}) = 1$, $K_{\bar{S}}^2 = 1$ であるから, $\bar{S}$ は数値的 Godeaux 曲面である. しかし, $K_{\bar{S}} \cdot C = 1$ であるから, [9, Lemma 5] により $\dim H^0(\bar{S}, \mathcal{O}_{\bar{S}}(C)) \leq 1$ となる. これは代数曲線族 f が存在性に矛盾する. $\square$

命題 2.3 と命題 2.7 により, 次の系を得る.

系 2.8 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な局所自明ではない超楕円曲線族とする. $\lambda(f) \leq 4$ ならば, $\chi_f \geq \Gamma(g(f))$ である.

3 $\lambda(f) = 4$, $\chi_f = \Gamma(g(f))$ を満たす超楕円曲線族の存在性

1 節でも述べたように, 非特異曲線 C 上の超楕円曲線族は C 上の射影直線束の 2 重被覆で与えられる. この節では, Hirzebruch 曲面上に分岐因子 B を与えることにより, 任意の 2 以上の整数 g に対して, $g(f) = g$, $\chi_f = \Gamma(g(f))$, $\lambda(f) = 4$ を満たす相対的極小な超楕円曲線族の存在を示す. 有効因子 B を分岐因子とする 2 重被覆から得られる超楕円曲線族を $f_B: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ と表すこととし, f_B の構造や標準解消の記号について 1 節の f と同様の記号を用いることにする.

はじめに, $g \geq 6$ の場合に考察する. もし, 求める曲線族が存在するならば, 補題 2.2 の証明から $M = 6$, $d = 0$, $N = 3$ でなければならない. つまり, $W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である. ここで, $pr_i: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を第 i 射影とし, $(X_0: X_1)$ と $(Y_0: Y_1)$ をそれぞれ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第 1 番目の $\mathbb{P}^1$ と第 2 番目の $\mathbb{P}^1$ の斉次座標とする. $x = X_1/X_0$, $y = Y_1/Y_0$ と書き, $\mathbb{P}^1$ 上の点 $(1: a)$ を単に a , $(0: 1)$ を ∞ と表すこととする. $\mathbb{P}^1$ 上の点 t に対して, $\Delta_t = pr_1^{-1}(t)$, $F_t = pr_2^{-1}(t)$ とおく. このとき, 求める曲線族を与える分岐因子 B は $2(g+1)\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値である. 式 (1), (2) により,

$$3g - 9 = 3g - \sum_{k=1}^n [m_k/2]([m_k/2] - 1)/2,$$

$$12g - 36 = 12g - 12 - \sum_{k=1}^n 2([m_k/2] - 1)^2 + (\text{the number curves contracted by } \rho)$$

であるから, B は 6 重点を無限に近い点を含めて 3 つもち, ρ により縮約される例外曲線の数も 0 でなくてはならない. ここでは, 上のような条件を満たす有効因子を構成することにより証明を行う.

命題 3.1 任意の 6 以上の整数 g に対して, $g(f) = g$, $\lambda(f) = 4$, $\chi_f = \Gamma(g)$ を満たす相対的極小な超楕円曲線族 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ で S が一般型曲面となるものは存在する.

(証明) x, y の多項式 Φ の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上での零点集合のザリスキ閉包を $D(\Phi)$ と表す. $\Phi_{\alpha, \beta}(x, y) = y + \alpha xy + \beta x^2$ とおく. $\beta \neq 0$ であれば, $D(\Phi_{\alpha, \beta})$ は $2\Delta_0 + F_0$ に線形同値で,

$(0, 0)$ において F_0 と接し, (∞, ∞) を通る. さらに $\alpha \neq 0$ であれば, $D(\Phi_{\alpha, \beta})$ は F_∞ と接しない. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ となる $D(\Phi_{\alpha, \beta})$ を 6 つとり, 切断 Δ_t を $2g - 10$ 個をとり, その和を B_g とする. このとき, これらの有効因子を適当にとれば B_g は以下の性質をもつ:

- B_g は $2(g+1)\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値である,
- B_g は $(0, 0)$ において 2-fold 6 重点をもち, (∞, ∞) において単純 6 重点をもつ,
- B_g は上記の 2 点以外では 2 重点のみをもつ.

このとき, 明らかに ρ により縮約される (-1) -曲線の数 $g(f_{B_g}) = g$, $\lambda(f_{B_g}) = 4$, $\chi_{f_{B_g}} = \Gamma(g)$ である.

$(0, 0)$ は分岐因子 B_g の特異点であるから, ブローアップ ν_1 の中心を $(0, 0)$ としてよい. Δ_0 と B_g との交点は 2-fold 6 重点 $(0, 0)$ のみであることから, Δ_0 の W_n における固有変換の φ_n による逆像は 2 つの (-1) -曲線となる. これらを E_1, E_2 とおく. ν_1 の例外曲線の W_n における固有変換の φ_n による逆像は 2 つの (-2) -曲線となる. これらを E_3, E_4 とおく. E_3, E_4 はそれぞれ E_1, E_2 と 1 点のみで交わることから, これらは $\bar{\rho}$ により縮約される. さらに, Δ_∞ の W_n における固有変換の φ_n による逆像も 2 つの (-1) -曲線となる. 従って, $\bar{\rho}$ により縮約される例外曲線の数も 6 つで, $K_{\bar{S}}^2 = 12g - 36 - 8(g-1) + 6 = 4g - 22 > 0$ となる. つまり, S は一般型曲面である. 以上より, $f_{B_g}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ が求める曲線族であることが示せた. $\square$

注意 3.2 上の命題の証明における $\bar{S}$ の数値的性質は以下ようになる:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}}) &= 3g - 9 - (g - 1) = 2g - 8, \\ K_{\bar{S}}^2 &= 4g - 22.\end{aligned}$$

つまり, $K_{\bar{S}}^2 = 2\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}}) - 6$ を満たすことから, $\bar{S}$ は Noether 直線上にある一般型曲面である.

系 3.3 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対的極小な超楕円曲線族とする. $6 \leq g(f) \leq 10$, $\chi_f = 3(g(f) - 3)$, $\lambda(f) \leq 4$ を満たすならば, S の極小モデル $\bar{S}$ は以下の数値的条件を満たす:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}}) &= 2g(f) - 8, \\ K_{\bar{S}}^2 &= 4g(f) - 22.\end{aligned}$$

(証明) $6 \leq g(f) \leq 10$, $\chi_f = 3(g(f) - 3)$, $\lambda(f) \leq 4$ ならば, $\lambda(f) = 4$ となる. 従って, $\epsilon = 6$ であることを示せばよい. 補題 2.2 より, $g(f) \leq 10$ ならば $\epsilon \leq (g(f) - 1)^2 / (2g(f) - 8) < 7$ が成り立つ. 一方, $\chi(\mathcal{O}_{\bar{S}}) = 2g(f) - 8$, $K_{\bar{S}}^2 = 4g(f) - 28 + \epsilon$ と Noether の不等式から, $\epsilon \geq 6$ である. 以上より, $\epsilon = 6$ が成り立つ. $\square$

次に, $g \geq 6$ 以上の場合と同様に分岐因子を構成することにより, 2 以上 5 以下の整数 g に対して, $g(f) = g$, $\chi_f \geq \Gamma(g(f))$, $\lambda(f) = 4$ を満たす超楕円曲線族を与える.

命題 3.4 任意の 2 以上 5 以下の整数 g に対して, $g(f) = g$, $\lambda(f) = 4$, $\chi_f = \Gamma(g)$ を満たす相対的極小な超楕円曲線族 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ で S が一般型曲面となるものは存在する.

(証明) $p_d: \Sigma_d = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \rightarrow \mathbb{P}^1$ を次数 d の Hirzebruch 曲面とし, $\Delta_0^{(d)} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \subset \Sigma_d$, $\Delta_\infty^{(d)} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \subset \Sigma_d$ とおく.

(a) $g = 2$ の場合. [7, Lemma 2.1] より, Σ_3 上の有効因子 D_2 で以下の性質をもつものが存在する:

- D_2 は $6\Delta_0^{(d)}$ に線形同値である,
- D_2 は $\Delta_0^{(d)}$ 上に 2-fold 3 重点を 6 点もつ (これを Q_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) とおく),
- 各 Q_k の解析的分枝は p_d のファイバーと接する,
- $\Delta_0^{(d)}$ 上にない D_2 の特異点は高々 2 重点のみである.

ここで, $B_2 = D_2 + p_d^{-1}(p_d(Q_1)) + p_d^{-1}(p_d(Q_2))$ とおき, 超楕円曲線族 $f_{B_2}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考察する. 2つのファイバー $p_d^{-1}(p_d(Q_1))$, $p_d^{-1}(p_d(Q_2))$ は B_2 に含まれ, B_2 の 2-fold 4 重点が 1 つずつこれらのファイバー上にあることから, $p_d^{-1}(p_d(Q_1))$, $p_d^{-1}(p_d(Q_2))$ の φ による逆像の $\tilde{S}$ における固有変換はどちらも (-1) -曲線である. また, 2-fold 3 重点 Q_k ($k = 3, 4, 5, 6$) におけるブローアップの例外因子の W_n における固有変換の φ_n による逆像もまた (-1) -曲線である. つまり, ρ により縮約される例外曲線の数 は 6 つである.

B_2 が $6\Delta_0^{(d)} + 2F$ に線形同値であるから, 式 (1), (2) を用いると, $\chi_{f_{B_2}} = 11 - 8 = 3$, $K_{f_{B_2}}^2 = 22 - 16 + 6 = 12$, $K_{\tilde{S}}^2 \geq 4$ となり, f_{B_2} が求める曲線族であることが分かる.

(b) $g = 3$ の場合. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆により曲線族を与える. $\Psi_\alpha(x, y) = y^2 - 1 + (y^2 + 1)x + \alpha(y^2 + 1)x(x - 1)$ とおく. $D_{\alpha, \beta} = D((x - 1)\Psi_\alpha + \beta xy^2)$ ($\alpha, \beta \neq 0$) は $3\Delta_0 + 2F_0$ に線形同値で, $(1, 0)$ は $D_{\alpha, \beta}$ の単純 2 重点である. さらに, $D_{\alpha, \beta}$ は $(\infty, \pm\sqrt{-1})$ において pr_1 のファイバーと接し, $(0, \pm 1)$ を通るが, F_1, F_{-1} とは接しない. $D(\Psi_\gamma)$ は $2\Delta_0 + 2F_0$ に線形同値で, $(\infty, \pm\sqrt{-1})$ において pr のファイバーと接し, $(1, 0)$ と $(0, \pm 1)$ を通る. ただし, Δ_1 とは接するが, F_1, F_{-1} と接しない.

$D_{\alpha, \beta}$ を 1 つ, $\gamma \neq 0$, α となる $D(\Psi_\gamma)$ を 2 つ, Δ_0 と $t \neq 0, 1$, infity , を満たす Δ_t を 1 つ選び, これらの和を B_3 とする. このとき, B_3 は以下の性質をもつ:

- B_3 は $8\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値である,
- $(\infty, \pm\sqrt{-1})$ は B_3 の 2-fold 3 重点で, $(0, \pm 1)$ は単純 4 重点である,
- $(1, 0)$ B_3 の 4 重点である,
- 上記の特異点以外の B_3 の特異点 (無限に近い点を含む) は, 2 重点または単純 3 重点である.

超楕円曲線族 $f_{B_3}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ の数値的性質について考察する. B_3 が 2 つの 2-fold 3 重点をもつことから, ρ により縮約される (-1) -曲線の数 は 2 である. よって, 式 (1), (2) を用

いると, $\chi_{f_{B_3}} = 9 - 5 = 4$, $K_{f_{B_3}}^2 = 24 - 10 + 2 = 16$ である. Δ_∞ 上に単純 4 重点が 2 点存在するので, Δ_∞ の φ による逆像の S における固有変換は (-1) -曲線でなければならない. つまり, $\epsilon = 1$ である. このことから, $K_S^2 = 16 - 8(3 - 1) + 1 > 0$ から, S は一般型曲面である. よって, f_{B_3} が求める曲線族である.

(c) $g = 4$ の場合. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆により曲線族を与える. $a_i(y)$ ($i = 1, 2, 3$) を定数項が 0 ではない y の 2 次式で, $i \neq j$ ならば, a_i, a_j は互いに素かつ $a_i(0) \neq a_j(0)$ を満たすものとする. $D_4 = \sum_{i=1}^3 D(y + a_i(y)x)$ は $3\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値で, $(0, 0), (0, \infty)$ において単純 3 重点と 6 点の通常 2 重点をもつ. これらの通常 2 重点を Q_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) とおく.

$P \in \Sigma_d$ を中心とするブローアップと P のファイバーの固有変換のブローダウンとの合成を P を中心とする基本変換といい, $\iota(P)$ と表す. また, $\sigma: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を $(x, y) \mapsto (y, x)$ で定義される自己同型射とする. 交点数を考察すると, Q_k の pr_2 による像は少なくとも 2 つ以上の点からなる. 従って, Q_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) を適当に選べば, $\iota = \sigma \circ \iota(Q_4) \circ \iota(Q_3) \circ \iota(Q_2) \circ \iota(Q_1) \circ \sigma$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への双有理写像となる. このとき, ι による D_4 の固有変換 $\iota[D_4]$ は $7\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値で, 単純 3 重点を 2 つと単純 4 重点を 4 つもつ有効因子となる.

$\iota[D_4]$ の特異点を通らない Δ_{t_l} ($l = 1, 2$) をとり, $B_4 = \iota[D_4] + \Delta_0 + \sum_{l=1}^2 \Delta_{t_l}$ とおく. $\iota[D_4]$ の 2 つの単純 3 重点は Δ_0 上あることから, B_4 上の単純 4 重点は全部で 6 つとなる. また, これらの 6 つの特異点以外の B_4 の特異点 (無限に近い点を含む) は 2 重点のみである.

超楕円曲線族 $f_{B_4}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考察すると, 明らかに ρ により縮約される (-1) -曲線は存在しない. B_4 が $10\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値であることから, 式 (1), (2) を用いると, $\chi_{f_{B_4}} = 12 - 6 = 6$, $K_{f_{B_4}}^2 = 36 - 12 = 24$ である. さらに, Δ_0 上に単純 4 重点が 2 点存在するので, Δ_0 の φ による逆像の S における固有変換は (-1) -曲線でなければならない. つまり, $\epsilon = 1$ である. このことから $K_S^2 = 24 - 8(4 - 1) + 1 > 0$ から, S は一般型曲面である. よって, f_{B_4} は求める曲線族である.

(d) $g = 5$ の場合. D_4 上になく, $pr_i(R_1) \neq pr_i(R_2)$ ($i = 1, 2$) を満たす $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 点を R_1, R_2 とする. このとき, $\iota' = \sigma \circ \iota(R_1) \circ \iota(R_2) \circ \sigma$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への双有理写像である. さらに, D_4 の ι による固有変換像 $\iota'[D_4]$ は $11\Delta_0 + 6F_0$ に線形同値で, 単純 3 重点を 2 つと単純 6 重点を 2 つもつ有効因子となる.

$B_5 = \iota'[D_4] + \Delta_0$ とおくと, B_5 は単純 4 重点 2 つと単純 6 重点を 2 つもち, これらの特異点以外には (無限に近い点を含め) 2 重点のみしかもたない. 超楕円曲線族 $f_{B_5}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考察すると, ρ により縮約される例外曲線は存在せず, $\chi_{f_{B_5}} = 15 - 8 = 7$, $K_{f_{B_5}}^2 = 48 - 20 = 28$ である. B_4 の場合と同様の議論で, Δ_0 の φ による逆像の S における固有変換は (-1) -曲線でなければならない. さらに, $\Delta_{pr_2(R_k)}$ ($k = 1, 2$) と B_5 の交点は単純 6 重点 1 つだけであることから, 各 $\Delta_{pr_2(R_k)}$ の W_n における固有変換の φ_n による逆像は 2 つの (-1) -曲線となる. 従って, $\epsilon = 5$ であるから, $K_S^2 = 28 - 8(5 - 1) + 5 > 0$ を得る. つまり, S は一般型曲面である. よって, f_{B_5} が求める曲線族である.

□

系 2.8 と命題 3.1, 3.4 により, 定理 0.3 が示せた.

参考文献

- [1] A. Beauville : Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54 (1978). Soc. Math. France.
- [2] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, Van de Ven : Compact complex surfaces 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin etc. 2004.
- [3] E. Horikawa : On deformations of quintic surfaces, Inv. Math. 31 (1975), 43–85.
- [4] E. Horikawa : On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, Complex analysis and algebraic geometry, 79–90, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.
- [5] E. Horikawa : Algebraic surfaces of general type with small c_1^2 , I, II, III, IV, V, Ann. of Math. (2) 104 (1976), 358–387 ; Invent. Math. 37 (1976), 121–155 ; ibid. 47 (1978), 209–248 ; ibid 50 (1978/79), 103–128 ; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28 (1981), 745–755.
- [6] H. Ishida : Bound of the relative Euler-Poincaré characteristic for certain hyperelliptic fibrations, manuscr. math. 118 (2005), 467–483.
- [7] H. Ishida : The existence of hyperelliptic fibrations with slope four and high relative Euler-Poincaré characteristic, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 4, 1221–1235.
- [8] K. Konno : Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 20 (1993), no. 4, 575–595.
- [9] Y. Miyaoka : Tricanonical maps of numerical Godeaux surfaces, Invent. Math. 34 (1976), no. 2, 99–111.
- [10] U. Persson : Double coverings and surfaces of general type, Springer Lect. Notes in Math. 687 (1978), 168–195.
- [11] U. Persson : Chern invariants of surfaces of general type, Comp. Math. 43 (1981), 3–58.
- [12] G. Xiao : Surfaces fibrées en courbes de genre deux, Lecture Notes in Math. 1137, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.
- [13] G. Xiao : Hyperelliptic surfaces of general type with $K^2 < 4\chi$, manuscr. math. 57 (1987), 125–148.
- [14] G. Xiao : Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. 276 (1987), 449–466.

GENERAL EDUCATION

UBE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

TOKIWADAI, UBE 755-8555

JAPAN

E-mail address : ishida@ube-k.ac.jp

小収縮を持つ 4 次元ファノ多様体の具体例

月岡 透

November 6, 2013

1 序論

例外集合の余次元が 2 以上となる（つまり、例外集合が因子でない）双有理射を小収縮（small contraction）という。端射線から定められる小収縮については次が基本的である（[3] Theorem 1.1）：

X を複素数体上定義された 4 次元非特異射影多様体とする。 $\varphi : X \rightarrow Y$ を端射線の定める小収縮とする。このとき、 φ の例外集合 E は互いに交わらない有限個の既約成分 E_i ($i = 1, \dots, n$) の和で、 $E_i \simeq \mathbb{P}^2$ かつ $N_{E_i/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$ となる。

このような小収縮を持つ非特異 4 次元多様体の構成法として次がある（[3] Example 2.6）：

4 次元非特異多様体 V を考える。 $C \subset V$ を非特異曲線、 $S \subset V$ を非特異曲面とする。 C と S は点 $p_1, \dots, p_n$ において横断的に交わるとする。 $\alpha : V' \rightarrow V$ を曲線 C に沿ったブローアップとし、 S' を S の狭義変換とする。次に曲面 S' に沿ったブローアップ $\beta : X \rightarrow V'$ を考え、 E_i を $\alpha^{-1}(p_i)$ の β による狭義変換とする。すると、 $N_{E_i/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$ となり、 $E := E_1 \cup \dots \cup E_n$ をつぶす小収縮 $\varphi : X \rightarrow Y$ が存在する。

3 次元以下の非特異ファノ多様体はすでに分類されている。1 次元は $\mathbb{P}^1$ のみであり、2 次元は Del Pezzo 曲面、3 次元は [1],[2],[5],[4] により分類された。4 次元ファノ多様体については、部分的な分類があるのみであり、特殊な場合の分類でも意味がある（たとえば、[6] を参照）。そこで、本稿では上記の構成法にを用いて、小収縮を持つファノ多様体の具体例を与える。

2 具体例

まず、 $V = \mathbb{P}^4$ の斉次座標を $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4)$ とする。2 次曲面 $S := \{X_0X_3 - X_1X_2 = X_4 = 0\}$ と直線 $C := \{X_1 = X_3 = X_4 = 0\}$ を考える。 $c_1 := (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$, $c_2 := (0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ とおけば、 $S \cap C = \{c_1, c_2\}$ である。

$\alpha : V' \rightarrow V$ を C に沿ったブローアップとし、 S' を S の狭義変換とする。 $\beta : X \rightarrow V'$ を S' に沿ったブローアップとする。序論で述べた構成法により、 X は既約成分が 2 個ある小収縮を持つことが分かる（[3] Example 2.6）。

命題： X はファノ多様体である。

(証明) 任意の曲線 $\Gamma \subset X$ に対して、 $-K_X \cdot \Gamma > 0$ となることは容易に示せる。したがって、 $(-K_X)^4 > 0$ が分かれば、基底点自由定理により $-K_X$ は豊富である。自己交点数 $(-K_X)^4$ を計算するために次の因子を考える：

- F : ブローアップ $\beta : X \rightarrow V'$ の例外因子
- E : ブローアップ $\alpha : V' \rightarrow V$ の例外因子の β による引き戻し
- $H := (\alpha \circ \beta)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$

これらについて次を得る (証明は次の章を参照)：

- (1) $H^2EF = HE^2F = HEF^2 = 0$
- (2) $FE^3 = 0, F^2E^2 = 2, F^3E = -2, F^4 = -12$
- (3) $H^3F = 0, H^2F^2 = -2, HF^3 = -6, H^4 = 1$
- (4) $EH^3 = 0, E^2H^2 = 0, E^3H = 1, E^4 = 3$

$K_X = -5H + 2E + F$ より、

$$\begin{aligned} (-K_X)^4 &= K_X^4 \\ &= (-5H + 2E + F)^4 \\ &= 625H^4 - 500H^3(2E + F) + 150H^2(2E + F)^2 - 20H(2E + F)^3 + (2E + F)^4 \end{aligned}$$

となるが、交点数の計算 (1),(2),(3),(4) より、

$$\begin{aligned} H^4 &= 1, \\ H^3(2E + F) &= 2H^3E + H^3F = 0, \\ H^2(2E + F)^2 &= 4H^2E^2 + H^2F^2 + 4H^2EF = -2, \\ H(2E + F)^3 &= 8HE^3 + 12HE^2F + 6HEF^2 + HF^3 = 2, \\ (2E + F)^4 &= 16E^4 + 32E^3F + 24E^2F^2 + 8EF^3 + F^4 = 68 \end{aligned}$$

であるから、

$$(-K_X)^4 = 625 \cdot 1 - 500 \cdot 0 + 150 \cdot (-2) - 20 \cdot 2 + 68 = 353 > 0$$

を得る。(証明終)

3 交点数の計算

因子 $H \subset X$ は $\mathbb{P}^4$ の一般の平面 $D \simeq \mathbb{P}^3$ の引き戻しであることに注意する。ブローアップの合成 $\alpha \circ \beta : X \rightarrow \mathbb{P}^4$ を H へ制限すると、 $(\alpha \circ \beta)|_H : H \rightarrow D \simeq \mathbb{P}^3$ は、2次曲線 $D \cap S$ と1点を中心としたブローアップである。したがって、前章の交点数 (1),(2),(3),(4) において H を含むものは、3次元ファノ多様体 H 上の交点数計算に帰着する。例えば、

$$H^2F^2 = H|_H(F|_H)^2$$

となり、容易に交点数が計算できる。また、 FE^3, F^2E^2, F^3E, E^4 はいずれも E 上の交点数に帰着させる事ができる。ここでは F^4 の計算を考える。超平面 $P := \{X_4 = 0\} \subset \mathbb{P}^4$ を考える。 P は 2 次曲面 S と直線 C を含むことに注意する。 P の X における狭義変換も P と表すことにする。 X 上の因子として、

$$P = H - E - F$$

なる関係（線形同値）がある。

F^4 を計算するため、以下の記号を準備する：

- $h_1 := \{X_1 = X_3 = X_4 = 0\}$
- $h_2 := \{X_0 = X_1 = X_4 = 0\}$
- e_i ($i = 1, 2$) : 2 点ブローアップ $\alpha|_{S'} : S' \rightarrow S$ の例外曲線
- h'_i ($i = 1, 2$) : $\alpha|_{S'}$ による h_i の狭義変換
- $E_i := (\beta|_F)^* e_i$
- $H_i := (\beta|_F)^* h'_i$
- $\tilde{S} := P \cap F$
- $\tilde{e}_i := E_i \cap \tilde{S}$
- $\tilde{h}_i := H_i \cap \tilde{S}$
- $f : \mathbb{P}^1$ 束 $\beta|_F : F \rightarrow S'$ のファイバー

主張： F における因子と曲線の交点数の表として次を得る：

	$\tilde{S}$	H_1	H_2	E_1	E_2
f	1	0	0	0	0
$\tilde{h}_1$	-2	-1	1	1	0
$\tilde{h}_2$	-2	1	-1	0	1
$\tilde{e}_1$	1	1	0	-1	0
$\tilde{e}_2$	1	0	1	0	-1

(証明) $P|_F = \tilde{S}$ に注意する。まず

$$(\tilde{S} \cdot f)_F = (P \cdot f)_X = 1$$

である。また、 $i = 1, 2$ に対して、

$$(\tilde{S} \cdot \tilde{h}_i)_F = (P \cdot \tilde{h}_i) = -2$$

$$(\tilde{S} \cdot \tilde{e}_i)_F = (P \cdot \tilde{e}_i) = 1$$

である。その他については S' 上の交点数計算に帰着する。例えば、

$$E_i \cdot \tilde{e}_i = (\beta|_F)^* e_i \cdot \tilde{e}_i = e_i \cdot (\beta|_F)_* \tilde{e}_i = e_i \cdot e_i = -1$$

を得る。(証明終)

主張： $\tilde{S}|_{\tilde{S}} = -(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + 2\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2)$ である。

(証明) $\tilde{S} \simeq S'$ は $S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 点ブローアップであることを思い出す。

$$\text{Pic}(\tilde{S}') = \mathbb{Z}[\tilde{h}_1] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{h}_2] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{e}_1] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{e}_2]$$

であるから、

$$\tilde{S}|_{\tilde{S}} = a_1\tilde{h}_1 + a_2\tilde{h}_2 + b_1\tilde{e}_1 + b_2\tilde{e}_2$$

となる整数 a_1, a_2, b_1, b_2 が存在する。上で得た F における交点数の表より、

$$(\tilde{S}|_{\tilde{S}} \cdot \tilde{h}_i)_{\tilde{S}} = (\tilde{S} \cdot \tilde{h}_i)_F = -2$$

$$(\tilde{S}|_{\tilde{S}} \cdot \tilde{e}_i)_{\tilde{S}} = (\tilde{S} \cdot \tilde{e}_i)_F = 1$$

であるから、連立方程式

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 + b_1 &= -2 \\ a_1 - a_2 + b_2 &= -2 \\ a_1 - b_1 &= 1 \\ a_2 - b_2 &= 1 \end{cases}$$

を得る。これを解けばよい。(証明終)

主張： $F|_F = -\tilde{S} + H_1 + H_2$ である。

(証明)

$$\begin{aligned} \text{Pic}(F) &= \mathbb{Z}[\tilde{S}] \oplus (\beta|_F)^* \text{Pic}(S') \\ &= \mathbb{Z}[\tilde{S}] \oplus (\beta|_F)^* (\mathbb{Z}[\tilde{h}_1] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{h}_2] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{e}_1] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{e}_2]) \\ &= \mathbb{Z}[\tilde{S}] \oplus \mathbb{Z}[H_1] \oplus \mathbb{Z}[H_2] \oplus \mathbb{Z}[E_1] \oplus \mathbb{Z}[E_2] \end{aligned}$$

であるから、

$$F|_F = a\tilde{S} + b_1H_1 + b_2H_2 + c_1E_1 + c_2E_2$$

となる整数 a, b_1, b_2, c_1, c_2 が存在する。 $F \cdot f = -1$ であり、 $i = 1, 2$ について

$$F \cdot \tilde{h}_i = 2, \quad F \cdot \tilde{e}_i = 0$$

であるから、連立方程式

$$\begin{cases} a = -1 - 2a - b_1 + b_2 + c_1 &= 2 \\ -2a + b_1 - b_2 + c_2 &= 2 \\ a + b_1 - c_1 &= 0 \\ a + b_2 - c_2 &= 0 \end{cases}$$

を得る。これを解けばよい。(証明終)

さて、以上より、

$$\begin{aligned}
(-\tilde{S})^3 &= (-\tilde{S}|_{\tilde{S}})^2 \\
&= (-(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + 2\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2))^2 \\
&= (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2)^2 + 4(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2)(\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2) + 4(\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2)^2 \\
&= 0 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^2(H_1 + H_2) &= \tilde{S}|_{\tilde{S}} \cdot (H_1 + H_2)|_{\tilde{S}} \\
&= -(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + 2\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2) \cdot (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2) \\
&= -4
\end{aligned}$$

$$-\tilde{S} \cdot (H_1 + H_2)^2 = -((H_1 + H_2)|_{\tilde{S}})^2 = -(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2)^2 = 0$$

$$(H_1 + H_2)^3 = ((\beta|_F)^*(h'_1 + h'_2))^3 = 0$$

となるから、

$$\begin{aligned}
F^4 &= (F|_F)^3 \\
&= (-\tilde{S} + H_1 + H_2)^3 \\
&= (-\tilde{S})^3 + 3\tilde{S}^2(H_1 + H_2) - 3\tilde{S}(H_1 + H_2)^2 + (H_1 + H_2)^3 \\
&= 0 + 3 \cdot (-4) - 3 \cdot 0 + 0 \\
&= -12
\end{aligned}$$

を得る。

References

- [1] V. A. Iskovskih, Fano threefolds. I. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 41 (1977), no. 3, 516–562, 717.
- [2] V. A. Iskovskih, Fano threefolds. II. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 42 (1978), no. 3, 506–549.
- [3] Y. Kawamata, Small contractions of four-dimensional algebraic manifolds. *Math. Ann.* 284 (1989), no. 4, 595–600.
- [4] S. Mori and S. Mukai, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, *Manuscripta Math.* **36**, 147–162 (1981/82) Erratum: *Manuscripta Math.* **110**, 407 (2003)
- [5] V. V. Shokurov, Smoothness of a general anticanonical divisor on a Fano variety, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 43 (1979), no. 2, 430–441
- [6] T. Tsukioka, On the minimal length of extremal rays for Fano four-folds. *Math. Z.* 271 (2012), no. 1-2, 555–564.

(V) 型の特異ファイバーを 3 本持つ種数 2 の 有理ファイバー曲面 III

北川真也

1 主定理と背景

平面 3 次曲線の一般のペンシルは 9 個の基点を持ち, 基点を解消すると, 階数 8 のルート格子 E_8 をモデル・ヴェイユ格子とする有理楕円曲面が得られる ([10]). 逆に, 切断をもつ相対極小な有理楕円曲面は 9 回の適当な (-1) 曲線の縮約により, ファイバーの像が平面 3 次曲線のペンシルを成す. 有理曲面 X の相対極小な種数 2 曲線束 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ も同様に, 特別な場合を除いて射影平面への双有理射 $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在して, f の各ファイバーの v による像が平面曲線のペンシル Λ を成す. ピカール数 $\rho(X)$ に対して, Λ の基点は無限近傍点も含めて数えると $\rho(X) - 1$ 個である. 基点を解消する事で, Λ に付随する有理写像 $\Phi_{|\Lambda|}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ から元の $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が復元される.

f の切断を X 上の曲線とみなして, 自己交点数が -1 となる切断を (-1) 切断と呼ぶ.

定理 1 ([2], [1], [4], [6]). X を非特異有理曲面, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対極小な種数 2 曲線束とする. ピカール数 $\rho(X)$ について, $11 \leq \rho(X) \leq 14$ である. f の一般ファイバーを F で表す. $\rho(X) \neq 14$ または f のモデル・ヴェイユ群が非自明と仮定すれば, 双有理射 $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在する. さらに, それらの内で F の像の次数が最小となるように双有理射を選ぶと, F の像の特異点の個数と重複度及び最小次数は次の通りである.

(A) $\rho(X) = 11$ のとき, 5 重点と九つの 4 重点をもつ平面 13 次曲線,

(B1) $\rho(X) = 12$ かつ f が (-1) 切断をもつとき,

八つの 3 重点と二つの 2 重点をもつ平面 9 次曲線,

(B2) $\rho(X) = 12$ かつ f が (-1) 切断をもたないとき,

3 重点と十の 2 重点をもつ平面 7 次曲線,

(C) $\rho(X) = 13$ のとき, 八つの 2 重点をもつ平面 6 次曲線,

(D) $\rho(X) = 14$ のとき, 2 重点をもつ平面 4 次曲線.

(A), (B1), (B2), (C) 及び (D) の五つに場合分けすると, [11, 定理 3, 7, 8 及び 9] が適用し易くなり, f のモデル・ヴェイユ群を考察できる. 五つの場合それぞれに対して, 最大階数のモデル・ヴェイユ格子の構造は解明できている. そこで次に, モデル・ヴェイユ群が自明な場合に興味をもたれる. (C) の場合, モデル・ヴェイユ群が自明ならば f は (V) 型の特異ファイバーをもつ¹. ここで (V) 型とは, 堀川 [3] によって 6 系統へ種数 2 曲線束の特異ファイバーが分類された内の 1 系統である. (B2) の場合, (V) 型の特異ファイバーを 2 本もち, モデル・ヴェイユ群が自明な $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の例が構成できている. $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が (V) 型の特異ファイバーを 3 本もつならば, [3, 定理 2] より $\rho(X) = 11$ が従い, (A) の特殊な場合となる. さらに, 次が成り立つ.

定理 2 ([7, 定理 4]). 有理曲面の種数 2 曲線束は, (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つならばモデル・ヴェイユ群が自明になる.

種数 2 曲線束の特異ファイバーの浪川・上野 [8] による分類の中で, 次の六種類が堀川 [3] による分類の (V) 型の特異ファイバーに相当する: [8, p. 13, 1–IV], [8, p. 15, 1–VIII–3], [8, p. 33, 3–IV*–II₀], [8, p. 36, 3–IV*–II₀], 自然数 n を伴って [8, p. 42, 5–III_n*], 自然数 n 及び p を伴って [8, p. 42, 5–II_{n-p}*]. しかし, 有理曲面の種数 2 曲線束が (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つとき, (V) 型の特異ファイバーは [8, p. 15, 1–VIII–3], [8, p. 33, 3–IV*–II₀] 及び $n = p = 1$ を伴って [8, p. 42, 5–II₁₋₁*] のいずれかである ([7, 定理 3]). それらの双対グラフは図 1 の通りである. 図 1 の [3–IV*–II₀] 及び [1–VIII–3] において, 成分として 3 重に含まれる (–2) 曲線と (–3) 曲線の交点数は 2 であるが, 異なる 2 点で交わる場合は [3–IV*–II₀] 型, 1 点で 2 重に接する場合は [1–VIII–3] 型と区別される. また, 図 1 の [5–II₁₋₁*] における “ $\odot$ ” は自己交点数が (–1) で算術種数が 1 の曲線を表す. この曲線は尖点を持たないが, 結節点を持つか否かで [8, p. 42, 5–II₁₋₁*] の特異ファイバーを, [5–II₁₋₁*(N)] 型と [5–II₁₋₁*(S)] 型に呼び分ける事とする.

定理 3. $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3)$ を重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ の重み付き斉次座標とする. (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つ種数 2 の有理ファイバー曲面 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ のモジュライは, アフィン開集合 $\mathbb{P}(1, 2, 3) \setminus \{\sigma_1\sigma_3 = 0\}$ である.

¹モデル・ヴェイユ群が自明かつ $\rho(X) = 13$ のとき, 定義方程式も決定できている ([5, 系 13])

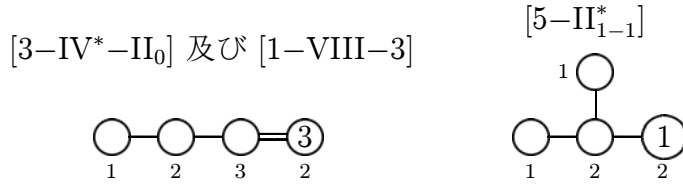


図 1.

$\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 - 16\sigma_3 = 0$ で定義される $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ 上の曲線を $\mathcal{C}_2$ とおく. 同様に, $4\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = 0$ で定義される曲線を $\mathcal{C}_3$, $\sigma_1^3 - 2\sigma_3 = 0$ で定義される曲線を $\mathcal{C}_4$, $\sigma_1^6 - 4\sigma_1^4\sigma_2 + 16\sigma_1^3\sigma_3 - 64\sigma_2^2 = 0$ で定義される曲線を $\mathcal{C}_5$ で表す.

- $\mathbb{P}(1 : 2 : 3) \setminus (\{\sigma_1\sigma_3 = 0\} \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5)$ 上の点に対応する f は, 丁度 5 本の特異ファイバーを持つ. 可約な特異ファイバーはいずれも $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型である. 既約な特異ファイバーは 2 本とも, 特異点として唯一の結節点を有する [8, p. 28, 3-I₁₋₀₋₀] のようなファイバーである.
- 5 点 $(1 : -8 : -12)$, $(8 : -137 : -144)$, $(2 : -7 : 4)$, $(0 : 1 : 0)$, $(1 : -2 : 0)$ を除く $\mathcal{C}_3$ 上の点に対応する f は, 丁度 4 本の特異ファイバーを持つ. 唯一の既約な特異ファイバーは, 特異点として唯一つの結節点を有する [8, p. 28, 3-I₁₋₀₋₀] のようなファイバーである. 可約な特異ファイバー 3 本の内, 丁度 2 本のファイバーが $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型である. 残る 1 本の可約な特異ファイバーは $[3-IV^*-II_0]$ 型である.
- 6 点 $(4 : 8 \pm 2\sqrt{-1} : 4 \pm 4\sqrt{-1})$, $(8 : -137 : -144)$, $(2 : -7 : 4)$, $(2 : 1 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ を除く $\mathcal{C}_5$ 上の点に対応する f は, 丁度 4 本の特異ファイバーを持つ. 唯一の既約な特異ファイバーは, 特異点として唯一つの結節点を有する [8, p. 28, 3-I₁₋₀₋₀] のようなファイバーである. 可約な特異ファイバー 3 本の内, 丁度 2 本のファイバーが $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型である. 残る 1 本の可約な特異ファイバーは $[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型である.
- 3 点 $(2 : -7 : 4)$, $(2 : 1 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ を除く $\mathcal{C}_2$ 上の点に対応する f は, 丁度 4 本の特異ファイバーを持つ. 3 本の可約な特異ファイバーはいずれも $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型である. 唯一の既約な特異ファイバーは, 特異点として唯一の尖点を有する [8, p. 17, 2-I_{0-II-0}] のようなファイバーである.
- 2 点 $(2 : -7 : 4)$, $(0 : 1 : 0)$ を除く $\mathcal{C}_4$ 上の点に対応する f は, 丁度 4 本の特異ファイバーを持つ. 3 本の可約な特異ファイバーはいずれも $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型

である. 唯一の既約な特異ファイバーは, 特異点として二つの結節点を有する $[8, p. 37, 4-I_{1-1-0}]$ のようなファイバーである.

- 5 点 $(1 : -8 : -12)$, $(4 : 8 \pm 2\sqrt{-1} : 4 \pm 4\sqrt{-1})$, $(8 : -137 : -144)$, $(2 : -7 : 4)$ に対応する f は, 既約な特異ファイバーを持たない. つまり, f の特異ファイバーは丁度 3 本である.
 - (a) 1 点 $(1 : -8 : -12)$ に対応する f は, $[3-IV^*-II_0]$ 型の特異ファイバー 2 本と $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型の特異ファイバーを持つ.
 - (b) 2 点 $(4 : 8 \pm 2\sqrt{-1} : 4 \pm 4\sqrt{-1})$ に対応する f は, $[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型の特異ファイバー 2 本と $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型の特異ファイバーを持つ.
 - (c) 1 点 $(8 : -137 : -144)$ に対応する f は, $[3-IV^*-II_0]$ 型と $[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型, $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型の特異ファイバーを持つ.
 - (d) 1 点 $(2 : -7 : 4)$ に対応する f は, $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型の特異ファイバー 2 本と $[1-VIII-3]$ 型の特異ファイバーを持つ.

謝辞. 例年は津山高専で開催頂いているシンポジウムを, 今回は岐阜で開催させて頂きました. 本研究は埼玉大学で酒井文雄先生から講演の機会を頂いた事を契機に進展しました. また, 今野一宏先生の叱咤・激励なくして研究は進みませんでした. 講演と執筆の機会をくださった世話人の飯高茂先生, 松田修先生, 渡利正弘先生に心から厚く御礼申し上げます.

2 証明の概略

一般に, 超楕円曲線束を備えた代数曲面の相対標準写像は, 元の曲線束と同じ底曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束への 2 重被覆を導く. 堀川 [3] では 2 重被覆の分岐因子に基づき, 代数曲面の不変量と連動して, 種数 2 曲線束の特異ファイバーが 6 系統に分類されている. 堀川 [3] の諸結果を有理曲面の場合に適用すると, 相対標準写像による像は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である事と分岐因子の線型同値類が分かり, 分岐因子が持ち得る特異点の候補が絞り込める.

X は $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異有理曲面で, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は相対極小な種数 2 曲線束とする. さらに f は (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つと仮定する. 相対標準写像 $\Phi_f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は 2 重被覆で, この分岐因子を B する. 第一成分への射影 $\text{pr}_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーを Γ で表し, 第二成分への射影 pr_2 の

一般ファイバーを Δ で表す. [3] より, $B \sim 6\Delta + 8\Gamma$ である. ここで $D \sim D'$ は二つの因子 D と D' が線型同値であることを意味する. $(s:t, u:v)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の斉次座標とする. $sv - tu = 0$ が定義する射影 $\text{pr}_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を O_1 とおき, Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ のそれぞれで $t=0, t-s=0$ 及び $s=0$ が定義する射影 pr_1 のファイバーを表し, $sv^2 - 2suv + tu^2 = 0, sv^2 - tu^2 = 0, sv^2 - 2tuv + tu^2 = 0$ が定義する射影 $\text{pr}_2: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を D_0, D_1, D_∞ とおく. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の点 $(1:0, 1:0), (1:1, 1:1)$ 及び $(0:1, 0:1)$ のそれぞれを p_0, p_1 及び p_∞ とおき, 各点における $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty$ の接方向に対応する無限近傍点を p'_0, p'_1, p'_∞ とおく. $\mathbb{P}^1$ 上の任意の異なる 3 点は, 座標変換によって 3 点 $(1:0), (1:1)$ 及び $(0:1)$ へ写す事ができる. したがって, f の 3 本の (V) 型の特異ファイバーの相対標準写像 Φ_f による像は Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ であると仮定しても一般性を失わない. $B_2 = B - \Gamma_0 - \Gamma_1 - \Gamma_\infty$ とおく. Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ のそれぞれと B_2 は 1 点で 6 重に接して, この 1 点は B_2 の 4 重点である. $\Delta \cdot B_2 = 5$ であるから, B_2 の 3 つの 4 重点はどの 2 つも射影 pr_2 の同一ファイバー上には無い. よって, B_2 は 3 点 p_0, p_1 及び p_∞ で 4 重点をもち, 3 点 p'_0, p'_1, p'_∞ で 2 重点をもつと仮定しても一般性を失わない. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 6 点 $p_0, p_1, p_\infty, p'_0, p'_1$ 及び p'_∞ でのブローアップを $\eta: \Sigma^b \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とおく. η によって p_0, p_1 及び p_∞ のそれぞれへ縮約される (-1) 曲線の Σ^b への狭義逆像を $\check{L}_0, \check{L}_1$ 及び $\check{L}_\infty$ で表し, 全引き戻しを E_0, E_1 及び E_∞ とおき, p'_0, p'_1 及び p'_∞ のそれぞれへ縮約される (-1) 曲線を E'_0, E'_1 及び E'_∞ とおく. したがって, $\check{L}_0 \sim E_0 - E'_0, \check{L}_1 \sim E_1 - E'_1$ 及び $\check{L}_\infty \sim E_\infty - E'_\infty$ である. また, η による $B_2, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty, D_0, D_1, D_\infty$ 及び O_1 のそれぞれの狭義逆像を $\hat{B}_2, \hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_\infty, \hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ とおく. η による Δ, Γ の全引き戻しは, 同じ記号で表す事とする.

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_0 &\sim \Gamma - E_0 - E'_0, & \hat{\Gamma}_1 &\sim \Gamma - E_1 - E'_1, & \hat{\Gamma}_\infty &\sim \Gamma - E_\infty - E'_\infty, \\ \hat{O}_1 &\sim \Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty, \\ \hat{B}_2 &\sim 6\Delta + 5\Gamma - 4E_0 - 4E_1 - 4E_\infty - 2E'_0 - 2E'_1 - 2E'_\infty\end{aligned}$$

である. 射影 pr_2 の切断 D_0 は 6 点 $p_0, p_1, p_\infty, p'_0, p'_1$ 及び p'_∞ の内で, p'_0 を除く 5 点を通る. 同様に, D_1 は p'_1 を除く 5 点を通り, D_∞ は p'_∞ を除く 5 点を通る. 以上から,

$$\begin{aligned}\hat{D}_0 &\sim 2\Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E'_1 - E'_\infty \\ \hat{D}_1 &\sim 2\Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E'_0 - E'_\infty \\ \hat{D}_\infty &\sim 2\Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E'_0 - E'_1.\end{aligned}$$

したがって, $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$ 及び $\hat{\Gamma}_\infty$ は $\Sigma^\flat$ 上の (-2) 曲線, $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ は (-1) 曲線であり, 異なる添え字 i, j に対して $\hat{\Gamma}_i \cdot \hat{\Gamma}_j = \hat{\Gamma}_i \cdot \hat{D}_j = \hat{D}_i \cdot \hat{D}_j = 0$ が成り立ち, 任意の添え字 k に対して $\hat{\Gamma}_k \cdot \hat{O}_1 = \hat{D}_k \cdot \hat{O}_1 = 0$ かつ $\hat{\Gamma}_k \cdot \hat{D}_k = 1$ が成り立つ. よって, $\Sigma^\flat$ 上の 4 つの (-1) 曲線 $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ を縮約した後に, $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$ 及び $\hat{\Gamma}_\infty$ の像が (-1) 曲線であるから, 以上の 7 曲線の縮約で双有理射 $\mu : \Sigma^\flat \rightarrow \mathbf{P}^2$ を得る. μ により $\hat{D}_0 + \hat{\Gamma}_0, \hat{D}_1 + \hat{\Gamma}_1, \hat{D}_\infty + \hat{\Gamma}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ が縮約された点を q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 とおく.

$\hat{D}_0, \hat{D}_1$ 及び $\hat{D}_\infty$ が μ により縮約された点 q'_0, q'_1 及び q'_∞ はそれぞれ, q_0, q_1 及び q_∞ の無限近傍点である. 異なる添え字 i, j に対して $\check{L}_i \cdot \check{L}_j = \check{L}_i \cdot \hat{D}_j = \check{L}_i \cdot (\hat{D}_j + \hat{\Gamma}_j) = 0$ が成り立ち, 任意の添え字 k に対して

$$\check{L}_k \cdot \hat{D}_k = \check{L}_k \cdot (\hat{D}_k + \hat{\Gamma}_k) = \check{L}_k \cdot \hat{O}_1 = (\hat{D}_k + (\hat{D}_k + \hat{\Gamma}_k) + \hat{O}_1 + \check{L}_k)^2 = 1$$

が成り立つ. よって, $k = 0, 1$ 及び ∞ のそれぞれに対して, 3 点 o_0, q_k, q'_k は同一直線 L_k 上にあり, L_k の μ による狭義逆像が $\check{L}_k$ に他ならない. $v = 0, v - u = 0$ 及び $u = 0$ のそれぞれが定義する射影 $\text{pr}_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を Δ_0, Δ_1 及び Δ_∞ とおき, 各々の η による狭義逆像を $\hat{\Delta}_0, \hat{\Delta}_1$ 及び $\hat{\Delta}_\infty$ で表す. $\hat{\Delta}_0 \sim \Delta - E_0, \hat{\Delta}_1 \sim \Delta - E_1$ 及び $\hat{\Delta}_\infty \sim \Delta - E_\infty$ である. 異なる添え字 i, j に対して $\hat{\Delta}_i \cdot \hat{\Delta}_j = \hat{\Delta}_i \cdot \hat{D}_j = 0$ かつ $\hat{\Delta}_i \cdot (\hat{D}_j + \hat{\Gamma}_j) = 1$ が成り立ち, 任意の添え字 k に対して $\hat{\Delta}_k \cdot \hat{O}_1 = \hat{\Delta}_k \cdot \hat{D}_k = \hat{\Delta}_k \cdot (\hat{D}_k + \hat{\Gamma}_k) = 0$ かつ $(\hat{\Delta}_k)^2 = -1$ が成り立つ. よって, $\hat{\Delta}_0$ の μ による像は, 7 点 $q_0, q_1, q_\infty, q'_0, q'_1, q'_\infty$ 及び o_0 の内の 2 点 q_1 及び q_∞ を通る直線である. 同様に, $\hat{\Delta}_1$ の μ による像は, 7 点の内の 2 点 q_∞ 及び q_0 を通る直線であり, $\hat{\Delta}_\infty$ の μ による像は, 7 点の内の 2 点 q_0 及び q_1 を通る直線である. 特に, 3 直線 L_0, L_1 及び L_∞ は 1 点 o_0 で交わるが, 4 点 q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 の内のどの 3 点も同一直線上には無い. $\mathbf{P}^2$ の斉次座標を $(w_0 : w_1 : w_2)$ とおく. $\mathbf{P}^2$ の任意の異なる 4 点は, どの 3 点も同一直線上に無いならば, 座標変換によって 4 点 $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ 及び $(1 : 1 : 1)$ へ写す事ができる. したがって, $\mathbf{P}^2$ 上の点 q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 のそれぞれを $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ 及び $(1 : 1 : 1)$ と仮定しても一般性を失わない. このとき L_0, L_1 及び L_∞ の定義式はそれぞれ $w_2 - w_1 = 0, w_0 - w_2 = 0$ 及び $w_0 - w_1 = 0$ である. また, q'_0, q'_1 及び q'_∞ は, q_0, q_1 及び q_∞ の各点における L_0, L_1, L_∞ の接方向に対応する.

$\hat{B}_2 \cdot \hat{O}_1 = -1$ より, B_2 は O_1 を成分に含んでいる事が分かる. $B_1 = B_2 - O_1$ とおき, η による B_1 の狭義逆像を $\hat{B}_1$ で表す. したがって, $\hat{B}_1 \sim 5\Delta + 4\Gamma - 3E_0 - 3E_1 - 3E_\infty - 2E'_0 - 2E'_1 - 2E'_\infty$ である. B は被約であるから $\hat{B}_1$ は $\hat{O}_1, \hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$

及び $\hat{\Gamma}_\infty$ のいずれも成分に含まない. $B_2 \cap \Gamma_0 = \{p_0\}$ より, $\hat{B}_1$ は $\hat{D}_0$ を成分に含まない. 同様にして, $\hat{B}_1$ は $\hat{D}_1$ も $\hat{D}_\infty$ も成分に含まない. 更に, $\hat{O}_1 \cdot \hat{B}_1 = 0$ かつ任意の添え字 k に対して $\hat{B}_1 \cdot \hat{D}_k = \hat{B}_1 \cdot \hat{\Gamma}_k = 0$ が成り立つ. 以上と $(\hat{B}_1)^2 = 1$ より, $\hat{B}_1$ の μ による像は q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 を通らない直線である. 実は, $|\hat{B}_1|$ が $\mu : \Sigma^b \rightarrow \mathbf{P}^2$ を引き起こす. さらに, 双有理写像 $\mu \circ \eta^{-1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ 及び $\eta \circ \mu^{-1} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を明白に書き下すことができる.

命題 4 ([7, 命題 5]). $(w_0 : w_1 : w_2)$ を $\mathbf{P}^2$ の斉次座標, $(s : t, u : v)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の斉次座標とする. $w_2 - w_1 = 0$, $w_0 - w_2 = 0$ 及び $w_0 - w_1 = 0$ のそれぞれが定義する $\mathbf{P}^2$ 上の直線を L_0, L_1 及び L_∞ とおき,

$$w_0 w_2 - w_2 w_1 + w_1 w_0 = 0, \quad w_1 w_2 - w_2 w_0 + w_0 w_1 = 0, \quad w_2 w_0 - w_0 w_1 + w_1 w_2 = 0$$

のそれぞれが定義する 2 次曲線を C_0, C_1, C_∞ とおく. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の曲線 $O_1, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty, D_0, D_1, D_\infty$ は上述の通りとする. このとき 3 つの双次数 4, 5 の斉次多項式

$$\begin{aligned} w_0 &= s(s-t)v(sv^2 - tu^2)(sv^2 - 2tuv + tu^2), \\ w_1 &= st(u-v)(sv^2 - 2tuv + tu^2)(sv^2 - 2suv + tu^2), \\ w_2 &= t(t-s)u(sv^2 - 2suv + tu^2)(sv^2 - tu^2) \end{aligned}$$

で定義される有理写像 $\psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ は, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus (D_0 \cup D_1 \cup D_\infty \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_\infty \cup O_1)$ 上に制限すると $\mathbf{P}^2 \setminus (C_0 \cup C_1 \cup C_\infty \cup L_0 \cup L_1 \cup L_\infty)$ への同型写像を与える双有理写像である.

定理 5 ([7, 定理 6]). X は $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異有理曲面で, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は相対極小な種数 2 曲線束とする. さらに f は (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つと仮定する. 相対標準写像 $\Phi_f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から自然に $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆が定まる. この分岐因子 B の定義方程式は, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ へ適当な座標変換を施す事で, 次のように表現できる. $(w_0 : w_1 : w_2)$ を $\mathbf{P}^2$ の斉次座標, $(s : t, u : v)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の斉次座標, $\psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ を命題 4 の双有理写像とする. このとき $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$ をみたす $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ が存在して, 分岐因子 B は

$$st(t-s)(sv-tu)\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2) = 0 \quad (2.1)$$

で定義される.

逆に, $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$ をみたす任意の $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ に対して, 方程式 (2.1) が定める被約因子に沿って分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の有限 2 重被覆をとり, そ

の特異点を標準的に解消する射の合成を $\varpi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とおけば, $\tilde{X}$ は有理的である. 更に, 第 1 射影 $\text{pr}_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して, 合成 $\text{pr}_1 \circ \varpi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ は種数 2 曲線束である. 相対極小モデルは 3 点 $(1:0)$, $(1:1)$, $(0:1)$ 上に (V) 型の特異ファイバーをもつ.

定理 5 より, 3 点 $(1:0)$, $(1:1)$, $(0:1)$ 上に (V) 型の特異ファイバーをもつ種数 2 の有理ファイバー曲面のパラメータ空間 $(\mathbf{P}^2)^* \setminus \{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=0\}$ を得るが, 同型類で割る必要がある. 2 つの有理ファイバー曲面 $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $f' : X' \rightarrow (\mathbb{P}^1)'$ が同型であるならば, それぞれの相対標準写像 $\Phi_f, \Phi_{f'}$ による像と分岐因子の組 $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, B)$, $((\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)', B')$ も同型であることが必要である. ここでも前述のように, 分岐因子の (V) 型の特異点は 3 点 $(1:0, 1:0)$, $(1:1, 1:1)$ 及び $(0:1, 0:1)$ 上と仮定しても一般性を失わない. 同型写像 $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, B) \rightarrow ((\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)', B')$ は少なくとも 3 点 $(1:0, 1:0)$, $(1:1, 1:1)$ 及び $(0:1, 0:1)$ の置換を引き起こす. また, 上記の同型写像は本質的に各 $\mathbb{P}^1$ の座標変換に他ならず, 命題 4 で明示された B の定義式から, 3 点の置換は α, β, γ の置換に対応する事が分かる. なお, $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, B)$ の座標変換は自然に直線束 $\mathcal{O}(B/2)$ に伸びて $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ に同型な有理ファイバー曲面を得る. したがって, 重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ の重み付き斉次座標 $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3)$ に対して, $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$ により, 置換群による商空間 $\mathbb{P}(1, 2, 3) \setminus \{\sigma_1\sigma_3 = 0\}$ を得る.

$\lambda_0 = 2\sigma_1 - \alpha$, $\lambda_1 = 2\sigma_1 - \beta$, $\lambda_\infty = 2\sigma_1 - \gamma$, $\nu_0 = \sigma_1^2 - 4\beta\gamma$, $\nu_1 = \sigma_1^2 - 4\gamma\alpha$, $\nu_\infty = \sigma_1^2 - 4\alpha\beta$, $\zeta = \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 - 16\sigma_3$, $\xi = \sigma^3 - 2\sigma_3$ とおく. $\Sigma^\flat$ において $\tilde{L}_0$ と $\hat{B}_1$ が接するとき, f は $(1:0)$ 上に $[5\text{--II}_{-1}^*(N)]$ 型の特異ファイバーをもつ. これは $\mathbf{P}^2$ において C_0 と直線 $\eta_*\hat{B}_1$ が接する事に同値で, $\nu_0 = 0$ に他ならない. $\Sigma^\flat$ において $\tilde{L}_0$ と E'_0 の交点で, $\hat{B}_1$ が $\tilde{L}_0$ と横断的に交わるとき, f は $(1:0)$ 上に $[3\text{--IV}^*\text{--II}_0]$ 型の特異ファイバーをもつ. これは $\mathbf{P}^2$ において, 直線 $\eta_*\hat{B}_1$ が点 $(1:2:2)$ を通る事に同値で, $\lambda_0 = 0$ に他ならない. $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ 上の曲線 $\mathcal{C}_3$ の定義式は $\lambda_0\lambda_1\lambda_\infty = 0$ に他ならない. $\mathcal{C}_5$ の定義式は $\nu_0\nu_1\nu_\infty = 0$ に他ならない. $\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)/u^5$ の v/u に関する判別式は

$$-256s^{10}(s-t)^{10}t^{10} \times \{\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3t^2 - (\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3 - \beta\nu_1^2\lambda_1^3 + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3)st + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3s^2\}$$

$\{\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3t^2 - (\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3 - \beta\nu_1^2\lambda_1^3 + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3)st + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3s^2\}/s^2$ の t/s に関する判別式は $\sigma_1\xi^2\zeta^3$ であるから, $\xi\zeta = 0$ のときも f の特異ファイバーが 4 本となる. このとき, 唯一つ存在する既約な特異ファイバーは $[8, \text{p. 17, } 2\text{--I}_0\text{--II--0}]$ または $[8, \text{p. 37, } 4\text{--I}_{1-1-0}]$ のようなファイバーである. 前者のファイバーは特異点として, 唯一つの尖点を有する. 後者のファイバーは特異点として, 二つの結節点を有す

る. 3本の可約な特異ファイバーはいずれも $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型である. さて, 尖点を有する方は $\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)/u^5$ の v/u に関する導関数の判別式も 0 となるから, 少なくとも代数的集合である. $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ 上の曲線 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$ が既約であることから, 2 曲線の和か, 片一方か, あるいは空に対応する.

例 6. $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 6)$ のとき, $\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)/(s^4 u^5)$ の v/u に関する判別式は $-5400000 \times 256 \times \left(\frac{t}{s}\right)^{10} \left(\frac{t}{s} - 1\right)^{10} \left(2 \times \frac{t}{s} - 1\right)^2$ である. 実際に,

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad \frac{\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)}{s^4 u^5} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 5 \left(\frac{v}{u}\right) + 5 \left(\frac{v}{u}\right)^2 \right\}$$

と因数分解される. したがって, 点 $(2 : 1)$ 上のファイバーが唯一の既約な特異ファイバーとなる. このファイバーは特異点として唯一の尖点を有するから, [8, p. 17, 2-I₀-II-0] のようなファイバーである.

例 7. $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, -1 \pm \sqrt{-1})$ のとき, $\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)/(s^4 u^5)$ の v/u に関する判別式は $(164 \mp 152\sqrt{-1}) \times 256 \times \left(\frac{t}{s}\right)^{10} \left(\frac{t}{s} - 1\right)^{10} \left(2 \times \frac{t}{s} - 1\right)^2$ である. 実際に,

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad \frac{\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)}{s^4 u^5} = \left(\frac{7}{4} \mp \frac{\sqrt{-1}}{4}\right) \left\{ \left(\frac{v}{u}\right)^2 - \frac{v}{u} + \frac{2 \pm \sqrt{-1}}{10} \right\}^2$$

と因数分解される. したがって, 点 $(2 : 1)$ 上のファイバーが唯一の既約な特異ファイバーとなる. このファイバーは特異点として二つの結節点を有するから, [8, p. 37, 4-I₁₋₁-0] のようなファイバーである.

特に, $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 6)$ のとき, $\xi = 8^3 - 2 \times 6 > 0$ かつ $\zeta = 0$ である. また, $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, -1 \pm \sqrt{-1})$ のとき, $\xi = 0$ かつ $\zeta = 26 \mp 18\sqrt{-1} \neq 0$ である. したがって, $\mathcal{C}_2$ 上の点に対応する f は, 唯一の既約な特異ファイバーとして [8, p. 17, 2-I₀-II-0] のようなファイバーをもち, $\mathcal{C}_4$ 上の点に対応する f は, 唯一の既約な特異ファイバーとして [8, p. 37, 4-I₁₋₁-0] のようなファイバーをもつ.

参考文献

- [1] A. Calabri and C. Ciliberto, Birational classification of curves on rational surfaces, Nagoya Math. J. **199** (2010), 43–93.
- [2] M. De Franchis, Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2, Rend. Circ. Mat. Palermo **13** (1899), 1–27.

- [3] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, in Complex Analysis and Algebraic Geometry, a Volume Dedicated to Kodaira K., pp. 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press (1977).
- [4] S. Kitagawa, Pencils of genus two curves on rational surfaces, preprint (2008).
- [5] 北川真也, 種数 2 の有理超楕円曲面と E_8 フレーム, 報告集 “Hodge 理論・退化・特異点の代数幾何とトポロジー研究集会 (第 4 回)” (2008), 96–113.
- [6] S. Kitagawa, Extremal hyperelliptic fibrations on rational surfaces, to appear in Saitama Math. J.
- [7] 北川真也, (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つ種数 2 の有理ファイバー曲面 I, II, 報告集 “津山代数幾何シンポジウム 2012” (2013), 163–177.
- [8] Y. Namikawa and K. Ueno, The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two, Manuscripta Math, **9** (1973), 143–186.
- [9] K. Oguiso and T. Shioda, The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface, Comment. Math. Univ. St. Paul. **40** (1991), 83–99.
- [10] T. Shioda, On the Mordell-Weil lattices, Comment. Math. Univ. St. Pauli **39** (1990), 211–240.
- [11] T. Shioda, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve, in *New trends in algebraic geometry, Warwick*, 1996, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **264**, pp. 359–373, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).

On the topology of compactified Jacobians of singular plane curves

Masahiro WATARI

1 Introduction

Let X be a curve singularity. We denote by $\mathcal{O}$ the local ring of X . We also use the notations $\overline{\mathcal{O}}$, δ and $\mathfrak{c}$ for the normalization of $\mathcal{O}$, the δ -invariant of $\mathcal{O}$ and the conductor ideal of $\mathcal{O}$ respectively. In [8], Rego constructed the Jacobi factor J_X of X as the subset of the Grassmanian $\mathrm{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{c})$, which consists of $\mathcal{O}$ -submodules. Influenced by the result of Yau and Zaslow ([13]), Beauville proved the following relation between a compactified Jacobian and Jacobi factors in [1]: *For a rational unibranched curve C , its compactified Jacobian is homeomorphic to the direct product of the the Jacobi factors for all singular points on C .* So it is important to know the Euler number $e(J_X)$ of J_X . He also showed the following:

Theorem 1. *Let X be an irreducible curve singularity X with semigroup (p, q) . Then we have $e(J_X) = \frac{1}{p+q} \binom{p+q}{p}$.*

After the Beauville's work, Fantechi, Göttsche and van Straten showed that the Euler number of the Jacobi factor of a plane curve singularity coincides with the multiplicity of the δ -constant strata in the base of the semiuniversal deformation of the singularity ([2]). However, their result did not contribute to the computation of the Euler number of Jacobi factors. It was generalized by Shende in [9]. On the other hand, by decomposing the Jacobi factors into affine cells, Piontkowski computed the Euler number of the Jacobi factors of plane curve singularities with semigroups $\langle p, q \rangle$, $\langle 4, 2q, s \rangle$, $\langle 6, 8, s \rangle$ and $\langle 6, 10, s \rangle$ ([6]). His results were discussed by Gorsky and Mazin in view of combinatorial structure ([4]).

Pfister and Steenbrink studied the Jacobi factors of curve singularities as punctual Hilbert schemes of degree 2δ for the singularities in [7]. It was shown that a point of the Jacobi factor is in one to one correspondence with an ideal of $\mathcal{O}$ whose codimension is 2δ . Using their methods, I and Sōma analyzed the structure of punctual Hilbert schemes for the singularities of types E_6 and E_8 . In this short notes, we summarize the results in [11] from the point of view of Jacobi factors.

In section 2, we first recall some notions about Jacobi factors and the Pfister-Steenbrink theory for punctual Hilbert schemes introduced in [7]. Using them,

we construct an affine cell decomposition of a Jacobi factor. In section 3, We compute the Euler number of Jacobi factors for the singularities of type E_6 and E_8 using computational algorithms introduced in [11].

2 Preliminaries

Let X be a curve singularity with its local ring $\mathcal{O}$. We denote by $\overline{\mathcal{O}}$ the normalization of $\mathcal{O}$. For the local ring $\mathcal{O}$, its δ -invariant and conductor ideal are defined to be $\delta := \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ and $\mathfrak{c} := \text{ann}_{\mathcal{O}}(\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ respectively. We first define the Jacobi factor J_X of X following [6] (see also [8], [1]). Let M be a torsion free $\mathcal{O}$ -module of rank 1. There exists an embedding φ such that $\mathfrak{c} \subset \varphi(M) \subset \overline{\mathcal{O}}$ and $\dim_{\mathbb{C}}(\overline{\mathcal{O}}/\varphi(M)) = \delta$ (see [3], Lemma 1.1 (i)). We call $\varphi(M)$ a normalized $\mathcal{O}$ -submodule of M . Such $\mathcal{O}$ -submodule is regard as a point of the Grassmanian $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{c})$ which consist of δ -dimensional linear subspaces of $\overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{c}$. Indeed, we have $\dim_{\mathbb{C}}(\overline{\mathcal{O}}/\varphi(M)) = \dim_{\mathbb{C}}(\varphi(M)/\mathfrak{c}) = \delta$, because X is planar. So there exist an injection ι such that $(\iota \circ \varphi)(M) \in \text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{c})$.

Definition 2. Let X be a curve singularity. We define the Jacobi factor J_X of X by the subset of $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{c})$ consisting of the δ -dimensional linear subspaces which are $\mathcal{O}$ -submodules.

From now on, we restrict ourselves to consider irreducible plane curve singularities with semigroup $\langle p, q \rangle$. Let f be the irreducible element of $\mathbb{C}[[x, y]]$ which defines the singularity X . Then the existence of the parametrization of X is well known. We may assume that it is given by $x = t^n, y = \eta(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ (cf. [12] Theorem 2.1.1). Then the local ring $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x, y]]/(f)$ is isomorphic to the complete local ring $\mathbb{C}[[t^n, \eta(t)]]$. It follows that $\overline{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[t]]$. Furthermore, the δ -invariant and the conductor ideal satisfy $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{c}$ and $\mathfrak{c} = (t^{2\delta})$, because X is planar (cf. [10], [5]). We call the set $\Gamma := \{\text{ord}(f) \mid f \in \mathcal{O}\}$ the *semigroup* of $\mathcal{O}$. For an ideal I of $\mathcal{O}$, we call the set $\Gamma(I) := \{\text{ord}(f) \mid f \in I\}$ the *order set* of I .

Next we briefly recall Pfister and Steenbrink's theory for punctual Hilbert schemes of curve singularities. For a positive integer r , set

$$\mathcal{I}_r := \{I \mid I \text{ is an ideal of } \mathcal{O} \text{ with } \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/I = r\}.$$

A subset Δ of $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ is called a Γ -semi-module, if $\Delta + \Gamma \subset \Delta$. If a Γ -semi-module Δ is minimally generated by $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (i.e $\Delta = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \Gamma)$ and $\Delta \not\supset \sum_{i=1, i \neq j}^m (\alpha_i + \Gamma)$ for $\forall j \in \{1, \dots, m\}$), then we write $\Delta = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{\Gamma}$. We denote by $\mathcal{I}(\Delta)$ the set of all ideals of $\mathcal{O}$ whose order sets are Δ . Note that all ideals in $\mathcal{I}(\Delta)$ have same codimension.

Lemma 3. A family of ideals $\mathcal{I}(\Delta)$ is a component of $\mathcal{I}_r$ if and only if we have $\sharp(\Gamma \setminus \Delta) = r$.

Proof. Take an element I from $\mathcal{I}(\Delta)$. We easily see that I belongs to $\mathcal{I}_r$ if and only if

$$\mathcal{O}/I = \left\{ \overline{a_0 + a_1 t^{d_1} + \cdots + a_{r-1} t^{d_{r-1}}} \mid a_i \in k, d_i \in \Gamma \setminus \Delta, d_1 < \cdots < d_{r-1} \right\}$$

holds. The last condition is equivalent to $\sharp(\Gamma \setminus \Delta) = r$. $\square$

Proposition 4. *For a given codimension r , there exists a finite number of distinct Γ -semi-modules $\Delta_{r,1}, \dots, \Delta_{r,l(r)}$ such that*

$$\mathcal{I}_r = \bigcup_{i=1}^{l(r)} \mathcal{I}(\Delta_{r,i}). \quad (1)$$

Proof. The finiteness of the number of Γ -modules holds trivially, as there only a finite number of semigroups in $\mathbb{N}$ of fixed colength. It follows from the definition that (1) is a disjoint union. $\square$

For $r > 0$, Pfister and Steenbrink defined a map $\varphi_r : \mathcal{I}_r \rightarrow J_X$ by $\varphi_r(I) = t^{-r} I / (t^{2\delta})$. Let ψ be the Plücker embedding $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/(t^{2\delta})) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^\delta \overline{\mathcal{O}}/(t^{2\delta}))$ ([3], Remark 1.4). The map φ_r has following properties:

Proposition 5 ([7], Theorem 3). *The map φ_r is injective for any r . Furthermore, it is bijective for $r \geq 2\delta$. The image $(\psi \circ \varphi_r)(\mathcal{I}_r)$ is a Zariski closed set in $\psi(J_X)$.*

Set $\mathcal{M}_r := \varphi_r(\mathcal{I}_r)$. Since ψ is injective, we identify $\psi(J_X)$ and $\psi(\mathcal{M}_r)$ with J_X and $\mathcal{M}_r$ respectively.

Definition 6. *We call $\mathcal{M}_r$ the punctual Hilbert scheme of degree r for a given curve singularity.*

For a component $\mathcal{I}(\Delta_{r,i})$ in (1), we put $\mathcal{M}_{r,i} := \varphi_r(\mathcal{I}(\Delta_{r,i}))$. The decomposition of $\mathcal{M}_r$ also follows from Proposition 4.

Corollary 7. *Corresponding (1), the family of k -vector spaces $\mathcal{M}_r$ is decomposed as*

$$\mathcal{M}_r = \bigcup_{i=1}^{l(r)} \mathcal{M}_{r,i}. \quad (2)$$

We also identify $\psi(\mathcal{M}_{r,i})$ with $\mathcal{M}_{r,i}$. Namely, $\mathcal{M}_{r,i}$ is regarded as the subset of the punctual Hilbert scheme $\mathcal{M}_r$ parametrizing ideals in $\mathcal{I}(\Delta_{r,i})$.

Set $[a, b] := \{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid a \leq x \leq b\}$. The following fact is known:

Proposition 8 ([7], Corollary of Theorem 11). *The set $\mathcal{M}_{r,i}$ is isomorphic to the affine space $\mathbb{A}^N$ where $N = \sum_{\gamma \in (\Delta_{r,i} - r) \cap [0, 2\delta]} \sharp J_\gamma$ where $J_\gamma := [\gamma + 1, 2\delta - 1] \setminus \Delta_{r,i}$.*

Remark 9. For $n \in \mathbb{Z}$, set $\bar{I}(n) := \{f \in \bar{\mathcal{O}} \mid \text{ord}(f) \geq n\}$ and $I(n) := \bar{I}(n) \cap \mathcal{O}$. The cells $\mathcal{M}_{r,i}$ in (2) are induced by the canonical flag $0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{2\delta} = \bar{\mathcal{O}}/(t^{2\delta})$ where $V_i = \bar{I}(2\delta - i)/I(2\delta)$. For details, see [7].

The following fact follows from Proposition 5:

Corollary 10. Any punctual Hilbert scheme $\mathcal{M}_r$ with $r \geq 2\delta$ coincides with the Jacobi factor J_X .

A cell decomposition of J_X follows from Corollary 7 and 10 as $J_X = \cup_{i=1}^{l(2\delta)} \mathcal{M}_{2\delta,i}$. Consequently, we obtain the following theorem:

Theorem 11. For a Jacobi factor J_X , its Euler number $e(J_X)$ equals the number $l(2\delta)$ of components in (1).

Proof. Our assertion follows from Proposition 4 and 8. $\square$

Remark 12. In our decomposition (2), the order sets of ideals of codimension r play an important role. On the other hand, Piontkowski used 0-normalized Γ -semi-modules (i.e. $0 \in \Delta$) in his construction of affine cell decompositions of Jacobi factors ([6]).

3 Main result

In this section, we will prove the following theorem:

Theorem 13. The Euler number of the Jacobi factor for the curve singularity of type E_6 (resp. E_8) is 5 (resp. 7).

In [11], we introduced computational algorithms to determine the components of $\mathcal{M}_r$. We first recall them and apply them to the computation of Euler number of Jacobi factors. We freely use the notations introduced in the previous section.

Lemma 14. For a given Γ -semi-module Δ , we obtain the set A of minimal generators of Δ by the following algorithm:

```

INPUT:  $\Delta$ 
OUTPUT:  $A$ 
DEFINE:  $A := \emptyset$ ,  $\Delta := \Delta$ 
WHILE  $\Delta \neq \emptyset$  DO
   $A := A \cup \{\min\{\Delta\}\}$ 
   $\Delta := \Delta \setminus \{\min\{\Delta\} + \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 

```

Proof. It is trivial. So we omit the proof. $\square$

Lemma 15. Let $\Delta = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_\Gamma$ be a Γ -semi-module. If $\mathcal{I}(\Delta)$ is a component of $\mathcal{I}_r$, then $\mathcal{I}(\Delta \setminus \{\alpha_i\})$ is component of $\mathcal{I}_{r+1}$ for each $i \in \{1, \dots, m\}$. Conversely, if $\mathcal{I}(\Delta)$ is a component of $\mathcal{I}_{r+1}$, then, for each α_i and $\gamma_1 := \min\{\Gamma \setminus \{0\}\}$, $\mathcal{I}(\Delta \cup \{\alpha_i - \gamma_1\})$ is a component of $\mathcal{I}_r$.

For a given r and the decomposition (1), set $\mathfrak{D}_r := \{\Delta_{r,1}, \dots, \Delta_{r,l}\}$. It follows from Lemma 15 that the following proposition.

Proposition 16. *We obtain the set $\mathfrak{D}_r$ from $\mathfrak{D}_{r-1}$ in a finite number of steps given by the following algorithm:*

INPUT: $\mathfrak{D}_{r-1} = \{\Delta_{r-1,1}, \dots, \Delta_{r-1,l}\}$ where $\Delta_{r-1,i} = \langle \alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m(i)} \rangle_\Gamma$

OUTPUT: $\mathfrak{D}_r$

DEFINE: $\mathfrak{D}_r := \emptyset$

FOR each $i \in \{1 \dots, l\}$ and each $j \in \{1 \dots, m(i)\}$ DO

$\Delta := \Delta_{r-1,i} \setminus \{\alpha_{i,j}\}$

IF $\Delta \notin \mathfrak{D}_r$ THEN $\mathfrak{D}_r := \mathfrak{D}_r \cup \{\Delta\}$ ELSE do nothing

Proof. Our assertion follows from Lemma 15. □

We denote by $\mathfrak{m}$ the maximal ideal of $\mathcal{O}$. It follows from Lemma 14, Proposition 16 and Theorem 11 that the following theorem:

Theorem 17 (Computational algorithm for $e(J_X)$). *For a given codimension r , we obtain $e(J_X)$ by the following steps.*

Step 1: Set $\mathfrak{D}_1 = \{\Delta_{1,1}\}$ where $\Delta_{1,1} = \Gamma(\mathfrak{m})$ and find generators of $\Gamma(\mathfrak{m})$ by Lemma 14.

Step i ($i = 2, \dots, 2\delta$): Compute $\mathfrak{D}_i$ from $\mathfrak{D}_{i-1}$ by Proposition 16 and, applying Lemma 14 to each elements in $\mathfrak{D}_i$, determine their sets of minimal generators.

Step $2\delta+1$: By Theorem 11, we have $e(J_X) = \sharp \mathfrak{D}_{2\delta}$.

Proof of Theorem 13 Let X_1 be the singularity of type E_6 and $\mathcal{O}_1$ be the local ring of X_1 . We have $\mathcal{O}_1 = k[[t^3, t^4]]$. It follows from $\Gamma = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$. It follows that $\delta = 3$ and $c = 2\delta = 6$. Now we apply Theorem 17 to the singularity X_1 . Performing Step 1 to Step 6, we obtain the following:

$$\mathfrak{D}_6 = \left\{ \begin{array}{lll} \Delta_{6,1} = \langle 9, 10, 11 \rangle_\Gamma, & \Delta_{6,2} = \langle 8, 10 \rangle_\Gamma, & \Delta_{6,3} = \langle 8, 9 \rangle_\Gamma \\ \Delta_{6,4} = \langle 7, 12 \rangle_\Gamma, & \Delta_{6,5} = \langle 6 \rangle_\Gamma & \end{array} \right\}$$

As the result of Step 7, we have $e(J_{X_1}) = 5$.

Next we consider the singularity X_2 of type E_8 . Let $\mathcal{O}_2$ be its local ring $k[[t^3, t^5]]$. We have $\Gamma = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, \dots\}$, $\delta = 4$ and $c = 2\delta = 8$. By Theorem 17, we obtain

$$\mathfrak{D}_8 = \left\{ \begin{array}{lll} \Delta_{8,1} = \langle 12, 13, 14 \rangle_\Gamma, & \Delta_{8,2} = \langle 11, 13, 15 \rangle_\Gamma, & \Delta_{8,3} = \langle 11, 12 \rangle_\Gamma \\ \Delta_{8,4} = \langle 10, 14 \rangle_\Gamma, & \Delta_{8,5} = \langle 10, 12 \rangle_\Gamma, & \Delta_{8,6} = \langle 9, 16 \rangle_\Gamma \\ \Delta_{8,7} = \langle 8 \rangle_\Gamma & & \end{array} \right\}$$

and we have $e(J_{X_2}) = 7$. □

References

- [1] A. Beauville. Counting rational curves on $K3$ -surfaces, Dule Math. J. **97**(1999), 99-108.

- [2] B. Fantechi, L. Göttsche, D. van Straten, Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of rational curves, *J. Alg. Geom.* **8** (1999), 115-133.
- [3] G-M. Greuel and G. Pfister, Moduli spaces for torsion free modules on curve singularities I, *J. Alg. Geom.* **2** (1985), 81-135.
- [4] E. Gorsky and Mikhail Mazin, Compactified Jacobians and q , t -Catalan Numbers I, *J. Combin. Theory Ser. A* **120** (2013), 49-63.
- [5] T. de Jong and G. Pfister, *Local Analytic Geometry*, Vieweg (2000).
- [6] J. Piontkowski, Topology of the compactified Jacobians of singular curves, *Math. Z.* **255** (2007), 195-226.
- [7] G. Pfister and J.H.M. Steenbrink, Reduced Hilbert schemes for irreducible curve singularities, *J. Pure and Applied Algebra.* **77** (1992), 103-116.
- [8] C. Rego, The compactified Jacobian, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér.* **13** (1980), 211-223.
- [9] V. Shende, Hilbert schemes of points on a locally planar curve and the Severi strata of its versal deformation, *Compos. Math.* **148** (2012), 531-547.
- [10] J. P. Serre, *Groupes Algébriques et Corps de Classes*, Hermann, Paris, (1959).
- [11] Y. Sōma and M. Watari, The punctual Hilbert schemes for the curve singularities of types E_6 and E_8 , arXiv:math.AG/1109.4991.
- [12] C. T. C. Wall, *Singular points on Plane Curves*, Cambridge university press, London Mathematical Society Student Texts **63**, (2004).
- [13] S. T. Yau and E. Zaslow, BPS states, string duality and nodal curves an K3, *Nucl. Phys. B* **471** (1996), 503-512.
- [14] O. Zariski, *Le problème des modules pour les branches planes*, Cours donné au Centre de Mathématiques de L'École Polytechnique (1973).

Masahiro Watari
 Division of General Subjects
 Tsuyama National College of Technology
 624 Numa
 Tsuyama-shi Okayama 708-8509 Japan.
 E-mail:watari@tsuyama-ct.ac.jp

有理曲面上の#極小対とゴナリティー

松田 修 (津山高専)

1 はじめに

S を非特異有理曲面で, C を S 上の既約曲線とする. S の曲面における極小曲面である Hirzebruch 曲面を Σ_b とする. Σ_b は $\mathbf{P}^1$ バンドルの構造を持ち, $\mathbf{P}^1$ バンドル $\Sigma_b \rightarrow B$ の切断 Γ の中には自交点数 Γ^2 が最小となるものが存在し, それを Γ_∞ で表す. $b = -\Gamma_\infty$ を Σ_b の次数と呼ぶ. $b \geq 0$ である. Σ_b 上の既約曲線 C を考えると, $C \equiv \sigma\Gamma_\infty + eF_u$ なる数値的關係がある. ここで, F_u は $\mathbf{P}^1$ バンドル $\Phi: \Sigma_b \rightarrow B$ の一般ファイバーである. (σ, e) を C の次数という. C の次数 (σ, e) と C の特異点の最大重複度 ν_1 を用い, 以下の条件 (#) を満たす対 (Σ_b, C) を # 極小対と呼ぶ [I].

$$(\#): (1) \sigma \geq 2\nu_1, \quad (2) e - \sigma \geq b\nu_1, \quad (3) e - \sigma > 1 \text{ if } b = 1.$$

飯高 [I] は, Σ_b 上の既約代数曲線は, 特異点を中心とする基本変換によって, # 極小対に変換できることを示した.

一方, 代数曲線 C に対して, $\text{gon}(C)$ を, C 上の有理関数の中の最小次数とする. それは, C から $\mathbf{P}^1$ への射の次数の最小値でもあり, 双有理不変量である. 難波は [Na](1984 年)において, $\mathbf{P}^2$ 上の次数 d の非特異平面代数曲線 C について $\text{gon}(C) = d - 1$ であることを示した. さらに, Martens は [Mar](1996 年)において, Hirzebruch 曲面上の次数 (σ, e) の非特異曲線 C について $\text{gon}(C) = \sigma$ であることを示した. 一般に, Hirzebruch 曲面上の非特異でない次数 (σ, e) の曲線 C に関するゴナリティーの研究は, $\tilde{C}$ を C の最短非特異化から得られる曲線の $\text{gon}(\tilde{C})$ について行われる. そして, $\tilde{C}^2 > \sigma^2$ であるとき, $\text{gon}(\tilde{C}) = \sigma$ であるという研究が, [Ma] と [Ki] において行われた. 本研究では, $\tilde{C}^2 > 0$ をみたす C に関してゴナリティーの研究を # 極小対を使って行う. 主結果は次である.

主定理 (Σ_b, C) を # 極小対, C を次数 (σ, e) の Σ_b 上の曲線とし, $u = \sigma^2 - \tilde{C}^2$ とおく. ただし, $\sigma^2 > u$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $u < 0$ ならば $\text{gon}(\tilde{C}) = \sigma$.
- (2) $u \geq 0$ ならば $\text{gon}(\tilde{C}) \geq \min\{\sqrt{\sigma^2 - u} - 1, \sigma - u/\sigma\}$.

2 主定理の証明

まず, Paoletti の次の命題 (1995 年) を挙げよう.

命題 1. W を非特異代数曲面, D を W 上の既約曲線で $D^2 > 0$ とする. このとき, 次のいずれかが成り立つ.

- (1) $\text{gon}(D) \geq \sqrt{D^2} - 1$,
(2) $\text{gon}(D)$ が計算できる D 上の全てのペンシル M に対して, W 上のベースポイントフリーなペンシル L が存在して, M は L を D に制限したものと同型になる。□

以下, 命題 1 の (2) が成り立っていることを仮定する。 (Σ_b, C) を $\sharp$ 極小対とし, (σ, e) を C の次数とする。さらに, $f: \tilde{C} \rightarrow C$ を C の最短非特異化とする。このとき,

$$\tilde{C} \sim f^*(\sigma\Gamma_\infty + eF_u) - \sum_{j=1}^r \nu_j E_j$$

ここで, 記号 $\sim$ は線形同値を表す。また, ν_j は特異点 p_j (無限に近い特異点も含む) の重複度を表し, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_r$ と並べてある。さらに, E_j は特異点 p_j のブローイングアップから得られる (-1) 曲線であり, E_j の全引き戻しも同じ記号とした。

さて, A を S 上のベースポイントフリーであるペンシル L の正因子とする。このとき, ある整数 α と β が存在して,

$$A \sim f^*(\alpha\Gamma_\infty + \beta F_u) - \sum_{j=1}^r \gamma_j E_j$$

とできる。ここで, $\gamma_j \geq 0$ である。我々は, 命題 1 の (2) を仮定しているので, $\text{gon}(\tilde{C}) = A \cdot \tilde{C}$ である。よって,

$$\begin{aligned} \text{gon}(\tilde{C}) &= A \cdot \tilde{C} = -\alpha\sigma b + \alpha e + \sigma\beta - \sum_{j=1}^r \gamma_j \nu_j \\ &= \sigma(\beta - \alpha b) + \alpha e - \sum_{j=1}^r \gamma_j \nu_j. \end{aligned} \quad (1)$$

A は正因子であるから, $A \cdot f^{-1}[F_u] \geq 0$ であり, これより $\alpha \geq 0$ である。また, $A \cdot f^{-1}[\Gamma_\infty] \geq 0$ より $\beta \geq \alpha b \geq 0$ でもある。

(1) $\alpha = 0$ を仮定する。 L はベースポイントフリーであるので, $A^2 = 0$ である。したがって, $A \sim f^*(\beta F)$ ($\beta > 0$) である。したがって, (1) より, $\sigma \geq \text{gon}(\tilde{C}) = A \cdot \tilde{C} = \alpha\beta \geq \sigma$ であるので, $\text{gon}(\tilde{C}) = \sigma$ である。

(2) $\alpha = 1$ を仮定する。このとき, $f(A) \cong \mathbf{P}^1$ である。 C 上の点を中心にしたいくつかの基本変換の合成 φ によって, $\varphi^*(f(A))$ は $\Sigma_{b'} \rightarrow \mathbf{P}^1$ のファイバー F_u とすることができる。一方, この φ により, (Σ_b, C) は $(\Sigma_{b'}, C')$ に変わり, 基本変換による σ の極小性 [I] により, $C' \cdot F_u \geq \sigma$ が成り立つ。したがって, $\sigma \geq \text{gon}(\tilde{C}) = C' \cdot F_u \geq \sigma$ より, $\text{gon}(\tilde{C}) = \sigma$ である。

(3) $\alpha \geq 2$ を仮定する。 $A^2 = 0$ より,

$$-\alpha^2 b + 2\alpha\beta = \sum_{j=1}^r \gamma_j^2.$$

$\alpha \geq 2$ より,

$$\beta - \alpha b = \sum_{j=1}^r \frac{\gamma_j^2}{2\alpha} - \frac{\alpha b}{2}. \quad (2)$$

(1) と (2) より,

$$\begin{aligned}
gon(\tilde{C}) &= \sigma(\beta - \alpha b) + \alpha e - \sum_{j=1}^r \gamma_j \nu_j = \sigma \left(\sum_{j=1}^r \frac{\gamma_j^2}{2\alpha} - \frac{\alpha b}{2} \right) + \alpha e - \sum_{j=1}^r \gamma_j \nu_j \\
&= \alpha \left(e - \frac{\sigma b}{2} \right) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{\sigma \gamma_j^2}{2\alpha} - \gamma_j \nu_j \right) \\
&= \alpha \left(e - \frac{\sigma b}{2} \right) + \frac{\sigma}{2\alpha} \sum_{j=1}^r \left[\left(\gamma_j - \frac{\alpha \nu_j}{\sigma} \right)^2 - \frac{\alpha^2 \nu_j^2}{\sigma^2} \right] \\
&= \alpha \left(e - \frac{\sigma b}{2} \right) - \sum_{j=1}^r \frac{\alpha \nu_j^2}{2\sigma}
\end{aligned} \tag{3}$$

一方, $\tilde{C}^2 = \sigma^2 - u$ より,

$$\tilde{C}^2 = 2\sigma e - \sigma^2 b - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 = \sigma^2 - u. \tag{4}$$

(3), (4) と $\alpha \geq 2$ より,

$$\begin{aligned}
gon(\tilde{C}) &\geq \alpha \left(e - \frac{\sigma b}{2} \right) - \sum_{j=1}^r \frac{\alpha \nu_j^2}{2\sigma} = \frac{\alpha}{2\sigma} \left(2\sigma e - \sigma^2 b - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 \right) \\
&= \frac{\alpha}{2\sigma} (\sigma^2 - u) \geq \sigma - \frac{u}{\sigma}
\end{aligned} \tag{5}$$

以上をまとめると, 命題 1 の (2) が成り立っていることを仮定した場合, $\alpha = 0, 1$ の場合, $gon(\tilde{C}) = \sigma$, $\alpha \geq 2$ の場合, $gon(\tilde{C}) \geq \sigma - u/\sigma$ である。

$u = \sigma^2 - \tilde{C}^2$ について, $u < 0$ の場合においては, 以下の命題が重要である。

命題 2 [Ma] もし $\tilde{C} > \sigma^2$ なら $gon(\tilde{C})$ は S 上のベースポイントフリーなペンシル L から計算できる。□

以上のことから, $u < 0$ の場合においては, $gon(\tilde{C}) = \sigma$ であり, $u \geq 0$ の場合においては, $gon(\tilde{C}) \geq \min\{\sqrt{\sigma^2 - u} - 1, \sigma - u/\sigma\}$ となる。

3 $\tilde{C}^2 = \sigma^2$ の場合

ここでは, 命題 1 の (2) が成り立っていることを仮定する。このとき, 主定理 1 の証明より, $gon(\tilde{C}) = \sigma$ である。このとき, $g(\tilde{C})$ の範囲について研究する。

(Σ_b, C) は $\sharp$ 極小対とし, C の次数は (σ, e) であるとする。簡単な計算から

$$\tilde{C}^2 = \sigma f - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 \tag{6}$$

$$2g + \sigma - 1 = (\sigma - 1)f - \sum_{j=1}^r \nu_j(\nu_j - 1) \tag{7}$$

が得られる。ここで、 g は $\tilde{C}$ の種数であり、 $f = 2e - \sigma b$ である。

(1) $\sigma = 3$ の場合、 C は非特異である。したがって、 $gon(\tilde{C}) = gon(C) = 3$ である。

(2) $\sigma = 4$ で C は非特異曲線でないとする。(6) と (7) より、

$$4f - 4r = 16, \quad (8)$$

$$3f - 2r = 2g + 3. \quad (9)$$

したがって、 $f = 2g + 3$ より、 $2e - 4b = 2g + 3$ である。しかし、左辺は偶数、右辺は奇数であるため、この式は矛盾である。したがって、 C は非特異曲線である。

(3) $\sigma \geq 5$ で C は非特異曲線でないとする。(6) と (7) より、

$$\sigma^2 = \sigma f - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 \quad (10)$$

$$2g + \sigma - 1 = (\sigma - 1)f - \sum_{j=1}^r \nu_j(\nu_j - 1) \quad (11)$$

である。(10) と (11) より、

$$\sum_{j=1}^r \nu_j = f - \sigma^2 + 2g + \sigma - 1 \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^r \nu_j^2 = \sigma f - \sigma^2 \quad (13)$$

である。(12) と (13) より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma \sum_{j=1}^r \nu_j - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 = \sigma(-\sigma^2 + 2g + \sigma - 1) + \sigma^2 \\ &= -\sigma(\sigma^2 - 2\sigma + 1) + 2\sigma g. \end{aligned}$$

したがって、

$$g \geq \frac{(\sigma - 1)^2}{2}$$

である。以上のことから次の命題を得た。

命題 3 $\tilde{C}^2 = \sigma^2$ で、命題 1 の (2) が成り立っていることを仮定する。このとき、 $gon(\tilde{C}) = \sigma$ であり、さらに、以下が成り立つ。

(1) $\sigma = 3, 4$ ならば C は非特異曲線である。

(2) $\sigma \geq 5$ のとき、 $g \geq (\sigma - 1)^2/2$ である。□

参考文献

- [I1] Iitaka, S., Birational Geometry of Plane Curves, Tokyo J. Math 22 (1999), no 2, 289-321.

- [Ki] Kitagawa, S, Konno, K., Fibered rational surfaces with extremal Mordell-Weil lattices, Math., Z. 251, 179-204(2005).
- [Ma] Matsuda, O., On gonality of curves on a rational surface which define $\sharp$ -minimal models, 津山工業高等専門学校紀要, 第 4 6 号, pp.79-81 (2004).
- [Mar] Martens, G., The gonality of curves on a Hirzebruch surface, Arch., Math., Vol.67, 349-352(1996).
- [Na] Namba, M., Geometry of projective algebraic curves, Marcel Dkker 1984.
- [Pa] Paoletti, R., Free pencils on divisors, Math. Ann, 303, 109-123(1995).

Present Address:

Osamu Matsuda

Tsuyama National College of Technology

624-1, Numa, Tsuyama-City, Okayama, Japan, 708-8509

e-mail : matsuda@tsuyama-ct.ac.jp

n 次ペル方程式の研究

丸尾優佳(津山高専, 情報工学科 3 年)

間庭早紀子(津山高専, 情報工学科 3 年)

1. 研究の目的と概要

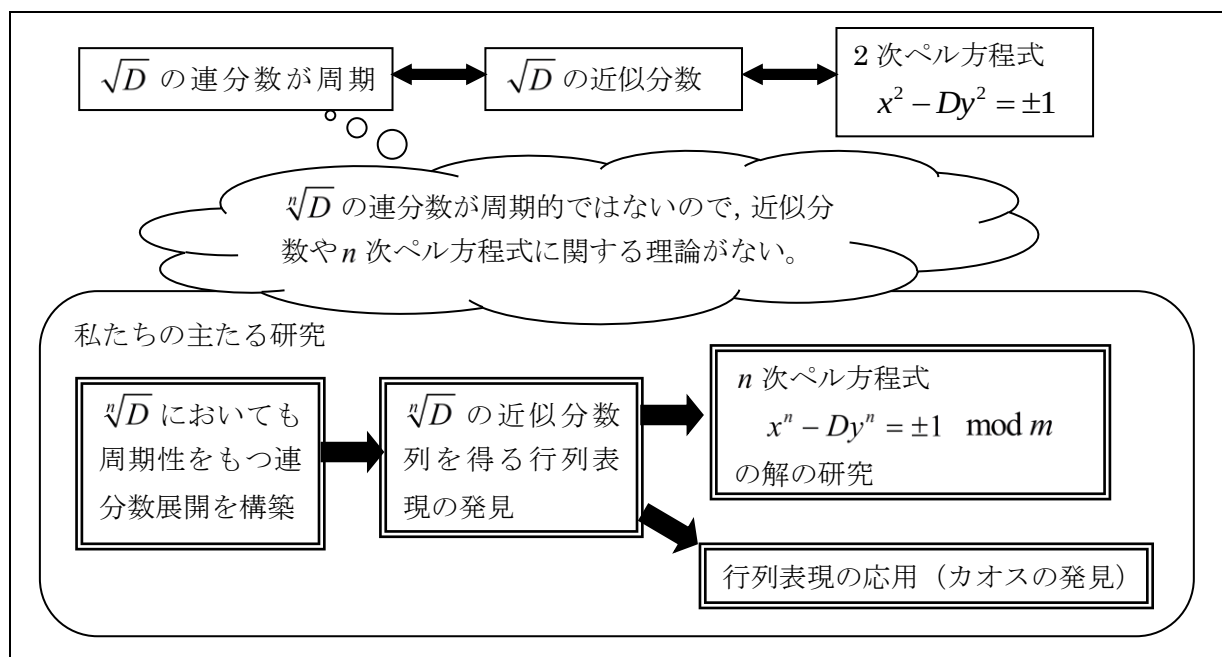
ペル方程式は連分数展開で解くことができるという定理がある. ペル方程式とは $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ (D は平方数でない自然数) という形の不定方程式である. 私達の研究の主たる目的は, 今までまだ誰も成功していない $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ を解くための理論を構築することである.

昨年私達は, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ (k, α は任意の自然数で $0 < \alpha \leq k$) という形の n 乗根に関する連分数展開の新しい展開方法の構築をした. 一般に, 平方根はこれまで知られている連分数展開で展開すると周期性を持つ. しかし, $n \geq 3$ のとき, n 乗根は従来の連分数展開では周期性を持たないことが証明されている. このため, $n \geq 3$ の n 乗根に関する理論がない. したがって私達は, 従来の連分数展開を捨て, n 乗根においても周期性(フラクタル性)を持つような新しいタイプの連分数展開を構成することを研究した. 私達の考えた連分数展開の形では, n 乗根の連分数は n 次元的と見ることができるので, これを **n 次フラクタル連分数** と呼ぶことにした. 更に, フラクタル連分数を応用すると, n 乗根の近似分数列が得られる行列表現(**非線形ペル表現**と呼んでいる)を発見することができた(JSEC2012 佳作受賞).

さて, 2 次ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解法は 1766 年に Lagrange が示したものが有名で, $\sqrt{D}$ の近似分数に関係することが分かっている. したがって, 私達が発見した行列表現は n 次ペル方程式の解法に繋がると思い, 今年の新たな研究をスタートさせた. つまり, ペル方程式 $x^n - (k^n + \alpha)y^n = \pm 1$ の解は, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数が得られる行列表現を用いて導き出すことができるのではないかと考えたのである. 2 次ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ に関しては, k と α が特殊なケースに限るが, 私達の $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の近似分数が得られる行列表現を使うと, Lagrange の方法より高速に解を見つけれることが成果である. しかし, n 次の場合はペル方程式の解の公式どころか解そのものが得られなかった. この理由は, 1909 年の結果である, n 次ペル方程式を含む Thue 方程式は高々有限個の解しか持たないことに関係し, その詳細研究は難しいものとされている. そこで, 私達は n 次ペル方程式に関しては mod m の世界での研究を行った. その結果, いくつかの有益な成果を得ることができた.

一方, 連分数とカオスに関する研究も多く見られることに興味を持ち, 私達の研究もカオスを睨んだものへと発展させることができると考えた. そこで, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の幾何学的考察として, コンピュータにより k と α を (自然数ではなく) 実数のパラメータとして動かし, 私達の非線形ペル表現から出力される数列の発散と収束の様子を $k\alpha$ 座標平面に表示させるという研究を行った. その結果, 発散と収束の境界線を与える k と α のグラフの関数がある定数 A で $\alpha = Ak^n$ と書けることを突き止めた. これは, 派生的に得られた成果である.

図 1 は, 研究の概観図である. 両矢印は互いに関係があることを示している. 私達の研究が, 2 次ペル方程式から始まり n 次ペル方程式とカオスに至るまでの過程を表している.



(図 1: 研究の概観図)

2. 主結果

主結果を述べるには, 昨年の結果の知識が必要となるので, まずそれを述べる.

定理 1. n 乗根の連分数に関し, 従来とは異なる新しい連分数(フラクタル連分数)を構築した. より詳しく

言えば, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のフラクタル連分数を,

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} {}_n C_1 \cdot k^{n-1} \\ {}_n C_2 \cdot k^{n-2} \\ \vdots \\ {}_n C_{n-1} \cdot k \end{pmatrix} \right]^{[\alpha]}$$

と表記できる(詳細は § 3.1 で述べる).

定理 2. n 乗根に近似する分数列が得られる行列表現 (n 次非線形ペル表現と呼ぶ)を発見した. すなわち

$\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列 $\frac{x_r}{y_r}$ は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & \cdots & k^n + \alpha \\ 1 & k & \cdots & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

から得られる. ただし, 2 次の場合は線形ペル表現と呼ぶ(詳細は § 3.2 で述べる).

昨年得られた 2 つの定理を使って, 私達は以下の 5 つ主結果を得ることができた.

主結果 1. 平方根 $\sqrt{k^2 + \alpha}$ に関して, 線形ペル表現

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる (x_r, y_r) について,

$$x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$$

が成り立つ. 特に, $\alpha=1$ のとき (x_r, y_r) は, ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の全ての解である (詳細は § 4.1 で述べる).

主結果 2. u をある整数に固定し, $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の最小解を (a, b) とする. 更に, $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ の解の一つを (x_0, y_0) とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(k^2 + \alpha) \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

から得られる (x_n, y_n) は, ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ を満たす (詳細は § 4.1 で述べる).

主結果 3. m, n は 3 以上の自然数とする. $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の n 次の非線形ペル表現

から得られる (x_r, y_r) について, $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ は周期性を持つ (詳細は § 4.2 で述べる).

主結果 4. p, q を奇素数, D を自然数, $t \geq 2$ の整数とする. この時, 次 q 次ペル方程式

$$x^q - Dy^q = 1 \pmod{p^t}$$

は, 解 (x_0, y_0) の x 同値の個数 (ただし $x \geq 2$) によって, 次の 3 つのタイプに分類できる.

- (I) $p = q$ または $p|D$ ならば, x 同値の個数は存在するなら p 個である.
- (II) $p = 1 \pmod{q}$ ならば, x 同値の個数は存在するなら p 個または q 個である.
- (III) I, II 以外の場合, x 同値の個数は, もし $x = 1 \pmod{p}$ ならば解なし. それ以外は 1 個である.

(詳細は § 4.2 で述べる).

主結果 5(予想). (1) n 次非線形ペル表現について, 実数 k, α に関する (x_r, y_r) の極限は, (k, α) により様子が異なる.

- (2) (x_r, y_r) が r が大きくなるにつれ, 収束するときの (k, α) と発散するときの (k, α) の境界は, ある正の定数 A と負の定数 B で $\alpha = Ak^n$, または $\alpha = Bk^n$ と書ける. 特に, n が偶数のとき $B = -1$ である.
(発散とは収束しないという意味で, 詳細は §5 で述べる).

3. フラクタル連分数に関する研究の紹介

3.1. フラクタル連分数について

前述した通り, $\sqrt{D}$ (ただし D は平方数でない自然数) は周期的な連分数になる. しかし, $\sqrt[n]{D}$ (ただし D は立方数でない自然数) の通常の連分数には周期性は見られないことが証明されている. そこで, 昨年私達は n 乗根 ($n \geq 3$) においても周期性を持つような連分数の構成に挑戦し, それに成功した.

まず, 私達は n 乗根の連分数展開を睨んで, $D = k^2 + \alpha$ とおき, $x = \sqrt{k^2 + \alpha}$ を $x = k + \frac{\alpha}{k+x}$ と変形した. この式から $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のフラクタル連分数が構築できる. すなわち, $\frac{\alpha}{k+x}$ の x に再び $k + \frac{\alpha}{k+x}$ を代入していくと,

$$\sqrt{k^2 + \alpha} = k + \frac{\alpha}{2k + \frac{\alpha}{2k + \dots}}$$

となる. 上の式から分かるように, 整数部は k , 分子は常に α , そして分母は $2k$ が周期 1 で続いていく. これを私達は,

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim \left[k, \left(\frac{\cdot}{2k} \right) \right]^{(\alpha)} \quad (3.1)$$

と表すことにした. ここで, $2k$ を**フラクタル成分**と呼ぶ. これは, 分母が常に $2k + 2k(*)$ という形でフラクタルに配置されているという意味である. また $[]$ の右上の (α) は連続する分子の数 α を表す. 表記(3.1) を**1 次のフラクタル連分数**と呼ぶ.

一般に $\sqrt[n]{D}$ について $D = k^n + \alpha$ とおいて, $x = \sqrt[n]{k^n + \alpha}$ を,

$$x = k + \frac{\alpha}{k^{n-1} + k^{n-2}x + k^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}}$$

と変形する. $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のフラクタル連分数の構築方法と同様にしていけば, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関するフラクタル連分数が得られる.

例えば, $\sqrt[3]{3}$ のフラクタル連分数は, 私達の連分数展開を用いると,

$$\sqrt[3]{3} = 1 + \frac{2}{3 + 3 \left[\frac{2}{3 + 3 \left(\frac{2}{3 \dots} \right) + \left(\frac{2}{3 \dots} \right)^2} \right] + \left[\frac{2}{3 + 3 \left(\frac{2}{3 \dots} \right) + \left(\frac{2}{3 \dots} \right)^2} \right]^2}$$

となり, これを私達の表記では,

$$\sqrt[3]{3} \sim \left[1, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^{(2)}$$

と表す. 一般に, 3 乗根, 4 乗根, 5 乗根のフラクタル連分数の表記は,

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} 3k^2 \\ 3k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)} \quad \sqrt[4]{k^4 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} 4k^3 \\ 6k^2 \\ 4k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)} \quad \sqrt[5]{k^5 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} 5k^4 \\ 10k^3 \\ 10k^2 \\ 5k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)}$$

となる. ここで, フラクタル成分の $\begin{pmatrix} 3k^2 \\ 3k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4k^3 \\ 6k^2 \\ 4k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5k^4 \\ 10k^3 \\ 10k^2 \\ 5k \end{pmatrix}$ 中の k^j の係数は, フラクタル成分はパスカ

ルの三角形(右図参照)と対応する.

以上のことから, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のフラクタル連分数の定理が得られた.

			1		
		1	1		
	1	2	1		
	1	3	3	1	
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

(図 3.1: パスカルの三角形)

(定理 1)

$\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のフラクタル連分数の表記は,

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} {}_nC_1 \cdot k^{n-1} \\ {}_nC_2 \cdot k^{n-2} \\ \vdots \\ {}_nC_{n-1} \cdot k \end{pmatrix} \right]^{[\alpha]}$$

である.

3.2. 近似分数について

昨年のもう一つの結果を述べる. それは, n 次ペル方程式の解法に関係のある近似分数についてである. そして,

$\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数を得る行列表現を, § 3.1 で述べたフラクタル連分数の理論を用いて構築した.

例えば, $\sqrt{2}$ の近似分数 $\frac{x_r}{y_r}$ を得る行列表現は, $t^2 = 2$ を変形した式 $t = 1 + \frac{1}{1+t}$ で $t = \frac{x_r}{y_r}$ とおいて整理すると,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

となる. 初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で計算すると, 近似分数列

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{x_r}{y_r}, \dots$$

が得られ, 計算を続ければ続けるほど $\sqrt{2}$ に近似していく. 同様にして, $\sqrt[3]{3}$ の場合, 近似分数 $\frac{x_r}{y_r}$ を得る行列

表現は, $t^3 = 3$ を変形した式 $\frac{2}{1+t+t^2}$ $t = \frac{x_r}{y_r}$ で おおいて整理すると,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となり, 初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で計算すると, 近似分数列

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{67}{49}, \dots, \frac{x_r}{y_r}, \dots$$

を得る. 一般に私達は, フラクタル連分数の構成法を応用して得られる行列表現から, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列を得た.

(定理 2)

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \text{ の近似分数 } \frac{x_r}{y_r} \text{ は, } \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & \cdots & k^n + \alpha \\ 1 & k & \cdots & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2}y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1}y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ 初期値 } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

から得られる. 上の表現を, $n=2$ のときは線形ペル表現, $n \geq 3$ については n 次非線形ペル表現と呼ぶ.

以上が, 昨年の研究の概要である.

4. 2 次ペル方程式の非線形ペル表現による解法

4.1. 2 次ペル方程式と線形ペル表現

§ 3 では, n 次ペル方程式と関連の深い連分数と近似分数についての昨年の結果を述べた. 以下からは, 今年度の私達の研究の第 1 の目的である n 次ペル方程式の解法を § 3 から得た結果を用いて研究していく. まず, 次の命題を紹介する.

命題[Silvermam]

ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ (D は平方数でない自然数) の最小解を (x_0, y_0) とすると, 全ての解 (x_n, y_n) は,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 D \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

から得られる.

〈証明〉 Silvermam[1] の Theorem 30.1 より言える.

私達は, 2 次ペル方程式の解を研究するために, 平方根 $\sqrt{k^2 + \alpha}$ に関する線形ペル表現 $\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}$, 初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を使った. $\alpha = 1$ の場合, 線形ペル表現から得られる (x_r, y_r) は, 実は上記の命題の (x_n, y_n) に全て一致しており, 2 次ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の全ての解となることも分かった. しかし, $\alpha \neq 1$ の場合は, 残念ながら 2 次ペル方程式の解は線形ペル表現からは得られなかった. そこで, $u_r = x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2$ において, 関数値 u_r の研究を行った. $\alpha = 2$ のときを, (4.1) と同様に計算していくと, k がどのような値をとっても関数値は $u_r = (-2)^{r-1}$ であった. $\alpha = 3, \alpha = 4$ の場合は, $u_r = (-3)^{r-1}, u_r = (-4)^{r-1}$ となっていた. これらのことは一般的に証明でき, 以下の結果を得た.

(主結果 1)

平方根 $\sqrt{k^2 + \alpha}$ に関して, 線形ペル表現

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる (x_r, y_r) について,

$$x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$$

が成り立つ. 特に, $\alpha = 1$ のとき (x_r, y_r) は, ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の全ての解である.

〈証明〉 数学的帰納法で証明する. $r = 1$ については, $u_r = 1^2 = (-\alpha)^0$ より正しい. $r - 1$ まで正しいと仮定する.

$$\begin{aligned} u_r &= x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (kx_{r-1} + (k^2 + \alpha)y_{r-1})^2 - (k^2 + \alpha)(x_{r-1} + ky_{r-1})^2 \\ &= -\alpha(x_{r-1}^2 - (k^2 + \alpha)y_{r-1}^2) = (-\alpha) \cdot (-\alpha)^{r-2} = (-\alpha)^{r-1} \end{aligned}$$

(証明終)

上の定理から私達の研究の有用性は, $u_r = \pm 1$ 以外にも拡張できたことにある. そこで, u を ± 1 以外の整数として固定し, ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ の解の構造を研究した. コンピュータの計算から得られたデ

ータを睨み,多くの議論の結果,解を高速に導き出す方法を見つけた.

例えば, $k=2, \alpha=3(k^2+\alpha=7), u_r=9$ のときの $x^2-7y^2=9$ の解について説明しよう. まず, $a^2-7b^2=\pm 1$ の初期値 $(a,b)=(8,3)$ と $x^2-7y^2=9$ の解の一つ, 例えば $(4,1)$ が見つかったとする. そのとき,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \times 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を使うと,次々と

$$(x,y)=(53,20),(844,319),(13451,5084),\dots$$

と $x^2-7y^2=9$ の解が次々と得られるのである. これは, Silvermam[1] で示されている上記の命題に類似した結果で, 一般に次のようにまとめることができた.

(主結果 2)

u をある整数に固定し, $x^2-(k^2+\alpha)y^2=\pm 1$ の最小解を (a,b) とする. 更に, $x^2-(k^2+\alpha)y^2=u$ の解の一つを

(x_0, y_0) とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(k^2+\alpha) \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

から得られる (x_n, y_n) は, ペル方程式 $x^2-(k^2+\alpha)y^2=u$ を満たす.

ただし, 主結果 2 は全ての解を求める公式ではないことを注意しておく.

〈証明〉 数学的帰納法で証明する. (x_{n-1}, y_{n-1}) まで正しいと仮定する.

$$\begin{aligned} x_n^2 - (k^2 + \alpha)y_n^2 &= (ax_{n-1} + b(k^2 + \alpha)y_{n-1})^2 - (k^2 + \alpha)(bx_{n-1} + ay_{n-1})^2 \\ &= a^2x_{n-1}^2 + 2ab(k^2 + \alpha)x_{n-1}y_{n-1} + b^2(k^2 + \alpha)^2y_{n-1}^2 - (k^2 + \alpha)(b^2x_{n-1}^2 + 2abx_{n-1}y_{n-1} + a^2y_{n-1}^2) \\ &= (a^2 - (k^2 + \alpha)b^2)x_{n-1}^2 - (k^2 + \alpha)(a^2 - (k^2 + \alpha)b^2)y_{n-1}^2 \\ &= x_{n-1}^2 - (k^2 + \alpha)y_{n-1}^2 = u \end{aligned}$$

(証明終)

4.2. 3 次以上のペル方程式について

コンピュータを使った数値計算から, $n \geq 3$ のときの n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ (D は任意の自然数) については, 全く解は得られなかった. この理由は, 1909 年の結果 Thue 方程式は高々有限個の解しか持たないことに関係し, その詳細研究は難しいものとされている. そこで, 私達は $\text{mod } m$ の世界で研究を行った. まず, 周期性に関する以下の結果を得た.

(主結果 3)

m, n は 3 以上の自然数とする. $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する n 次非線形ペル表現から得られる (x_r, y_r) について,
 $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ は周期性を持つ.

〈証明〉鳩ノ巣原理を用いて証明できる. m^2 個の鳩ノ巣を用意し, 鳩としての以下の $m^2 + 1$ 組の対を用意する. $(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_1, y_m), (x_2, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_2, y_m), (x_3, y_1), \dots, (x_m, y_m), (x_{m+1}, y_{m+1})$ すると, 鳩ノ巣原理より, $(x_r, y_s), (x_{r'}, y_{s'})$ で, $x_r = x_{r'}$ かつ $y_s = y_{s'}$ となるものが存在する. それを $(x_r, y_s) = (x_{r'}, y_{s'})$ と書く. このとき, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現より, $(x_{r+1}, y_{s+1}) = (x_{r'+1}, y_{s'+1})$ がいえる. これは, 周期的であることを意味する. (証明終)

さて, 私達が発見した非線形ペル表現は, $n \geq 3$ のときの n 次ペル方程式 $x_r^n - x(k^n + \alpha)y_r^n = \pm 1 \pmod{m}$ どのように影響を与えているかが問題である. これを考えるために, $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ として (x_r, y_r) の関数 u_r がどのような値を取るかを調査した. その結果, p 次ペル関数 $u_r \pmod{p^t}$ には, x_r または y_r が公差 Ap^{t-1} という形の等差数列になっている現象を発見した.

例えば, $u_r = x_r^5 - 36y_r^5 \pmod{5^2}$ に関しては以下の通りである.

r	u_r	ペル表現の集合 $\{(x_j, y_j)\}$	公差 5^2 の法則
1	121	(2,1), (52,26), (102,51), (27,76), (77,101)	y_j
2	74	(39,80), (64,80), (89,80), (114,80), (14,80)	x_j
3	21	(37,81), (87,106), (12,6), (62,31), (112,56)	y_j
:	:	:	:

(定義) D, u を自然数とする. (x_0, y_0) と (x_1, y_1) がどちらも $x^n - Dy^n = u \pmod{m}$ の解であるとき, $x_0 = x_1$ であるならば, (x_0, y_0) と (x_1, y_1) は x 同値であるという.

公差 Ap^{t-1} の法則と x 同値という概念により, 私たちは, ある主の素数次ペル方程式を分類できることを証明できた. それが主結果 4 である.

(主結果 4)

p, q を奇素数, D を自然数, $t \geq 2$ の整数とする. この時, 次 q 次ペル方程式

$$x^q - Dy^q = 1 \pmod{p^t}$$

は, 解 (x_0, y_0) の x 同値の個数 (ただし $x \geq 2$) によって, 次の 3 つのタイプに分類できる.

(I) $p = q$ または $p|D$ ならば, x 同値の個数は存在するなら p 個である.

(II) $p = 1 \pmod{q}$ ならば, x 同値の個数は存在するなら p 個または q 個である.

(III) I, II 以外するとき, x 同値の個数は, もし $x = 1 \pmod{p}$ ならば解なし. それ以外は 1 個である.

〈証明〉 証明には, 次の命題を用いる.

命題 1: p を 3 以上の素数とし, $t \geq 1$ の自然数とする. このとき,

$$r^\varphi \equiv 1 \pmod{p^t}$$

となる r が存在する. このとき, $r, r^2, \dots, r^{\varphi-1}$ は p^t と互いに素となる. φ は p^t のオイラー数で, $\varphi = (p-1)p^{t-1}$ である.

〈証明〉 初等整数論講義 (高木) P112 定理[1.42]にある. $\square$

命題 2: p を 3 以上の素数とし, u, t を自然数とする. このとき,

$$x^{p-1} \equiv u \pmod{p^t}$$

を満たす x は $p-1$ 個ある.

〈証明〉 命題 1 より, $u^{p^{t-1}} \equiv 1 \pmod{p^t}$ となり, これより証明される. $\square$

I の証明: $x^q \equiv 1$ であれば $Dy^q \equiv 0$ であるので解は p 個となる. $x^q \not\equiv 1$ のときは, $Dy^q \not\equiv 0$ である. $p = q$ のとき, x^p のとり得る値は p 個しかないので, 解は p 個か 0 個となる. p が D の約数である場合も Dy^q の取り得る値は p 個しかないので, 解は p 個か 0 個となる.

II の証明: この場合は, $p = aq + 1$ と書けるため, $x^q \equiv 1$ ならば, $x^p \equiv x$, すなわち $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^t}$ がいえる. したがって $x = 1$ 以外に $x^q \equiv 1$ という解が存在し, 解は p^{t-1} 個となる. また, $x^q \not\equiv 1$ のときは, $x^q \equiv u$ ($u \not\equiv 1$) であるので, $x^{p-1} \equiv u \pmod{p^t}$ を得る. 命題 1 より p 個となる.

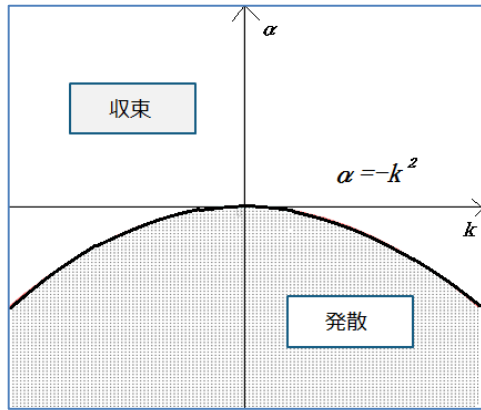
III の証明: p と q は互いに素であるので, $x^q \equiv 1$ ならば, $x = 1$ である. それ以外では, $Dy^q \not\equiv 0$ であり, このとき, Dy^q と p^t は互いに素であれば, 命題 2 より y は一意的に定まり, そうでなければ解はない. (証明終)

u を 1 以外の自然数, $x^q - Dy^q = u \pmod{p^t}$ を主結果 4 と同様な分類ができるものと考えているが, それを示すには至っていない.

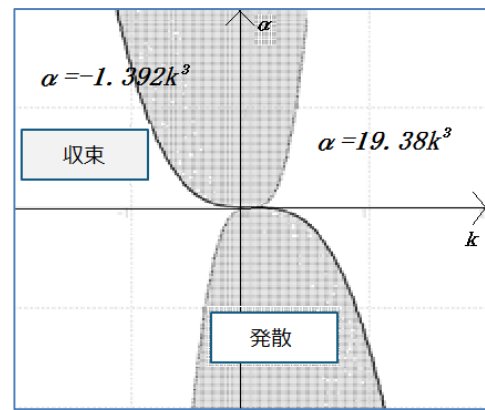
5. 連分数とカオスとの関連

§ 3.2 において, $\sqrt[n]{D}$ の近似分数に関し, 私達は n 次非線形ペル表現を得た. これまでの議論から, D が自然数であれば n 次非線形表現から得られる数値は次第に $\sqrt[n]{D}$ に近似していく. しかし D が非整数の実数であれば, 非線形ペル表現が与える値はどういう意味を持つか, コンピュータによる数値的研究を行っ

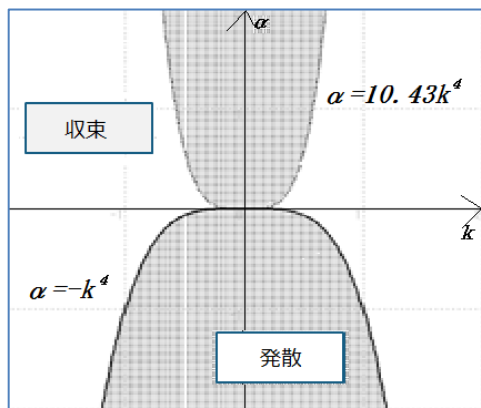
た．その結果,各 (x_r, y_r) に対して n 次非線形ペル表現から得られる (k, α) の値は,ステップが大きくなるにつれ発散するか収束するかどうかの現象が起こった．そして私達は,発散と収束の境界線を与えるグラフの関数が,ある定数 A で $\alpha = Ak^n$ と書けることを突き止めた．



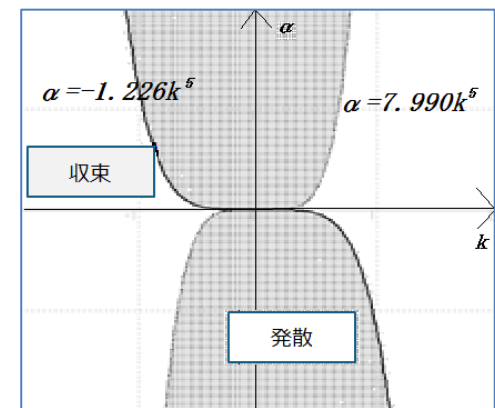
(図 5.1: $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)



(図 5.2: $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)



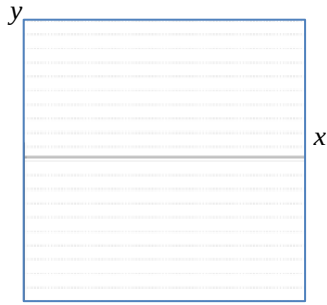
(図 5.3: $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)



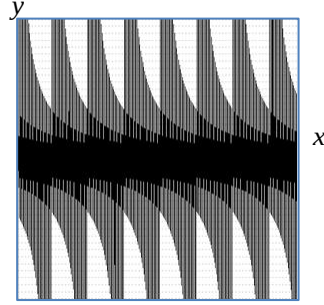
(図 5.4: $\sqrt[5]{k^5 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)

上記の図 5.1-5.4 は, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の α と k を使い, $k\alpha$ 座標平面上における n 次非線形ペル表現から得られる数列 (x_r, y_r) の発散・収束の様子を表したグラフである(発散は振動も含める)．縦軸を α , 横軸を k とし, 色のついていない範囲が収束する領域, 色のついた範囲が収束しない領域となっている．その境界線を, 細線と太線で表す．私達の研究では, 境界を $\alpha = Ak^n$ とすると, $n=2$ のときは $A=-1$, $n=3$ のときは $A \doteq -1.392, 19.38$, $n=4$ のときは $A \doteq -1, 10.43$, $n=5$ のときは $A \doteq -1.226, 7.990$ という近似値の結果を得た．特に, 平方根と 4 乗根, すなわち n が偶数のときの定数 A に注目すると, 負の領域では $A=-1$ となっていることを確信している．しかし, これ以上の具体的な結論は得られなかった．

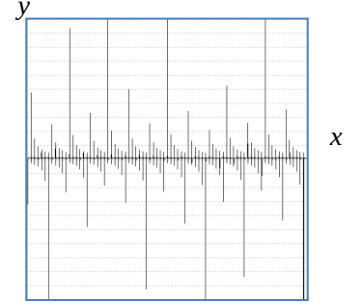
グラフの発散領域の具体的様子の一例を以下に示す．図 5.5 は, 図 5.1 における $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフの $k=-0.62, \alpha=-0.864$ 地点の収束の様子であり, 図 5.6 は, $k=0.44, \alpha=-0.44$ 地点, 図 5.7 は, $k=0.44, \alpha=-0.44$ 地点での発散の様子である．発散のグラフは, (k, α) の値により異なることも特徴であった．



(図 5.5: $k = -0.62, \alpha = -0.864$)



(図 5.6: $k = 0.44, \alpha = -0.44$)



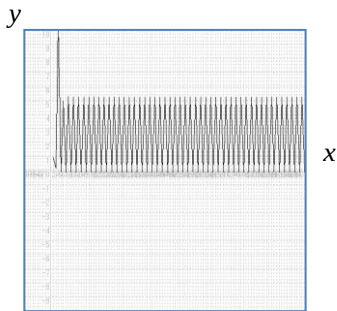
(図 5.7: $k = -0.23, \alpha = -0.1191$)

(主結果 5(予想))

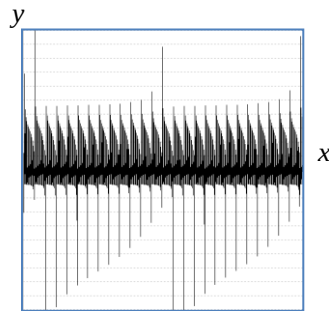
- (1) n 次非線形ペル表現について, 実数 k, α に関する (x_r, y_r) の極限は, (k, α) により様子が異なる.
- (2) (x_r, y_r) が r が大きくなるにつれ, 収束するときの (k, α) と発散するときの (k, α) の境界は, ある正の定数 A と負の定数 B で $\alpha = Ak^n$, または $\alpha = Bk^n$ と書ける. 特に, n が偶数のとき $B = -1$ である.

6. 今後の方針

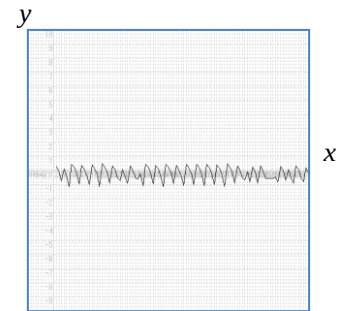
N.Oku, K.Aihara の論文『Numerical Analysis of Transient and Periodic Dynamics in Single and Coupled Nagumo-Sato Models』では, 単一のニューロンモデルに関するカオス理論が扱われている. 驚くべきことに, この論文の中にある周期的なアトラクターのグラフの多くが, 私達の研究から得られたグラフと非常に類似している. つまり, 私達の考えた理論は, ニューロンモデルへの応用があるのではないかと考えている. §5 で述べた振動のグラフで, 上の論文と類似の波形の例を下に挙げる.



(図 6.1: $k = -0.12, \alpha = 0.216$)



(図 6.2: $k = -0.99, \alpha = -1$)



(図 6.3: $k = 0.536, \alpha = -0.096$)

図 6.1 は 3 次非線形ペル表現, 図 6.2 は 4 次非線形ペル表現, 図 6.3 は 5 次非線形ペル表現における各地点 (k, α) における発散の様子である.

7. 参考文献

- [1] Joseph H. Silverman 『A FRIENDLY INTRODUCTION TO NUMBER THEORY』 Pearson International Edition, (1997)
- [2] 高木貞治 『初等整数論講義 第2版』 共立出版株式会社, (1971)
- [3] N.Okui, K.Aihara (2012) 『Numerical Analysis of Transient and Periodic Dynamics in Single and Coupled Nagumo-Sato Models』 International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.22, No.6, 1230021 (2012)
- [4] 「ヘル方程式 -wikipedia」
<
<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9A%E3%83%AB%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F>>
(2013/4/18)

ファレイ数列の高次元化の研究

赤松昌俊(津山高専, 情報工学科 2 年)

小林祐志(津山高専, 電気電子工学科 2 年)

1. 目的と概要

「ファレイ数列を高次元化する」これが私達の研究の目的である。ファレイ数列とは 0 と 1 の間のすべての既約な分数のことである。しかし、私達が興味を持ったことは、それらの分数の生成過程において、2 つの分数の分母同士、分子同士を足すという簡単な計算で、既約分数が次々と得られていくことである([4]参照)。また、ファレイ数列は、どんどん小さくなりながらも隣接していくフォード円と関係があることも興味深く([3]参照)、さらに、現代の数学や物理における非線形現象の解明のための研究にも使われているということを知り驚いた([1]参照)。

ファレイ数列を高次元化しようと考えたきっかけは、数学クラブでの議論の中で通常の平行線が必ず無限遠点で交わってしまうという射影平面を学んだことにある。この立場で考えると分数は比と考えればよく、そしてファレイ数列は 1 次元射影空間(射影直線)における既約な比の列といえる。

したがって、2 次元射影空間(射影平面)の整数点 $(a:b:c)$ で 3 つの数の最大公約数が 1 であるものを

2 次元ファレイ連比として考えれば、より高い次元のファレイ連比も定義でき、研究することが可能となるのではないかと考えた。

この論文では、特に 2 次元ファレイ連比に関する研究について論じる。そのために 2 次元ファレイ連比の構成法を帰納的に定義する。

私達が示す結果は大きくみて 3 つある。第 1 は、そのステップから生まれる正方行列の行列式の値が 1 となる点である。第 2 は、私達がフォードパイプと名付けたものの発見である。つまり、ファレイ連比と対応するフォード円の 3 次元拡張に成功した点である。第 3 は、離散力学系の 2 次元ファレイ連比を使ったモデル化である。

実はまだ明確な結論が得られていないが、私達が定義した 2 次元ファレイ連比は、2 次元コントロール集合であるシェルピンスキーのカーペットにも対応できるのではないかと確信している。

2. ファレイ数列と既知の結果

通常、ファレイ数列とは 2 つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし、それらの分子同士、分母同士のそれぞれの足し算で次の分数をつくり、この操作をくり返して得られていく分数列のことである。より具体的には、ステップ 0 のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ とする。このとき注意すべきことは 2 つの分数から

得られる行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値は 1 となることである。ステップ 1 のファレイ数列は

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ を加えた $\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$ であり、このとき隣り合う2つの分数から得られる行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値は1となる。ステップ2以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ、隣り合った2つの分数から新しい分数を上演算で作っていく。したがって、ステップ2のファレイ数列は $\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$ で、これについても隣り合う2つの分数から得られる行列の行列式の絶対値はすべて1となり、ステップ3のファレイ数列は $\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$ というようになり、行列式についても同様にすべて1となる。このようにして得られた分数を**ファレイ分数**と呼ぶ。一方、分子と分母の最大値が r となる正の分数を**次数 r の分数**と呼ぶ。私達が今回の研究の基礎として着目した既知の結果は以下のものである。

定理1 任意のファレイ分数は既約であり、任意の次数 r の既約分数はファレイ分数である。

定理2 ステップ n のファレイ数列において、数直線上の隣り合う2つの分数を取り出し、それを2次正方行列とみると、その行列式の値の絶対値は1である。

定理3 xy 平面上の区間 $0 \leq x \leq 1$ で互いに接するフォード円と呼ばれる円群の中心の x 座標はファレイ分数である。(図1)

定理4 ファレイ数列に対応する0と1を使った符号が存在する。(これは離散力学系に関する結果である。)

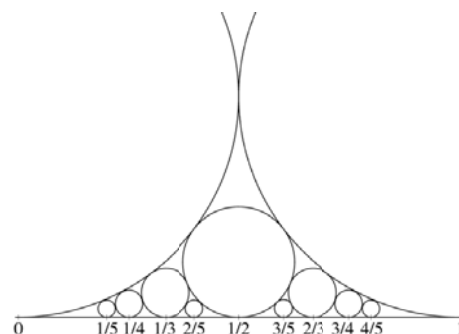


図1(フォード円とファレイ分数)

私達の研究対象は n 次元射影空間の非負の整数点 $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ である。以下、これを単に **n 次元連比**と呼ぶ。

(例1) 1次元連比 $(a_0 : a_1)$ について $a_1 \neq 0$ のとき、 $(a_0 : a_1)$ は $\frac{a_0}{a_1}$ に対応する。そして $(1:0)$ は射影直線上の無限遠点 ∞ に対応する。

(例2) 2次元連比 $(a_0 : a_1 : a_2)$ について $a_2 \neq 0$ のとき、 $(a_0 : a_1 : a_2)$ は通常の xy 平面上の有理点

$P\left(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}\right)$ に対応する。そして、 $(0:1:0)$ と $(1:0:0)$ は射影平面の無限遠の2つの原点 Q_∞ と R_∞ に

対応する。

私達は n 次元連比の中から、 n 次元ファレイ連比になるものをうまく定義し、上に述べたファレイ数列に関する既知の結果(定理1から定理4)が、私達が考えたファレイ連比において、どのよ

うに拡張されるのかを研究した.

3. 2次元ファレイ連比について

ファレイ数列における2つの分数の演算は分子同士, 分母同士の足し算を行うことである. これを私達の立場である比(1次元ファレイ連比)で考えると, $(a_0:a_1)+(b_0:b_1)=(a_0+b_0:a_1+b_1)$ ということになる. この演算は2つのベクトルの足し算とみることでもある.

定義1 2つの n 次元連比 $(a_0:a_1:\cdots:a_n)$, $(b_0:b_1:\cdots:b_n)$ に対して,

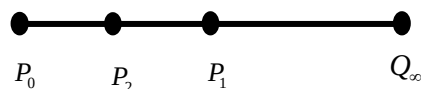
$(a_0:a_1:\cdots:a_n)+(b_0:b_1:\cdots:b_n)=(a_0+b_0:a_1+b_1:\cdots:a_n+b_n)$ と定義する.

この演算を**ファレイ和**と呼ぶ. さらに, 2つのファレイ和から得られた連比を**中間比**と呼ぶ.

射影空間上のファレイ和から得られる中間比は, 通常の射影平面で考えると, 2つの点を直線で結んだときの間の点となる. 例えば, 2次元連比で $P_0(0:0:1)$ と $Q_\infty(1:0:0)$ の中間比は $P_1(1:0:1)$ で

あるが, これは xy 平面上の $(\frac{1}{1}, \frac{0}{1})$ に対応する. さらに, P_0 と P_1 の中間比は $P_2(1:0:2)$ であり, こ

れは $(\frac{1}{2}, \frac{0}{2})$ に対応する.



定義2 n 次元連比 $(a_0:a_1:\cdots:a_n)$ において, $a_0:a_1:\cdots:a_n$ の最大値が r となる連比を**次数 r の n 次元連比**と呼ぶ. また $a_0, a_1, \cdots, a_n$ の最大公約数が1である連比を**既約連比**と呼ぶ. ただし, $a_k=0$ であるものは最大公約数の計算には含めない. また $a_0, a_1, \cdots, a_n$ の中の1つの数 a_j だけがゼロでなく残りはすべてゼロである場合は $a_j=1$ であるものに限り既約とする.

以上の2つの定義を用い, 以下に2次元ファレイ連比を既約的に構成していく. (実はこの構成法は定理2の拡張を意識したものである.)

(ステップ0) 2次元射影空間内において, 3個の次数1の2次元ファレイ連比 $P_0(0:0:1)$, $Q_\infty(0:1:0)$, $R_\infty(1:0:0)$ を初期値とし, それらを頂点とする**無限大三角形 T** を考える. (これは射影

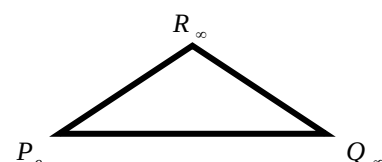


図2 (無限大三角形 T)

平面の3つの射影平面の原点を結んでできたものである).

(ステップ1) 3個のファレイ和 $P_1 = P_o + Q_\infty = (0:1:1)$,

$Q_1 = Q_\infty + R_\infty = (1:1:0)$, $R_1 = R_\infty + P_\infty = (1:0:1)$ と, さらに

$C = (1:1:1) = P_o + Q_\infty + R_\infty$ の点を取る. そして, 各点

$P_o, Q_\infty, R_\infty, P_1, Q_1, R_1$ から C まで直線で結び, T を6個の三角形で分

割する. それらを $T_1(k) (1 \leq k \leq 6)$ と名付ける. 得られた $T_1(k)$ の頂点

を **次数1のファレイ点(または連比)** と呼び, さらに $\{T_1(k)\}$ を **次数1**

のファレイ点による T の分割と呼ぶ.

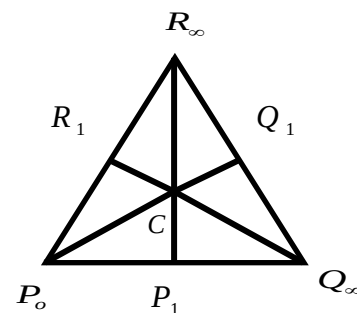


図 3

(次数1のファレイ点による T の分割)

(ステップ2) 上で得られた各三角形 $T_1(k)$ 上において, 2

点のファレイ和をそれぞれ求めると, これらはすべて次数

2の連比である. これらの点を, **次数2のファレイ点(ま**

たは連比) と呼ぶ. さらに各三角形 $T_1(k)$ 内において, 今求

めた 次数2のファレイ点2個と次数1のファレイ点1個を

使って三角形 $T_2(j)$ をつくり, 全ての $T_1(k)$ を分割していく.

この分割を **次数2のファレイ点による T の分割** と呼ぶ.

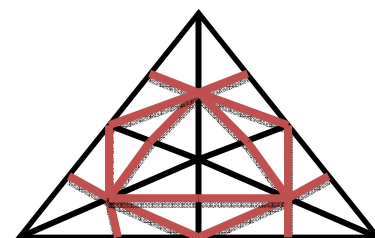


図 4

(次数2のファレイ点による T の分割)

(ステップ3) 次数2のファレイ連比による T の分割で得られたそれぞれの三角形 $T_2(j)$ においてス

テップ2の時と同様に, 2点のファレイ和で次数3となるものだけを求め, それらを **次数3のファ**

レイ点(または連比) と呼ぶ. そして, 各 $T_2(j)$ を 次数3のファレイ点2個と次数2以下のファレイ点

1個 を使って, 三角形 $T_3(i)$ をつくり, 全ての $T_2(j)$ を分割する. この分割を **次数3のファレイ点によ**

る T の分割 と呼ぶ.

以後ステップ3と同様な操作を繰り返し次数 $m (m \geq 4)$ のステップのファレイ点をつくり, さらに,

次が私達の考えた重要な点であるが, 直前のステップで得られた 三角形 $T_{m-1}(k)$ を次数 m のファレ

イ点を少なくとも1個もつ三角形 $T_m(j)$ をつくり $T_{m-1}(k)$ を分割する. このようにして帰納的に次

数 m のファレイ点による T の分割を構成していく.

私達の2次元ファレイ連比の構成法は上のように再帰的であるため, T の分割を数値だけで取り扱うことも可能である. 以下がその一部である.

$$T \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) 次数1のファレイ連比による T の分割

$$T_1(1) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_1(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_1(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_1(4) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_1(5) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_1(6) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) 次数 2 のファレイ連比による T の分割

$$T_2(1) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(4) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_2(5) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(6) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(7) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(8) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

.....

$$T_2(21) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(22) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(23) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_2(24) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

さて、以上のように得られた次数 m までのファレイ連比全体をランク m の 2 次元ファレイ連比, または単に 2 次元ファレイ連比と呼ぶ.

主結果 (1) 2 次元ファレイ連比は既約連比である.

(証明) ファレイ数列(1 次元)の既約性を用いることで示される(証明終).

残念であるが、今回私達の研究においては、2 次元既約連比が 2 次元ファレイ連比であることを示すことはできなかった. しかし、コンピュータによる計算結果からは、すべての値がファレイ連比となっていた.

予想 (1) 任意の 2 次元既約連比は 2 次元ファレイ連比である.

以上がファレイ数列における既知結果 (定理 1) を拡張した研究である. 次に、ファレイ数列における定理 2 を拡張する研究について述べる. これについては、上で示した T の分割で説明しよう.

T の分割で得られた小三角形 $T_j(k)$ の 3 個の頂点のデータを行列とみて、行列式を計算する. すると

どれもその絶対値は 1 となっていることが分かる. 例えば, $T_2(8) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ と考え,

その行列式の絶対値を計算すると 1 である. このことは、どんなステップのどんな小三角形から得られる行列でもいえる. 実は、この結果を言うために、多くの試行錯誤を繰り返し、2 次元ファレイ数列を構成したのである.

主結果(2) 2次元ファレイ連比の構成過程で順次得られる三角形の頂点からつくられる行列の行列式の値の絶対値は1である

(証明) 初期点の3点は $P_0(0:0:1), Q_\infty(0:1:0), R_\infty(1:0:0)$ であるので, $|\det(P_0, Q_\infty, R_\infty)|=1$ であることに注意する. その後は, ファレイ分割の定義から得られるファレイ和と行列式と基本性質から主結果(2)は得られる(証明終).

ところで, Nogueira と Sevennec の論文” Multidimensional Farey partitions” [2]では, 私達の研究と同じ2次元ファレイ分割を扱っている. しかし, この論文では, 2次元ファレイ分割を非負整数の3次元特殊線形群 $SL(3, \mathbb{Z})$ だけに着手して研究されたもので, 幾何学的考察がない. そのため, ファレイ数列の2次元化は完了していない. この点からみても, 私達の射影平面を三角形分割するという手法による2次元化の研究は大きな成果であると主張したい

4. 2次元ファレイ連比に関するフォード円の拡張について

フォード円とはファレイ数列の分数 $\frac{b}{a}$ から中心 $(\frac{b}{a}, \frac{1}{2a^2})$, 半径 $\frac{1}{2a^2}$ で作られる円のことである(図

1 参照).

これらのフォード円はファレイ数列の生成過程に応じて, 小さくなりながらも隣り合うフォード円に必ず接するという性質をもつことが特徴である.

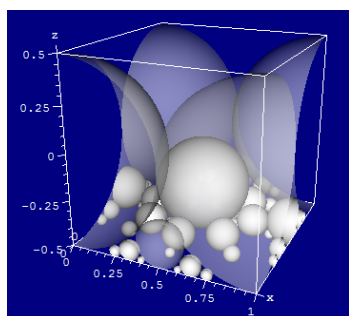


図5 フォード球

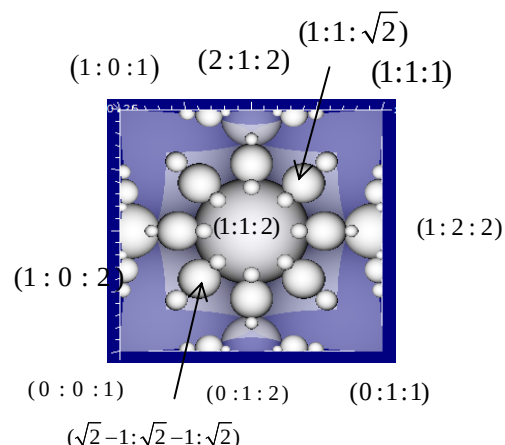


図6 フォード球の xy 平面の投影図

この節での私達の目的は, ファレイ数列に関する既知の結果(定理3)の拡張にある. すなわち2次元ファレイ連比に対応するようなフォード円のような幾何学的対象が存在するのかを問題とした. まず, 安易にフォード円をフォード球として構成できると考えて, コンピュータでシミュレーションしてみたが, それは間違いであった. 図6は, この方法による xy 平面への投影であるが, 特に直線 $y=x$ 上の中心座標に対する連比で平方根が現れてしまう.

私達の研究成果は**フォードパイプ**と名付けたものの発見である．それは，まず xyz 座標系における xz 平面 ($0 \leq x \leq 1$) にフォード円を用意し，それらの円を y 方向へ 1 だけ引き延ばし，パイプ状にする．これをフォードパイプと呼ぶ．同様に yz 平面 ($0 \leq y \leq 1$) のフォード円も x 方向へ 1 だけ引き延ばして，フォードパイプを作る．そして，それらのフォードパイプの交わった部分の中心座標における (x, y) の値が 2 次元ファレイ連比に対応するのではないかと考えたのである．図 8 は平面 $y = x$ の断面図であるが，フォードパイプの交わりは楕円となっているが，隣り合う楕円は互いに接している．

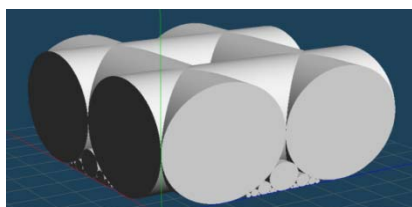


図 7 フォードパイプの様子

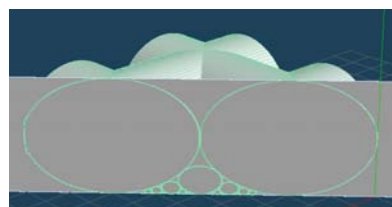
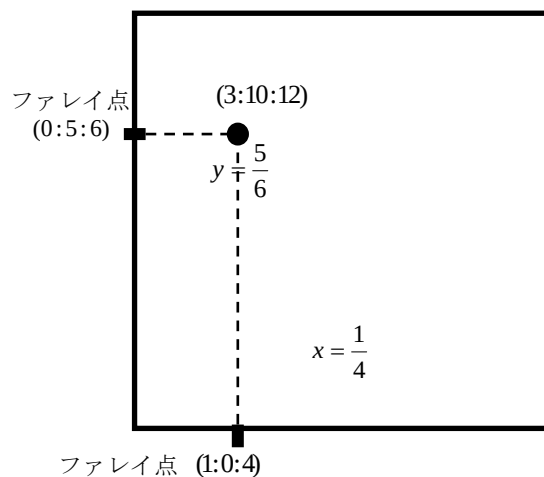


図 8 平面 $y = x$ での断面図

次の命題の発見は，2 次元ファレイ連比とフォードパイプの関係を証明することに大きな役割を果たすものとなった．しかし，特に直線 $x = \frac{s}{t}$ と直線 $y = \frac{v}{w}$ の交点がファレイ点であることを示すことが難しい．現在は証明に自信がないが，最終選考会までには完全にする予定である．

命題 1 次数 r のファレイ点 $(s:0:t)$ に対する直線 $x = \frac{s}{t}$ と，次数 q のファレイ点 $(0:v:w)$ に対する直線 $y = \frac{v}{w}$ の交点はファレイ点であり，それは t と w の最大公約数を d とすれば $\left(\frac{sw}{d} : \frac{vt}{d} : \frac{tw}{d}\right)$ である．



命題 1 を用いることで，私たちは次の主結果を得た．

主結果 (3) : xyz 座標系において， x 軸に平行なフォードパイプと y 軸に平行なフォードパイプの交差する部分の中心座標の (x, y) の値は 2 次元ファレイ点に対応する．また，フォードパイプの交わった部分の隣り合うもの同士は必ず接する．

5. 力学系への応用

「神経回路のカオス」(畑政義著, 朝倉書店)[1]の中にある離散力学系の周期アトラクタとして, ファレイ数列が取り上げられた. それは $0 < c < 1$ である定数 c に対し関数

$$f_c(x) = \begin{cases} x - c + 1 & (x < c) \\ x - c & (x \geq c) \end{cases} \quad (5.1)$$

から得れる. 以下に上の関数 $f_c(x)$ からどのようにしてファレイ数列的な周期性が得られるかを説明する.

(5-1) ファレイ分数の符号化

まず, $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ をそれぞれ符号 $\{0, 1\}$ と対応させる. $0, 1$ を $F(2)$ ビット値と呼ぶ. そして, $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ は符号 $\{0, 01, 1\}$, $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ は符号 $\{0, 001, 01, 011, 1\}$ というように, 符号のほうも帰納的に定義していく. ファレイ分数 $\frac{b}{a}$ に対し, 上で定義した符号を $\frac{b}{a}$ の $F(2)$ 符号と呼ぶ. 実はこの符号化は置換を用いて表すことも知られている. すなわち $\frac{q}{p}$ の符号は, 置換 $\sigma = \langle 1, 2, 3, \dots, p \rangle$ を考え, σ^q を計算し, $1, 2, \dots, p - q$ を 0 とし, それ以外を 1 とすることで得られる.

例えば, ファレイ分数 $\frac{3}{7}$ では, 置換 $\sigma = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$ を考える. そして, σ^3 を計算すると $\sigma^3 = \langle 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5 \rangle$ となる. 1 から 4 を 0, 5 から 7 を 1 で置き換えることで $\frac{3}{7}$ の $F(2)$ 符号は 0010101 であることがわかる.

(5-2) 離散力学系とファレイ符号

離散力学系(5.1)から 1 つの符号をつくる方法として以下が知られている.

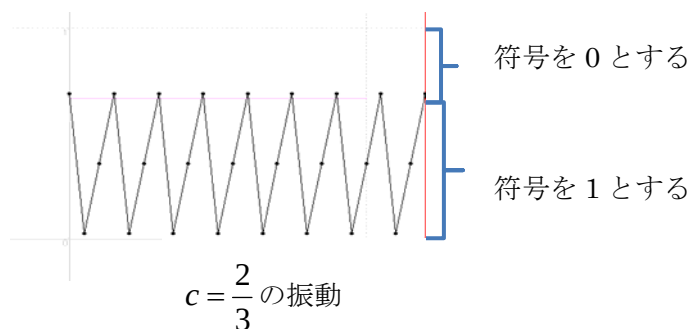
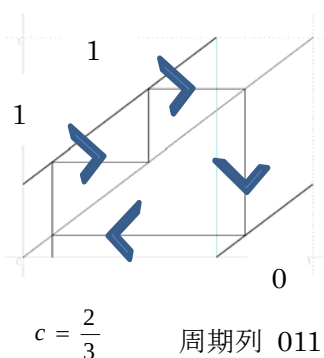
(1) c を固定する

(2) 区間 $(0, c)$ の任意の点 x_0 をとり, 符号を 1 とする.

(3) 次に $f_c(x_0) < c$ であれば $f_c(x_0)$ の符号を 1, $f_c(x_0) \geq c$ であれば $f_c(x_0)$ の符号を 0 とする.

以後 $f_c^n(x_0)$ についても $f_c^n(x_0)$ の符号を同様に定める. これによって

$[x_0, f_c(x_0), f_c^1(x_0), f_c^2(x_0), \dots]$ に対応する符号が求まる. これを $f_c(x)$ から定まる c の符号と呼ぶ.



次の定理が知られている．

定理 5. c をファレイ分数とする．このとき $f_c(x)$ から定まる c の符号は周期的であり，周期する部分の符号は c の $F(2)$ 符号と一致する

(5-3) 2次元ファレイ連比と直積

私たちは 2 次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ の符号化の研究を行った． $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$ と仮定すると $(\alpha:\beta:\gamma)$

は $(C_1, C_2) = \left(\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \left[\frac{\beta}{\gamma} \right] \right)$ と同一視できる．この時，分数 $\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \left[\frac{\beta}{\gamma} \right]$ は $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$ の既約分数とする．そし

て，ファレイ分数 $\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]$ と $\left[\frac{\beta}{\gamma} \right]$ をそれぞれ符号化する．これを $F(2)$ 符号の直積と呼ぶ．

たとえば $(3:4:6)$ は $\left(\frac{3}{6}, \frac{4}{6} \right)$ であるが，それぞれ約分してファレイ分数 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$ を得る． $\frac{1}{2}$ の $F(2)$

符号は 01, $\frac{2}{3}$ の $F(2)$ 符号は 011 であるので， $(3:4:6)$ の $F(2)$ の符号の直積は (01,011) となる．

(5-4) 離散力学系と 2 次元ファレイ連比の符号

関数 $x(t)$ と $y(t)$ が三角関数である場合， (x, y) の描く図形はリサージュ図形となる．定理 5 より，式(5,1)の $f_c(x)$ における定数 c をファレイ分数とすると， $f_c(x)$ は周期的である．したがって，

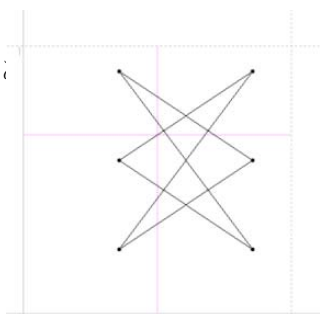
$\alpha < \gamma, \beta < \gamma$ である 2 次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ に対して， $(C_1, C_2) = \left(\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \left[\frac{\beta}{\gamma} \right] \right)$ が決まり，周期関数

$x = f_{c_1}(t)$ ， $y = f_{c_2}(t)$ により，リサージュ図形のような 2 次元的な周期グラフ が得られる．これを 2

次元ファレイ図形と呼ぶ．

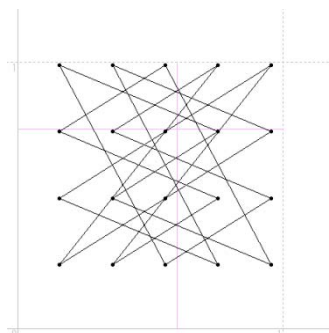
例えば、2次元ファレイ連比(3:4:6)でいえば周期関数 $x = f_{c_1}(t)$, $y = f_{c_2}(t)$ から2次元ファレイ図形 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ が得られる。2次元ファレイ連比(12:15:20)の2次元ファレイ連比図形は以下の

$$F\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right) \text{で、}$$



$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

(3:4:6)の2次元ファレイ図形



$$F\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$$

(12:15:20)の2次元ファレイ図形

私たちは、さらに直積を1次元的な符号に変え、2次元ファレイ連比を1次元波形に変換する研究を行った。

定義 $F(2)$ ビット値の直積(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)をそれぞれ 0,1,2,3 としこれを $F(4)$ ビット値と呼ぶ。

先に示したように、例えば、ファレイ連比(3:4:6)では周期関数 $x = f_{c_1}(t)$, $y = f_{c_2}(t)$ から2次元ファレイ図形 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ が得られた。一方 $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{3}$ の $F(2)$ 符号はそれぞれ 01 と 011 である。そして図形 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ の折点の情報から、 $F(4)$ ビット値で順に並べると 031213 となる。より詳しく言えば、 $f_{1/2}(t)$ と $f_{2/3}(t)$ の $F(2)$ 符号はそれぞれ 0101010101 と 011011011011 であり、これより6個の $F(2)$ ビット値の直積(0,0)(1,1)(0,1)(1,0)(0,1)(1,1)を $F(4)$ ビット値に変換することで、巡回する部分が、031213 であるということである。

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \hline
 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \downarrow \text{直積化} \\
 \downarrow F(4)\text{ビット化}
 \end{array}$$

定義 2次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ の2次元ファレイ図形 $F\left(\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right],\left[\frac{\beta}{\gamma}\right]\right)$ から得られる $F(4)$ ビット

値の列を $(\alpha:\beta:\gamma)$ の $F(4)$ 符号と呼ぶ.

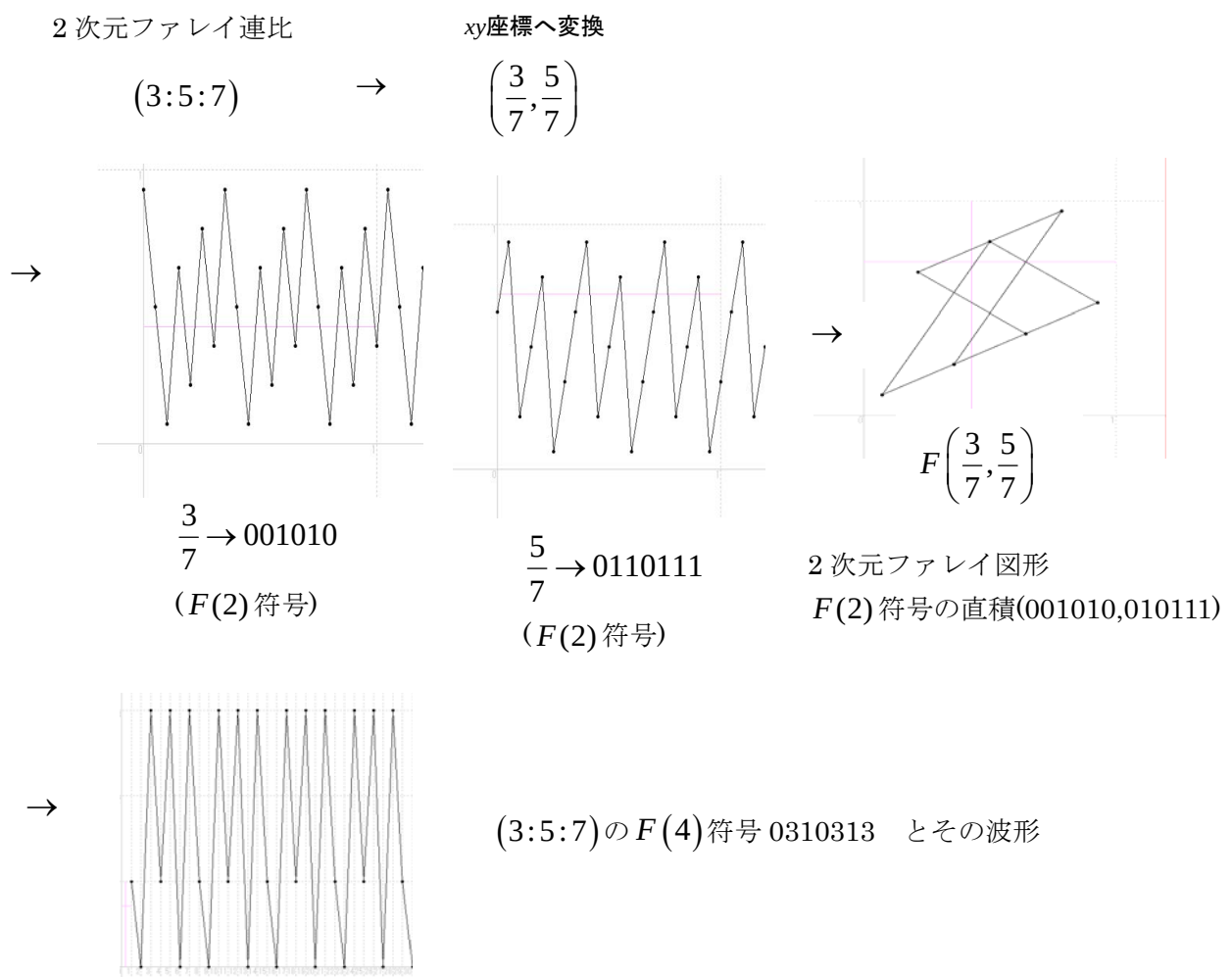
以上のことを用いて, 私達は次の主結果を示すことができた.

主結果(4) 2次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ の $F(4)$ 符号について, その周期は γ であり, $F(4)$ 符号

は $\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]$ と $\left[\frac{\beta}{\gamma}\right]$ の $F(2)$ ビット値の直積から $F(4)$ ビット値に変換して得られる.

以下の図は, 具体的な2次元ファレイ連比の $F(4)$ 符号への変換過程を表す. 他の符号もこのように

して $F(4)$ 符号に変換され, そして2次元ファレイ連比の波形を得る.



今後の展望

「神経回路モデルのカオス」という本では、離散力学系をファレイ数列から得られた符号を使って多くのモデル化の研究がなされていた。このことから、私達が得た2次元ファレイ連比によるモデル化への道筋と高次元化の研究は、より深いものへと発展させることができると考えている。

6. 参考文献

[1] 畑正義, 神経回路モデルのカオス, 朝倉書店,(1998)

[2] Arnaldo NOGUEIRA , Bruno SEVENNEC, Multidimensional Farey partitions, Indagationes Mathematicae Volume17 , Issue3 , 25 September 2006 , Pages437-456

[3] Julane Amen, Farey Sequences , Ford Circles and Pick's Theorem, DigitalCommons@University of Nebraska – Lincoln

[4] 「ファレイ数列-wikipedia」

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%83%AC%E3%82%A4%E6%95%B0%E5%88%97>(2013/4/26)