

津山代数幾何シンポジウム 2012
報告集

津山工業高等専門学校一般科目

松田研究室, 渡利研究室 編

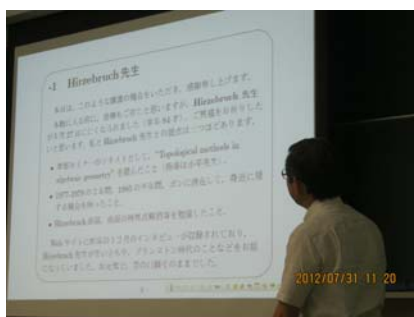
2013 年 2 月

はじめに

本論文集は、2012 年度 7 月に津山工業高等専門学校で開催した津山代数幾何シンポジウム 2012 と、12 月に学習院大学で開催した代数幾何目白セミナー2012 の講演の記録と関連論文をまとめたものです。私どもは、毎年、夏は津山代数幾何シンポジウム、冬は目白セミナーを開催し、例年ですと報告集は飯高研究室から発行されてきましたが、今回は、科学研究費、基盤研究(C)課題番号 23531232 の間接経費を使用し、松田研究室と渡利研究室から発行することとなりました。

さて、今回の津山代数幾何シンポジウム 2012 では、今年度をもって学習院大学をご退職される飯高茂先生と、同じく今年度をもって埼玉大学をご退職される酒井文雄先生から、現在の研究発表以外に、それぞれ代数幾何学に関する特別講演をしていただきました。とても楽しくそして充実した時間を持つことができ、思い出に残る会となりました。

2013 年 2 月 松田修, 渡利正弘



津山代数幾何シンポジウム 2012

— 数学教育に関する話題もあります —

日時：7月30日(月), 31日(火)

場所：津山高専, 管理・一般科目棟 3F 合併教室

世話人：松田修, 渡利正弘 (津山高専)

プログラム

7月30日(月)

午前の部 (数学教育関連)

10:20-10:50

「複素ピタゴラス数の origin について」 橘智子 (津山高専 3 年)

11:50-11:20

「 n 乗根の連分数の研究」 間庭早紀子, 丸尾優佳 (津山高専 2 年)

11:30-12:00

「あみだくじについて」 内田広子, 塩谷 祈 (広尾学園)

午後の部

13:00-13:40

「線織面の代数曲線の分類」 松田修 (津山高専)

13:50-14:30

「星配置問題について」 渡利正弘 (津山高専)

14:40-15:30

「 (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つ種数 2 の有理ファイバー曲面」 北川真也 (岐阜高専)

15:40-16:40

「代数平面曲線の不変数について」 飯高茂 (学習院大)

16:50-17:50

「The gonality of singular plane curves (revisited)」 酒井文雄 (埼玉大)

18:30- 懇親会

7月31日(火)

午前の部

9:20-10:00

「UFD 上の多項式環の整閉多項式について」 加藤雅也 (新潟大学大学院自然科学研究科)

10:10-11:00

「特異点を 2 つ持つ有理尖点平面曲線について」 戸野恵太 (埼玉大)

11:10-12:10 (特別講演)

「平面代数曲線と共に」 酒井文雄 (埼玉大)

午後の部

13:00-13:50

「偏極多様体の断面種数による分類について」 福間 慶明 (高知大)

14:00-13:50

「ガロワ点と自己同型群 (具体例を中心に)」 三浦敬 (宇部高専)

15:00-15:50

「Galois points for a singular hypersurface」 高橋剛 (長岡高専)

16:00-16:50

「Presents from Iitaka and Grothendieck」 前原和寿 (東京工芸大)

17:00-18:00 (特別講演)

「私と種数(70歳記念)」 飯高茂 (学習院大)

19:00- 食事会

代数幾何目白セミナー2012

テーマ : 代数曲線の双有理幾何と関連した話題

学習院大学理学部 南4号館 205室(中セミナー室) 2階

日時 : 2012年12月25,26日

責任者 飯高 茂 (学習院大学理学部)

プログラム

12月25日 (火)

10時-10時50分 飯高 茂 (学習院大学理学部)

Hartshorne の等式とその応用

11時00分-11時50分 前原 和寿,

After S.Mochizuki's Theories for hyperbolic orbicurves

14時00分 - 14時50分 松田 修 (津山高専)

線織面の代数曲線の分類3

15時00分 - 15時50分 北川真也 (岐阜高専),

(V) 型の特異ファイバーを3本持つ種数2の有理ファイバー曲面II

16時00分から -16時50分 王楠 (埼玉大),

On cyclic coverings of the projective line which are trigonal curves

12 月 26 日 (水)

10 時-10 時 40 分 嘉数 弥 (学習院大学理学部)

平面曲線の 2 変数第 2 不等式について

10 時 45 分-11 時 35 分 小島秀雄 (新潟大)

Normal affine surfaces with non-positive Euler characteristic

11 時 40 分-12 時 30 分 高橋剛 (長岡高専)

2 次元超曲面の非有理次数とガロワ被覆

13 時 30-14 時 20 分 月岡透 (東海大)

4 次元ファノ多様体の分類の現状と今後

世話人： 飯高 茂 (学習院大学理学部)

目次

Shigeru IITAKA — On the birational invariants k and $(2,1)$ genus of algebraic plane curves	1
酒井 文雄 — 特異平面曲線のゴナリティ再訪	71
酒井 文雄 — 平面代数曲線と共に	76
戸野 恵太 — 特異点を 2 つ持つ有理尖点平面曲線について	82
Kazuhisa MAEHARA — Wonderful Presents from Iitaka and Grothendieck	99
Hideo KOJIMA — LOCALLY FINITE ITERATIVE HIGHER DERIVATIONS ON $k[x,y]$	131
加藤 雅也, 小島 秀雄 — UFD 上の多項式環の整閉多項式について	137
福岡 慶明 — 偏極多様体の断面種数による分類	144
三浦 敬 — ガロワ点と自己同型群 (具体例を中心に)	152
北川 真也 — (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つ種数 2 の有理ファイバー曲面 I, II	163
渡利 正弘 — On the non-smoothness of Hilbert schemes of points for monomial plane curves	178
松田 修 — 線織面 X 上の] 極小曲線 C の分類	180
Nan Wangyu — On cyclic coverings of the projective line which are trigonal curves	185
塩谷 祈 — 対称群における置換の転倒数によるあみだくじの簡略化の研究	194
橘 智子 — 複素ピタゴラス数の構造について	202
丸尾 優佳, 間庭 早紀子 — 連分数を拡張させたフラクタル連分数に関する研究	212

On the birational invariants k and $(2,1)$ genus of algebraic plane curves

Shigeru IITAKA
Gakushuin University, Tokyo

January 4, 2013

Contents

1	Introduction	3
2	basic results	3
2.1	invariant $\tilde{\mathcal{Z}}$	4
2.2	invariant $\mathcal{Z}^*$	4
2.3	case when $B > 2$	4
2.4	example with $B = 3, p = 0$	6
2.5	a lemma	6
2.6	signature of $k - A$	7
3	Class I.	7
3.1	case when $\bar{g} \geq 0$	7
3.2	case when $\bar{g} = -1$	8
4	Class II.	12
4.1	case when $i = -1$	12
4.2	case when $i \geq 0$	13
4.3	case when $i = 0$	13
4.3.1	case when $g = 0$	13
4.3.2	case when $g = 1$	15
4.3.3	case when $g = 2$	16
4.3.4	case when $g = 3$	16
4.4	case when $i = 1$	16
4.4.1	case when $g = 0$	17
4.4.2	case when $g = 1$	19

4.4.3	case when $g = 2$	21
4.4.4	case when $g = 3$	22
4.4.5	case when $g = 4$	23
4.4.6	case when $g = 5$	23
4.4.7	case when $g = 6$	23
5	Class IIIa.	23
5.1	case when $i = -1$	24
5.2	case when $i = 0$	25
5.2.1	case when $g = 0$	25
5.2.2	case when $g = 1$	26
5.2.3	case when $g = 2$	27
5.2.4	case when $g = 3$	27
5.3	case when $i = 1$	27
5.3.1	case when $g = 0$	27
5.3.2	case when $g = 1$	29
5.3.3	case when $g = 2$	31
5.3.4	case when $g = 3$	32
5.3.5	case when $g = 4$	32
6	Class IIIb.	32
6.1	case when $\bar{g} = 2$	33
6.2	case when $\bar{g} = 1$	34
6.2.1	case when $\tilde{q} = 2$	34
6.3	case when $\bar{g} = 3$	36
6.3.1	case when $\tilde{q} = 1$	36
6.3.2	case when $\tilde{q} = 0$	36
6.4	case when $\bar{g} = 0$	37
6.4.1	case when $i = 1$	37
6.4.2	case when $\tilde{q} = 2$	38
6.4.3	case when $\tilde{q} = 1$	40
6.4.4	case when $\tilde{q} = 0$	40
6.4.5	case when $\mathcal{Z}^* = 0$	41
6.4.6	case when $\rho = 1$	42
6.4.7	case when $\rho = 3$	42
6.4.8	case when $\rho \geq 5$	43
6.5	case when $\bar{g} = -1, i = 0$	43
6.5.1	case when $\rho = 1$	46
6.5.2	case when $\rho = 3$	47
6.5.3	case when $\rho \geq 5$	47

6.6	case when $i = 1$	48
6.6.1	case when $\tilde{q} = 4$	48
6.6.2	case when $\tilde{q} = 3$	51
6.6.3	case when $\tilde{q} = 2$	51
6.6.4	case when $\tilde{q} = 0$	52
6.7	case when $\mathcal{Z}^* = 0$	55
6.7.1	case when $\rho = 1$	55
6.7.2	case when $\rho = 2$	56
6.7.3	case when $\rho = 3$	57
6.7.4	case when $\rho = 4$	57
6.7.5	case when $\rho \geq 5$	59
7	Hartshorne's Lemma	63
7.1	invariant ω	65
7.2	invariant α	66
7.3	A	66
7.4	A and α	67
7.5	estimates	68
8	bibliography	69

1 Introduction

2 basic results

Suppose that (S, D) is a minimal pair with $\kappa[D] = 2$, which is obtained from a # minimal pair(model) (Σ_B, C) by shortest resolution of singularities of C . The type of (Σ_B, C) is denoted by the symbol $[\sigma * e, B; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$.

Introduce innvariants Y by $Y = \sum_{j=1}^r \nu_j$ and X by $X = \sum_{j=1}^r \nu_j^2$. Moreover, defining $w = 4 - \delta_{1B}$, we get $w = 4$ if $B \neq 1$. $w = 3$, otherwise.

Proposition 1 *Suppose that $B \leq 2$. Letting k denote $wp + 2u$, we have the following fundamental equalities:*

1. $X = 8\nu_1^2 + 2k\nu_1 + \tilde{k} + \omega_1 - 2\bar{g}$,
2. $Y = 8\nu_1 + k + \omega_1$.

Here $\tilde{k} = kp - 2p^2$, $\omega_1 = \omega - \bar{g}$.

2.1 invariant $\tilde{\mathcal{Z}}$

Following Matsuda([13]), we shall compute $\nu_1 Y - X$, which we denote by $\tilde{\mathcal{Z}}$. By $\tilde{\mathcal{Z}} = \nu_1 Y - X = \sum_{j=2}^{\nu_1-1} (\nu_1 - j) j t_j \geq 0$, t_j being the number of j -ple singular points on C , we have

$$0 \leq \tilde{\mathcal{Z}} = \nu_1(\omega - \bar{g} - k) - \tilde{k} - \omega_1 + 2\bar{g}. \quad (1)$$

2.2 invariant $\mathcal{Z}^*$

Hereafter suppose that $\nu_1 \geq 3$.

Introducing invariants $\bar{\nu}_j$ and $\bar{Y}$ by $\bar{\nu}_j = \nu_j - 1$ and $\bar{Y} = \sum_{j=1}^r \bar{\nu}_j$, respectively, we obtain $\bar{Y} = Y - r$ and

$$\bar{Y} = 8\mu + k + A_1.$$

Moreover, introduce an invariant $\bar{X}$ by

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^r \bar{\nu}_j^2 = X - 2Y + r,$$

which satisfies that

$$\bar{X} = 8\mu^2 + 2k\mu + \tilde{k} - A_1 - 2\bar{g}.$$

Here, for simplicity, let μ stand ν_1 . Thus $\mu \geq 2$.

2.3 case when $B > 2$

However, if $B > 2$, we have fundamental equalities :

1. $\bar{Y} = B_2\sigma + 8\mu + k + A_1$,
2. $\bar{X} = B_2\sigma(\sigma - 2) + 8\mu^2 + 2k\mu + \tilde{k} - A_1 - 2\bar{g}$,

where $B_2 = B - 2$ for $B \geq 2$. Moreover, if $B \leq 2$, we put $B_2 = 0$.

Defining an invariant $\mathcal{Z}^*$ to be $\mu\bar{Y} - \bar{X}$, we obtain

$$-\mu k - \tilde{k} + \nu_1 A_1 + 2\bar{g} - B_2\sigma(\sigma - 2 - \mu) = \mathcal{Z}^*$$

and

$$\mathcal{Z}^* = \sum_{j=2}^{\nu_1-1} (\nu_1 - j)(j - 1)t_j.$$

Note:

$$\mathcal{Z}^* = (\mu - 1)y_1 + 2(\mu - 2)y_2 + 3(\mu - 3)y_3 + \dots \geq 0,$$

where $y_1 = t_2 + t_\mu, y_2 = t_3 + t_{\mu-1}, y_3 = t_4 + t_{\mu-2}, \dots$.

Moreover, we get

$$B_2\sigma(\sigma - 2 - \mu) \leq -\mu k - \tilde{k} + \nu_1 A_1 + 2\bar{g}.$$

Proposition 2 *If $B \geq 3$, then*

$$\sigma(\sigma - 2 - \mu) \leq \nu_1 A_1 + 2\bar{g} - \mu k - \tilde{k}. \quad (2)$$

Suppose that $p > 0$. Then $\sigma - 2 - \mu \geq 1 + 2(\mu + 1) - 2 - \mu = 1 + \mu$ and $\tilde{k} - k \geq -2$. Hence,

$$\sigma(\mu + 1) \leq \sigma(\sigma - 2 - \mu) \leq \nu_1 A_1 + 2\bar{g} - \mu k - \tilde{k}.$$

However,

$$\nu_1 A_1 + 2\bar{g} - \mu k - \tilde{k} = (\mu + 1)A - (\mu + 1)k + (1 - \mu)\bar{g} - \tilde{q},$$

where $\tilde{q} = \tilde{k} - k \geq -2$.

Therefore

$$\sigma(\mu + 1) \leq (\mu + 1)(A - k) + (1 - \mu)\bar{g} + 2.$$

If $\bar{g} \geq 0$, then $(\sigma - (A - k))(\mu + 1) \leq 2$. Hence, $\sigma \leq A - k$.

If $\bar{g} = -1$, then

$$\sigma(\mu + 1) \leq (\mu + 1)(A - k) + \mu + 1 = (\mu + 1)(A - k + 1)$$

Hence, $\sigma \leq A - k + 1$.

By $\mu \geq 2$, we get $\sigma \geq 7$ and so $k + 6 \leq A$. Thus we obtain the next result.

Proposition 3 *If $B \geq 3$ and $p > 0$, then $\sigma + k - 1 \leq A$.*

In particular, $k + 6 \leq A$.

2.4 example with $B = 3, p = 0$

Suppose that $B = 3, g = 0, p = 0, \mu \geq 2$ and $\mathcal{Z}^* = 0$. Then $\sigma = 2\mu + 2$ and

1. $\bar{Y} = \sigma + 8\mu + k + A + 1,$
2. $\bar{X} = \sigma(\sigma - 2) + 8\mu^2 + 2k\mu - A + 1.$

Therefore, $\mathcal{Z}^* = -2(\mu + 1)\mu - k\mu + A(\mu + 1) + \mu - 1$ and $\bar{Y} = r\mu$. Hence, $\rho\mu = k + A + 2\mu + 3$. Thus,

$$A = \rho\mu - (k + 2\mu + 3). \quad (3)$$

Moreover, by $\mathcal{Z}^* = 0$ we get

1. $2(\mu + 1)\mu = -k\mu + A(\mu + 1) + \mu - 1,$
2. $\rho\mu^2 = k\mu + A\mu + 2\mu^2 + 3\mu.$

These imply

$$\rho\mu^2 = A(2\mu + 1) + 2\mu - 1 = (A + 1)(2\mu + 1) - 2.$$

Letting $f = \mu^2, h = 2\mu + 1$, we obtain $-2 = \rho f - (A + 1)h$ and by definition, $1 = 4f + (1 - 2\mu)h$. Hence, the ideal (f, h) generated by f and h coincides with the ring $\mathbb{Z}[\mu]$. In this case, we say that f and h are **relatively prime**.

2.5 a lemma

In general, we have the following result.

Lemma 1 *Let R be a commutative ring. Suppose that there exist elements f and h which are relatively prime. In other words, there exist $u, v \in R$ such that $1 = uf + vh$.*

If $Pf = Qh$ for some $P, Q \in R$, then there exists $L \in R$ such that $P = hL$ and $Q = fL$.

Proof. From $uPf = uQh$, it follows that $uQh = Puf = P(1 - vh)$. Hence, $P = uQh + vhP$. Thus, $P = hL$, where $L = Qu + Pv$.

2.6 signature of $k - A$

Recalling that $2 = 8f + 2(1 - 2\mu)h$ and $-2 = \rho f - (A + 1)h$, we get

$$(\rho + 8)f = (A + 4\mu - 1)h.$$

Since f and h are relatively prime, it follows that $\rho = -8 + hL$, and $A = 1 - 4\mu + fL$ for some L . Then $r = \rho + 8 = hL = (2\mu + 1)L$.

By $k = \rho\mu - 2\mu - 3 - A$, we obtain

$$2u = k = -6\mu - 4 + (\mu + 1)\mu L.$$

On the other hand, given $\mu \geq 2$ and L , let $\sigma = 2\mu + 2$, $u = -3\mu - 2 + (\mu + 1)\mu L/2$ and $e = 3\sigma + u$. Further, let $r = (2\mu + 1)L$ and $\nu_1 = \mu + 1$.

The type becomes $[(2\mu + 2) * (6\mu + 6 + u), 3; (\mu + 1)^{(2\mu+1)L}]$. Then $\tilde{B} = 2e - 3\sigma = 2 + (\mu + 1)\mu L$.

The virtual genus g_0 becomes $(2\mu + 1)\mu(\mu + 1)L/2$. Hence, $g = g_0 - (\mu + 1)\mu(2\mu + 1)L/2 = 0$.

By definition, $Z_0^2 = (\sigma - 2)(\tilde{B} - 4) = -4\mu + 2\mu^2(\mu + 1)L$ and $Z^2 = Z_0^2 - r\mu^2 = -4\mu + \mu^2 L$. Hence, $A = 1 - 4\mu + \mu^2 L$, $k = 2u = -6\mu - 4 + (\mu + 1)\mu L$. Then $-k\mu + A(\mu + 1) = \mu(2\mu + 1) + 1$. Hence, $k - A = \mu L - 2\mu - 5$. The value of $k - A$ may be positive or negative.

3 Class I.

Class I. We say that the type belongs to Class I, if $p = 0$.

In this class, $\tilde{k} = 0$ and

$$\mathcal{Z}^* = -k\mu + (\mu + 1)A + (1 - \mu)\bar{g}.$$

3.1 case when $\bar{g} \geq 0$

Suppose that $\bar{g} \geq 0$. Then since $\nu_1 \geq 3$ and $\mathcal{Z}^* \geq 0$, it follows that

$$k\mu \leq (\mu + 1)A + (1 - \mu)\bar{g} \leq (\mu + 1)A.$$

Thus

$$k \leq \frac{\mu + 1}{\mu} A.$$

Moreover, assume that $k = \frac{\mu + 1}{\mu} A$.

Then $g = 1$ and so $\mathcal{Z}^* = -k\mu + (\mu + 1)A = 0$.

Hence, by $\bar{Y} = 8\mu + k + A - \bar{g} = 8\mu + k + A = r\mu$, we obtain

$$\rho\mu = k + A.$$

Here, $\rho = r - 8$. Since $\mu k = (\mu + 1)A$, it follows that

$$\rho\mu(\mu + 1) = k(\mu + 1) + A(\mu + 1) = k(2\mu + 1). \quad (4)$$

Letting $f_0 = \mu(\mu + 1)$, $h = 2\mu + 1$, we obtain $\rho f_0 = kh$. Further, $2f_0 - \mu h = \mu$ and $h - 2\mu = 1$. Hence, $1 = h - 2(2f_0 - \mu h) = -4f_0 + (1 + 2\mu)h$. Thus, f_0 and h are relatively prime. Moreover, $\rho f_0 = kh$. Therefore, by the previous lemma, $\rho = hL$ and $k = f_0L$ for some L . Hence, $\rho = (2\mu + 1)L$ and $k = \mu(\mu + 1)L$.

Conversely, given $\mu \geq 2$ and L , let $\nu_1 = \mu + 1$ and $\sigma = 2\nu_1$.

For $B = 1$, put $e = 3\nu_1 + \mu(\mu + 1)L/2$ and $r = 8 + (2\mu + 1)L$. The type turns out to be

$$[2(\mu + 1) * (3(\mu + 1) + \mu(\mu + 1)L/2), 1; (\mu + 1)^r].$$

Then $u = \mu(\mu + 1)L/2$, $k = 2u$ and $g = 1$.

If $B = 0$, put $e = 2\nu_1 + \mu(\mu + 1)L/2$ and $r = 8 + (2\mu + 1)L$. The type turns out to be

$$[2(\mu + 1) * (2(\mu + 1) + \mu(\mu + 1)L/2); (\mu + 1)^r].$$

Then $u = \mu(\mu + 1)L/2$, $k = 2u$, $g = 1$.

If $\mu = 2$, $B = 1$ then the type turns out to be $[6 * (9 + 3L), 1; 3^{8+5L}]$.

If $\mu = 3$, $B = 1$ then the type is as follows: $[8 * (12 + 7L), 1; 3^{8+7L}]$.

Conversely, if the type of the pair is this, then $g = 5 \cdot (5 + 3L) - 3(8 + 5L) = 1$ and $A = Z^2 = 8 \cdot (4 + 3L) - 4 \times (8 + 5L) = 4L$. $k = 2(3L) = 6L$. Hence, $2k = 3A = 12L$.

3.2 case when $\bar{g} = -1$

Supposing that $g = 0$, we obtain

$$\mathcal{Z}^* = -k\mu + (\mu + 1)A + \mu - 1.$$

Then since $\nu_1 \geq 3$ and $\mathcal{Z}^* \geq 0$, it follows that

$$\mu k \leq (\mu + 1)A + \mu - 1. \quad (5)$$

Hence,

$$k \leq \frac{\mu + 1}{\mu}A + 1 - \frac{1}{\mu}.$$

If $k\mu = (\mu + 1)A + \mu - 1$ then $\mathcal{Z}^* = 0$; thus $\overline{Y} = 8\mu + k + A + 1 = r\mu$. Hence,

$$\rho\mu = k + A + 1.$$

Since $k\mu = (\mu + 1)A + \mu - 1$, it follows that

$$\rho\mu(\mu + 1) = k(\mu + 1) + A(\mu + 1) + \mu + 1 = k(2\mu + 1) + 2. \quad (6)$$

Letting $f_0 = \mu(\mu + 1)$, $h = 2\mu + 1$, we obtain

$$\rho f_0 = kh + 2$$

and

$$2f_0 - h\mu = \mu.$$

Hence,

$$1 = h - 2\mu = h - 2(2f_0 - h\mu) = -4f_0 + (1 + 2\mu)h.$$

Combining this with the equation (6), we obtain

$$(\rho + 8)f_0 = (2 + 4\mu + k)h.$$

Therefore, by the previous lemma,

$$r = \rho + 8 = hL, 2 + 4\mu + k = f_0L$$

for some integer L . Hence,

$$u = \frac{k}{2} = \frac{f_0L}{2} - 1 - 2\mu.$$

On the other hand, given $\mu \geq 2$ and L , let $\nu_1 = \mu + 1$, $\sigma = 2\mu + 2$, $e = 3\nu_1 + u$, where $u = \frac{\mu(\mu+1)L}{2} - 1 - 2\mu$, for some L .

Moreover, in the case when $B = 1$, letting $r = (2\mu + 1)L$, define the type to be $[(2\mu + 2) * (3\mu + 3 + u), 1; (\mu + 1)^{(2\mu+1)L}]$.

Then $\tilde{B} = 2 + \mu(\mu + 1)L$ and the virtual genus $g_0 = \mu(\mu + 1)(2\mu + 1)L/2$.
 $g = 0$, $k = 2u$ and $Z^2 = \mu^2L - 4\mu$.

In the case when $B = 0$, letting $r = (2\mu + 1)L$, define the type to be $[(2\mu + 2) * (2\mu + 2 + u); (\mu + 1)^{(2\mu+1)L}]$.

Then $\tilde{B} = 2 + \mu(\mu + 1)L$. Furthermore, $g = 0$, $k = 2u$ and $Z^2 = \mu^2L - 4\mu$.

In both cases, we obtain $A = \mu^2L - 4\mu + 1$ and $k = 2u = \mu(\mu + 1)L - 2 - 4\mu$.
Thus $k\mu = (\mu + 1)A + \mu - 1$.

This completes the proof of the following result.

Proposition 4 *Suppose that $p = 0$. Then*

$$k \leq \frac{\mu + 1}{\mu}A + 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Moreover, $k\mu = (\mu + 1)A + \mu - 1$ if and only if the type is $[(2\mu + 2) * (3\mu + 3 + u), 1; (\mu + 1)^{(2\mu+1)L}]$ or $[(2\mu + 2) * (2\mu + 2 + u); (\mu + 1)^{(2\mu+1)L}]$, where $u = \frac{\mu(\mu+1)L}{2} - 1 - 2\mu$ for some L .

Moreover, if $\mathcal{Z}^* \neq 0$ then $\mathcal{Z}^* \geq \mu - 1$. Hence, $k\mu \leq (\mu + 1)A$.

Proposition 5 *Suppose that $g = 0$ and $p = 0$. If $k\mu < (\mu + 1)A + \mu - 1$, then $k\mu \leq (\mu + 1)A$.*

Furthermore, suppose that $k\mu = (\mu + 1)A$. Then $\mathcal{Z}^* = \mu - 1$, which implies $y_1 = t_2 + t_\mu = 1$. Therefore, we have two cases 1) $t_\mu = 0, t_2 = 1$ and 2) $t_\mu = 1, t_2 = 0$.

Note that

$$\overline{Y} = 8\mu + k + A + 1 = t_2 + (\mu - 1)t_\mu + (r - 1)\mu = 1 + (\mu - 2)t_\mu + (r - 1)\mu.$$

1) If $t_\mu = 0$ then $(\rho - 1)\mu = k + A$. Hence, $(\rho - 1)\mu(\mu + 1) = k(\mu + 1) + A(\mu + 1) = k(2\mu + 1)$.

Since $2\mu + 1$ and $\mu(\mu + 1)$ are relatively prime, it follows that $\rho - 1 = (2\mu + 1)L$ and $k = \mu(\mu + 1)L$ for some L . Thus $r = 9 + (2\mu + 1)L$.

The type turns out to be

$$[2(\mu + 1) * 3(\mu + 1) + \mu(\mu + 1)L/2, 1; 3^r, 2], r = 8 + (2\mu + 1)L.$$

2) If $t_\mu = 1$ then $\mu > 2$ and $(\rho-1)\mu = k+A-(\mu-2)$. Thus $\rho\mu = k+A+2$, and

$$\rho\mu(\mu+1) = k(\mu+1) + A(\mu+1) + 2(\mu+1) = (1+k)(2\mu+1) + 1.$$

For example, if $\mu = 2, B = 1$ then the type turns out to be $[6 * (10 + 3L), 1; 3^{10+5L}]$.

4 Class II.

Class II.

We say that the type belongs to Class II, if $p = 1$.

In this class $p = 1$, $k = w + 2u$ and $\tilde{k} = k - 2$ and

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{Z}^* &= -k\mu + \nu_1 A + (1 - \mu)\bar{g} - \tilde{k} \\ &= -k\mu + \nu_1 A + (1 - \mu)\bar{g} + 2 - k \\ &= \nu_1(A - k) + (2 - \nu_1)\bar{g} + 2. \end{aligned}$$

Hence,

$$k \leq A + \frac{(2 - \nu_1)\bar{g} + 2}{\nu_1}. \quad (7)$$

Thus we obtain the next result.

1. If $g > 0$, then $k \leq A$,
2. If $g = 0$, then $k \leq A + 1$.

By i we denote $A - k$. Then $i \geq -1$. Moreover,

$$\mathcal{Z}^* = i\nu_1 + (2 - \nu_1)\bar{g} + 2 = i(\mu + 1) + (1 - \mu)\bar{g} + 2. \quad (8)$$

4.1 case when $i = -1$

Assume that $k = A + 1$. Then $g = 0$ and $\mathcal{Z}^* = 0$. Moreover, $\bar{Y} = 8\mu + k + A + 1 = 8\mu + 2k = r\mu$.

Hence, $\rho\mu = 2k = 2(w + 2u)$, where $w = 3$ or 4 .

Assume $B = 1$. Then $w = 3$ and $k = 3 + 2u$. Further, $\sigma = 2\mu + 3$, $e = 3\mu + 4 + u$, $r = \rho + 8$

Here are many examples.

For example, if $\rho = 1$, then

$$\mu = 2(3 + 2u) = 6 + 4u.$$

Thus $\nu_1 = 7 + 4u$, $\sigma = 15 + 8u$, $e = 22 + 13u$. Therefore, the type becomes $[(15 + 8u) * (22 + 13u), 1; (7 + 4u)^9]$.

If $\rho = 2$, then $r = 10$ and by $\mu = 3 + 2u$, we obtain $\nu_1 = 4 + 2u, \sigma = 9 + 4u, e = 13 + 7u$. Therefore, the type becomes $[(9+4u)*(13+7u), 1; (4+2u)^{10}]$.

If $\rho = 3$, then $r = 11$ by $3\mu = 6 + 4u$ we get $3(\mu - 2) = 4u$ and so $\mu - 2 = 4L$ and $u = 3L$ for some integer L . Therefore, the type turns out to be $[(7 + 8L) * (10 + 15L), 1; (3 + 4L)^{11}]$.

If $\rho = 4$, then $4\mu = 6 + 4u$, which has no solution.

If $\rho = 5$, then $r = 13$ by $5\mu = 6 + 4u$ we get $5(\mu - 2) = 4(u - 1)$. Thus $\mu = 2 + 4L, u = 1 + 5L$.

Therefore, the type turns out to be $[(7 + 8L) * (11 + 17L), 1; (3 + 4L)^{13}]$. And so on.

4.2 case when $i \geq 0$

If $k \leq A$ then $i = A - k \geq 0$. Moreover,

$$\mathcal{Z}^* = \mu(i - \bar{g}) + i + \bar{g} + 2,$$

and

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k + i = 8\mu + 2w + 4u + i.$$

4.3 case when $i = 0$

Suppose that $i = 0$; hence $k = A$ and

$$\mathcal{Z}^* = (1 - \mu)\bar{g} + 2. \tag{9}$$

Thus, $(1 - \mu)\bar{g} + 2 \geq 0$ induces that $g \leq 3$.

4.3.1 case when $g = 0$

Assume that $g = 0$. Then

$$\mathcal{Z}^* = \mu + 1.$$

From $2(\mu - 2) = 2\mu - 4 \leq \mathcal{Z}^* = \mu + 1$, it follows that $\mu \leq 5$.

$$\mu = 5$$

Suppose that $\mu = 5$. Then $\nu_1 = 6, \sigma = 12 + 1 = 13$. Moreover, $\mathcal{Z}^* = 6$ and by definition $\mathcal{Z}^* = 4y_1 + 6y_2$.

From $4y_1 + 6y_2 = 6$, it follows that $y_1 = 0, y_2 = 1$. Hence, $y_2 = t_3 = 1$. Furthermore,

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = (r - 1) \cdot \mu + 2.$$

Thus

$$5(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 2k - 1. \quad (10)$$

Assume that $B = 1$.

Since $k = 3 + 2u$, we obtain

$$5 \cdot (\rho - 1) = 7 + 4u - 2 = 5 + 4u.$$

Thus $5 \cdot (\rho - 2) = 4u$. Hence, $\rho - 2 = 4L$ and $u = 5L$ for some L . $\rho = 4L + 2$ and $u = 5L$ for some L . Then $r = 10 + 4L$ and so the type becomes $[13 * (19 + 5L), 1; 6^{9+4L}, 3]$.

Assume that $B = 0$. Then $k = 4 + 2u, 5(\rho - 4) = 4(u - 2)$; hence, $\rho - 4 = 4L, u - 2 = 5L$ and the type becomes $[13 * (15 + 5L); 6^{11+4L}, 3]$.

$$\mu = 4$$

From $\mathcal{Z}^* = \mu + 1 = 5$, it follows that $\mathcal{Z}^* = 3y_1 + 4y_2 = 5$. We have no solution.

$$\mu = 3$$

Suppose that $\mu = 3$. Then $\nu_1 = 4, \sigma = 8 + 1 = 9$. Moreover, $\mathcal{Z}^* = 4$ and by definition $\mathcal{Z}^* = 2y_1$. From $y_1 = 2$, it follows that $y_1 = t_2 + t_3 = 2$. Furthermore,

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = (r - 1) \cdot \mu + t_2 + 2t_3.$$

Thus

$$3(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 2k + 1 - (t_2 + 2t_3) = 2k - 1 - t_3, \quad (11)$$

where $t_3 = 0, 1, 2$.

Assume that $B = 1$. Then $e = \sigma + 4 + u$. Since $k = 3 + 2u$, we obtain

$$3(\rho - 1) = 5 + 4u - t_3.$$

If $t_3 = 0$ then $3(\rho - 1) = 5 + 4u$. Since $3(\rho - 5) = 4(u - 1)$, it follows that $u = 1 + 3L$ and $\rho = 5 + 4L$ for some L .

The type becomes $[9 * (13 + 3L), 1; 4^{11+4L}, 2^2]$.

If $t_3 = 1$ then $3(\rho - 2) = 4u + 4$. It follows that $u = 3L - 1$ and $\rho = 2 + 4L$ for some L .

The type becomes $[9 * (12 + 3L), 1; 4^{8+4L}, 2^2]$.

If $t_3 = 0$ then $3(\rho - 2) = 4u + 3$. Since $3(\rho - 3) = 4u$ it follows that $u = 3L$ and $\rho = 2 + 4L$ for some L .

The type becomes $[9 * (13 + 3L), 1; 4^{9+4L}, 3^2]$.

Assume that $B = 0$. Then $e = \sigma + u$.

Omitted.

$\mu = 2$

Suppose that $\mu = 2$. Then $\nu_1 = 3$, $\sigma = 6 + 1 = 7$. Moreover, $\mathcal{Z}^* = 2 + 1 = 3$ and by definition $\mathcal{Z}^* = y_1$. From $y_1 = 2$, it follows that $y_1 = t_2 = 3$. Furthermore,

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = (r - 3) \cdot \mu + 3.$$

Thus

$$3(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 2k + 1 - 3. \quad (12)$$

Assume that $B = 1$. Then $e = \sigma + 3 + u$. Since $k = 3 + 2u$, it follows that $2(\rho - 3) = 4u + 4$. Thus $\rho - 3 = 4L$, $u + 1 = 2L$ for some L . Hence, the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{10+2u}, 2^2]$.

4.3.2 case when $g = 1$

Assume that $g = 1$. Then $k = A$ and $\bar{g} = 1$; hence, $\mathcal{Z}^* = 2$.

By $2 = \mathcal{Z}^* \geq \mu - 1$, we obtain $\mu \leq 3$.

$\mu = 3$

Then $2 = \mathcal{Z}^* = 2(t_2 + t_3)$, which implies that $t_2 + t_3 = 1$, where $t_3 \leq 1$.

By $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = (r - 1)\mu + t_2 + 2t_3 = (r - 1)\mu + 1 + t_3$, we obtain

$$3(\rho - 1) = (\rho - 1)\mu = 2k - 1 - t_3.$$

By $p = 1$ we get $k = w + 2u$.

Suppose that $B = 1$. Then $w = 3$ and

$$3(\rho - 1) = (\rho - 1)\mu = 2(3 + 2u) - 1 - t_3 = 5 + 4u - t_3.$$

If $t_3 = 0$ then $3(\rho - 1) = 5 + 4u$; thus $3(\rho - 4) = 4(u - 1)$. Hence, $u = 1 + 3L$, $\rho = 4 + 4L$.

If $t_3 = 0$ then $3(\rho - 2) = 4u + 3$. Since $3(\rho - 3) = 4u$ it follows that $u = 3L$ and $\rho = 2 + 4L$ for some L .

The type becomes $[9 * (14 + 3L), 1; 4^{9+4L}, 2]$.

If $t_3 = 1$ then $3(\rho - 2) = 4u + 4$. Hence, $u = 3L - 1$ and $\rho = 1 + 4L$ for some L .

The type becomes $[9 * (12 + 3L), 1; 4^{8+4L}, 3]$.

$$\mu = 2$$

Then $2 = \mathcal{Z}^* = t_2$, which implies that $t_2 = 2$.

By $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = (r - 2)\mu + 2$, we obtain

$$2(\rho - 2) = (\rho - 2)\mu = 2k - 2.$$

Thus $\rho - 2 = k - 1 = w + 2u - 1$.

If $B = 1$ then $\rho = 3 + 2u + 1$; hence, $r = 12 + 2u$. The type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{10+2u}, 2^2]$.

4.3.3 case when $g = 2$

Assume that $g = 2$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 3 - \mu.$$

By $\mathcal{Z}^* \geq 0$, we get $\mu \leq 3$.

If $\mu = 3$ then $\mathcal{Z}^* = 0$ and $3\rho = 2k - 1$.

It is easy to see that when $B = 1$, the type becomes $[9 * (14 + 3L), 1; 4^{11+4L}]$ for some $L \geq 0$.

Similarly, if $\mu = 2$ then $\mathcal{Z}^* = 1$ and $\rho = k$.

It is easy to see that when $B = 1$, the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{10+2u}, 2]$ for some $u \geq 0$.

4.3.4 case when $g = 3$

Assume that $g = 3$. Then $\mu = 2$ and $\sigma = 7$. Thus, $\mathcal{Z}^* = (1 - \mu)2 + 2 = 0$. Hence, if $B = 1$ then the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{10+2u}]$ for some $u \geq 0$.

4.4 case when $i = 1$

Suppose that $A = k + 1$. Then

$$0 \leq \mathcal{Z}^* = \mu(1 - \bar{g}) + 3 + \bar{g}.$$

Thus,

$$\bar{g} \leq \frac{\mu + 3}{\mu - 1} = 1 + \frac{4}{\mu - 1} \leq 5.$$

4.4.1 case when $g = 0$

Assume that $g = 0$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu + 2.$$

By $\mathcal{Z}^* = 2\mu + 2 \geq 3\mu 9$, we get $\mu \leq 11$.

$$\mu = 11$$

Suppose that $\mu = 11$. Then $\nu_1 = 12$, $\sigma = 25$ and

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu + 2 = 24, \mathcal{Z}^* = 10y_1 + 18y_2 + 24y_3 + \dots.$$

Hence, $y_1 = y_2 = 0, y_3 = t_4 + t_9 = 1$ and we obtain

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 2 = (r - 1) \cdot \mu + 3t_4 + 8t_9.$$

Thus,

$$11(\rho - 1) = 2k + 2 - 3 - 5t_9.$$

Assume that $B = 1$. Then $e = \sigma + 12 + u$.

If $t_9 = 1$ then $2k + 2 - 3 - 5t_9 = 8 + 4u - 8 = 4u$. From $11(\rho - 1) = 4u$, it follows that $u = 11L, \rho = 1 + 4L$. Hence, the type becomes $[25 * (37 + 11L), 1; 12^{8+4L}, 9]$.

If $t_4 = 1$ then $2k + 2 - 3 - 5t_9 = 5 + 4u$. From $11(\rho - 1) = 45 + u$, it follows that $u = 7 + 11L, \rho = 4 + 4L$. Hence, the type becomes $[25 * (44 + 11L), 1; 12^{11+4L}, 4]$.

$$\mu = 7$$

Suppose that $\mu = 7$. Then $\nu_1 = 8$ and $\sigma = 17$.

$$\mathcal{Z}^* = 16, \mathcal{Z}^* = 6y_1 + 10y_2 + 12y_3 + \dots.$$

Hence, $y_1 = y_2 = 1, y_3 = 0$ and we obtain $t_2 + t_7 = t_3 + t_6 = 1$. Therefore,

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 2 = (r - 2)\mu + t_2 + 6t_7 + 2t_3 + 5t_6.$$

Thus

$$7(\rho - 2) = 2k - 1 - 3t_6 - 5t_7 = .$$

Assuming $B = 1$, we get $k = 3 + 2u, e = 17 + 8 + u$. Hence,

$$7(\rho - 2) = 5 + 4u - 3t_6 - 5t_7.$$

If $t_6 = t_7 = 0$ then $7(\rho - 2) = 5 + 4u$. By $7(\rho - 5) = 4(u - 4)$ we obtain $\rho = 5 + 4L, u = 4 + 7L$. Hence, the type becomes $[17 * (25 + 11L), 1; 8^{11+4L}, 3, 2]$.

If $t_6 = 0, t_7 = 1$ then $7(\rho - 2) = 4u$. We obtain $\rho = 2 + 4L, u = 7L$. Hence, the type becomes $[17 * (25 + 11L), 1; 8^{8+4L}, 7, 3]$.

$$\mu = 5$$

Suppose that $\mu = 5$. Then $\nu_1 = 6$ and $\sigma = 13$.

$$\mathcal{Z}^* = 12, \mathcal{Z}^* = 4y_1 + 6y_2.$$

Hence, 1) $y_1 = 3, y_2 = 0$ or 2) $y_1 = 0, y_2 = 2$.

1). $y_1 = t_2 + t_5 = 3, y_2 = t_3 + t_4 = 0$.

Therefore,

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 2 = (r - 3)\mu + t_2 + 4t_5.$$

Thus

$$5(\rho - 3) = 2k - 1 - 3t_5.$$

Assuming $B = 1$, we get $k = 3 + 2u, e = 13 + 5 + u$. Hence,

$$7(\rho - 2) = 5 + 4u - 3t_5.$$

If $t_5 = 0$ then $t_2 = 3$ and $5(\rho - 2) = 2 + 4u$. By $5(\rho - 5) = 4(u - 2)$ we obtain $\rho = 5 + 4L, u = 2 + 5L$. Hence, the type becomes $[13 * (21 + 5L), 1; 6^{10+4L}, 5, 2^2]$.

If $t_5 = 1$ then $t_2 = 2$ and $5(\rho - 2) = 2 + 4u$. By $5(\rho - 5) = 4(u - 2)$ we obtain $\rho = 5 + 4L, u = 2 + 5L$. Hence, the type becomes $[13 * (21 + 5L), 1; 6^{10+4L}, 5, 2^2]$.

If $t_5 = 2$ then $t_2 = 1$ and $5(\rho - 3) = 4u - 1$. By $5(\rho - 2) = 4(u + 1)$ we obtain $\rho = 2 + 4L, u = 5L - 1$. Hence, the type becomes $[13 * (12 + 5L), 1; 6^{7+4L}, 5^2, 2], L > 0$

If $t_5 = 3$ then $t_2 = 0$ and $5(\rho - 3) = 4u - 4$. Hence, the type becomes $[13 * (20 + 5L), 1; 6^{8+4L}, 5^3]$.

$$\mu = 4$$

Suppose that $\mu = 4$. Then $\nu_1 = 5$ and $\sigma = 11$.

$$\mathcal{Z}^* = 10, \mathcal{Z}^* = 3y_1 + 4y_2.$$

Then $y_1 = 2, y_2 = 1$.

Hence, the type becomes $[11 * (16 + u), 1; 5^{9+u}, 3, 2^2]$.

$$\mu = 3$$

Suppose that $\mu = 3$. Then $\nu_1 = 4$ and $\sigma = 9$.

$$\mathcal{Z}^* = 8, \mathcal{Z}^* = 2y_1.$$

Thus, $y_1 = t_2 + t_3 = 4$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 2 = (r - 4)\mu + t_2 + 2t_3 = (r - 4)\mu + 4 + t_3.$$

Thus

$$4(\rho - 4) = 2k - 2 - t_3.$$

If $B = 1$ then $k = 3 + 2u$ and $4(\rho - 4) = 4u + 4 - t_3$.

$$\mu = 2$$

Suppose that $\mu = 2$. Then $\nu_1 = 3$ and $\sigma = 7$.

$$\mathcal{Z}^* = 6, \mathcal{Z}^* = y_1 = t_2.$$

Hence, the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{9+2u}, 2^6]$.

4.4.2 case when $g = 1$

Assume that $g = 1$.

$$\mathcal{Z}^* = \mu + 3.$$

By $\mu + 3 = \mathcal{Z}^* \geq 2\mu - 4$, we obtain $\mu \leq 7$.

$$\mu = 7$$

Then $\mathcal{Z}^* = 10 = 6y_1 + 10y_2, y_2 = t_3 + t_6 = 1$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 2t_3 + 5t_6 + (r - 1)\mu = 2 + 3t_6 + (r - 1)\mu.$$

Hence,

$$7(\rho - 1) = 2k - 1 - 3t_6 = 2(3 + 2u) - 1 - 3t_6 = 5 + 4u - 3t_6. \quad (13)$$

We have the following two cases:

1) $t_6 = 0$.

Then $t_3 = 1$ and $7(\rho - 4) = 4(u - 4)$. Thus, $\rho - 4 = 4L, u - 4 = 7L$.

Therefore, the type becomes $[17 * (29 + 7L), 1; 8^{11+4L}, 3]$.

2) $t_6 = 1$.

Then $t_3 = 0$ and $7(\rho - 3) = 4(u - 3)$. Thus, $\rho - 3 = 4L, u - 3 = 7L$.
Therefore, the type becomes $[17 * (28 + 7L), 1; 8^{10+4L}, 6]$.

$$\mu = 6$$

Then $\mathcal{Z}^* = 9 = 5y_1 + 8y_2 + 9y_3, y_3 = t_4 = 1$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 3 + (r - 1)\mu.$$

Hence,

$$6(\rho - 1) = \mu(\rho - 1) = 2k - 2 = 4(u + 1). \quad (14)$$

Therefore, $\rho - 1 = 2L, u + 1 = 3L$ for some L .

The type becomes $[15 * (21 + 3L), 1; 7^{8+2L}, 4]$.

$$\mu = 5$$

Then $\mathcal{Z}^* = 8 = 4y_1 + 6y_2, y_1 = t_2 + t_5 = 2$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 2 + 3t_5 + (r - 2)\mu.$$

Hence,

$$5(\rho - 2) = \mu(\rho - 2) = 5 + 4u - 3t_5. \quad (15)$$

$$t_5 = 0$$

Then $t_2 = 2$ and $5(\rho - 3) = 4u$. Thus, $\rho - 3 = 4L, u = 5L$.

Therefore, the type becomes $[13 * (19 + 5L), 1; 6^{9+4L}, 2^2]$.

$$t_5 = 1$$

Then $t_2 = 1$ and $5(\rho - 2) = 2 + 4u$. Thus, $\rho - 4 = 4L, u = 2 + 5L$.

Therefore, the type becomes $[13 * (21 + 5L), 1; 6^{10+4L}, 5, 2]$.

$$t_5 = 2$$

Then $t_2 = 0$ and $5(\rho - 2) = 4u - 1$. Thus, $\rho - 5 = 4L, u = 4 + 5L$.

Therefore, the type becomes $[13 * (23 + 5L), 1; 6^{11+4L}, 5^2]$.

$$\mu = 4$$

Then $\mathcal{Z}^* = 7 = 3y_1 + 4y_2, y_1 = t_2 + t_4 = y_2 = t_3 = 1$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 3 + 2t_4 + (r - 2)\mu = 3.$$

Hence,

$$4(\rho - 2) = \mu(\rho - 2) = 2k - 2 - 2t_4 = 4 + 4u - 2t_4. \quad (16)$$

$$t_4 = 0$$

Then $t_2 = 1$ and $\rho - 2 = u + 1$. Thus, $\rho = u + 11, e = 16 + u$.

Therefore, the type becomes $[11 * (16 + u), 1; 5^{u+9}, 3, 2]$.

The case when $t_4 = 1$ does not occur.

$$\mu = 3$$

Then $\mathcal{Z}^* = 6 = 2y_1, y_1 = t_2 + t_3 = 3$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = t_2 + 2t_3 + (r - 3)\mu = 3 + t_3 + (r - 3)\mu.$$

Hence,

$$3(\rho - 3) = \mu(\rho - 3) = 2k - 2 - t_3 = 2(3 + 2u) - 2 - t_3 = 4 + 4u - t_3. \quad (17)$$

$t_3 = 0$. Then $3(\rho - 3) = 4(u + 1)$. Thus, $\rho - 3 = 4L, u = 3L - 1$.

Therefore, the type becomes $[9 * (12 + 3L), 1; 4^{8+4L}, 2^3]$.

$t_3 = 1$. Then $t_2 = 2, 3(\rho - 4) = 4u$. Thus, $\rho - 4 = 4L, u = 3L$.

Therefore, the type becomes $[9 * (13 + 3L), 1; 4^{9+4L}, 3, 2^2]$.

$t_3 = 2$. Then $t_2 = 1, 3(\rho - 5) = 4(u - 1)$. Thus, $\rho - 5 = 4L, u = 1 + 3L$.

Therefore, the type becomes $[9 * (14 + 3L), 1; 4^{10+4L}, 3^2, 2]$.

$t_3 = 3$. Then $t_2 = 0, 3(\rho - 6) = 4(u - 2)$. Thus, $\rho - 6 = 4L, u = 2 + 3L$.

Therefore, the type becomes $[9 * (15 + 3L), 1; 4^{11+4L}, 3^3]$.

$$\mu = 2$$

Then $\mathcal{Z}^* = 5 = y_1, y_1 = t_2 = 5$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 5 + (r - 5)\mu.$$

Hence, $r = 14 + 2u, e = 10 + u$.

Therefore, the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{9+2u}, 2^5]$.

4.4.3 case when $g = 2$

Assume that $g = 2$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 4.$$

By $\mathcal{Z}^* = 4 \geq \mu - 1$, we get $\mu \leq 5$.

$$\mu = 5$$

Then $\nu_1 = 6$ and $\mathcal{Z}^* = 4 = 4y_1 + 6y_2, y_1 = t_2 + t_5 = 1$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 1 = 1 + 3t_5 + (r - 1)\mu.$$

Hence,

$$5(\rho - 1) = \mu(\rho - 1) = 2k - 1 - 3t_5 = 5 + 4u - 3t_5. \quad (18)$$

$$t_5 = 0$$

Then $\nu_1 = 6$ and $5(\rho - 1) = 5 + 4u$. Therefore, $\rho - 3 = 4L, u = 2 + 5L$.

In this case, the type becomes $[13 * (19 + 2 + 5L), 1; 6^{10+4L}, 5]$.

$$t_5 = 1$$

Then $\nu_1 = 6$ and $5(\rho - 1) = 2 + 4u$. Therefore, $\rho - 2 = 4L, u = 5L$.

In this case, the type becomes $[13 * (19 + 5L), 1; 6^{9+4L}]$.

$$\mu = 4$$

Then $\nu_1 = 5$ and $\mathcal{Z}^* = 4 = 3y_1 + 4y_2, y_2 = t_3 = 1$ and

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 1 = 2 + (r - 1)\mu.$$

Hence,

$$5(\rho - 1) = \mu(\rho - 1) = 2 + (r - 1)u. \quad (19)$$

4.4.4 case when $g = 3$

Assume that $g = 3$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 5 - \mu.$$

When $\mathcal{Z}^* = 5 - \mu = 0$, $\mu = 5, \nu_1 = 6$ and $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 2 = r \cdot \mu$.

The type becomes $[13 * (19 + 5L), 1; 6^{9+4L}]$.

Conversely, if the pair has this type, $g = 3, A = 4 * 10L, k = 3 + 10L$.

When $\mathcal{Z}^* > 0, 5 - \mu \geq \mu - 1$. Hence $\mu \leq 3$.

$$\mu = 3.$$

By $\mathcal{Z}^* = 2 = 2y_1 = 2(t_2 + t_3)$, we get $t_2 + t_3 = 1$ and $3(\rho - 1) = 4 + 4u - t_3$.

$t_3 = 0$. Then $\sigma = 9, e = 12 + 3L, r = 9 + 4L$. The type becomes $[9 * (12 + 5L), 1; 4^{8+4L}, 2]$.

$t_3 = 1$. Then $\sigma = 9, e = 13 + 3L, r = 9 + 4L$. When $B = 1$, the type becomes $[9 * (13 + 3L), 1; 4^{8+4L}, 3]$.

$\mu = 2$.

By $\mathcal{Z}^* = 3 = t_2$, we get $t_2 = 3$ and $2(\rho - 3) = 2k - 4$.

When $B = 1$, the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{9+2u}, 2^3]$.

4.4.5 case when $g = 4$

Assume that $g = 4$. Then $\mathcal{Z}^* = -2\mu + 6$. Hence, 1) $\mu = 3$ or 2) $\mu = 2$.

1) $\mu = 3$. Then $\nu_1 = 4$ and $\mathcal{Z}^* = 0$.

Moreover, $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 3 = r \cdot \mu$. Hence, $\rho\mu = 2k - 2$. If $B = 1$ then $3\rho = 4(1 + u)$.

Thus, $\rho = 4L, 1 + u = 3L$, for some L . The type becomes $[9 * (12 + 3L), 1; 4^{8+4L}]$.

2) $\mu = 2$. Then $\nu_1 = 3$ and $\mathcal{Z}^* = 2 = t_2$.

Moreover, $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 3 = (r - 2) \cdot \mu + 2$. Hence, $(\rho - 2)\mu = 2k - 4$. Thus $\rho = k$. If $B = 1$ then $\rho = k = 3 + 2u$. The type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{9+2u}, 2^2]$.

4.4.6 case when $g = 5$

Assume that $g = 5$. Then $\mu = 2$ and $\mathcal{Z}^* = 1$.

Moreover, $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 4 = (r - 1) \cdot \mu + 1$.

Hence, $(\rho - 1)\mu = 2k - 4$. If $B = 1$ then the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{9+2u}, 2]$.

4.4.7 case when $g = 6$

Assume that $g = 6$. Then $\mu = 2$ and $\mathcal{Z}^* = 0$.

Moreover, $\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 - 5 = r \cdot \mu$. Hence, $\rho\mu = 2k - 4$. If $B = 1$ then the type becomes $[7 * (10 + u), 1; 3^{9+2u}]$.

5 Class IIIa.

Class IIIa. We say that the type belongs to Class IIIa, if $p = 2$ and $B = 1, u = 0$.

Then $k = 6, \tilde{k} = 4$ and

$$\mathcal{Z}^* = \nu_1(A - k) + (1 - \mu)\bar{g} + 2. \quad (20)$$

Thus we obtain the next result.

1. If $g > 0$, then $k \leq A$,
2. if $g = 0$, then $k \leq A + 1$.

5.1 case when $i = -1$

In the case when $k = A + 1$, we get $g = 0$ and

$$\mathcal{Z}^* = \nu_1(A - k) + (1 - \mu)\bar{g} + 2 = -\nu_1 - (1 - \mu) + 2 = 0.$$

From $\bar{Y} = 8\mu + k + A - \bar{g} = 8\mu + 2k$ and $\bar{Y} = r\mu$, it follows that $\rho\mu = 2k = 12$.

Table 1:

ρ	r	μ	ν_1	σ	e	ν_1^r
1	9	12	13	28	41	13^9
2	10	6	7	16	23	7^{10}
3	11	4	5	12	17	5^{11}
4	12	3	4	10	14	4^{12}
6	14	2	3	8	11	3^{14}

The type becomes

1. $[28 * 41, 1; 13^9]$,
2. $[16 * 23, 1; 7^{10}]$,
3. $[12 * 17, 1; 5^{11}]$,
4. $[10 * 14, 1; 4^{12}]$,
5. $[8 * 11, 1; 3^{14}]$.

If the pairs have these types, then $k = A - 1$.

5.2 case when $i = 0$

Suppose that $k = A$. Then

$$0 \leq \mathcal{Z}^* = (1 - \mu)\bar{g} + 2.$$

Thus $\bar{g} \leq \frac{2}{\mu-1} \leq 2$.

5.2.1 case when $g = 0$

Assume that $g = 0$. Then

$$\mathcal{Z}^* = \mu + 1.$$

By $2\mu - 4 \leq \mu + 1$, we get $\mu \leq 5$

$$\mu = 5.$$

$\mathcal{Z}^* = 6$ and $\mathcal{Z}^* = 4y_1 + 6y_2$. Hence, $y_2 = 1$. Thus $t_3 + t_4 = y_2 = 1$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = (r - 1) \cdot \mu + 2t_3 + 3t_4.$$

Accordingly, $5(\rho - 1) = 13 - 2t_3 - 3t_4$. Thus $t_4 = 1, t_3 = 0$. the type becomes $[14 * 20, 1, 6^{10}, 4]$.

If $\mu = 4$ then $\mathcal{Z}^* = 5, \mathcal{Z}^* = 3y_1 + y_2$, which has no solution.

$\mu = 3$.

Then

$$\mathcal{Z}^* = 4, \mathcal{Z}^* = 2y_1.$$

Hence, $y_1 = t_2 + t_3 = 2$.

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = (r - 2) \cdot \mu + t_2 + 2t_3.$$

Accordingly, $3(\rho - 2) = 13 - t_2 - 2t_3$. Thus $\rho - 2 = 3$ and the type becomes $[10 * 14, 1; 4^{11}, 3^2]$.

$\mu = 2$.

Then

$$\mathcal{Z}^* = 3, \mathcal{Z}^* = y_1 = t_2.$$

Hence, $t_2 = 3, \rho - 3 = 5$ and the type becomes $[8 * 11, 1; 3^{13}, 2^3]$.

5.2.2 case when $g = 1$

Assume that $g = 1$. Then $\mathcal{Z}^* = 2$.

By $\mu - 1 \leq \mathcal{Z}^* = 2$, we get $\mu \leq 3$.

$\mu = 3$.

Then $\mathcal{Z}^* = 2y_1 = 2(t_2 + t_3)$. Hence, $t_2 + t_3 = 1$ and

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = (r - 1) \cdot \mu + t_2 + 2t_3.$$

Since

$$(\rho - 1) \cdot \mu = 3(\rho - 1) = 13 - (t_2 + 2t_3)$$

it follows that $t_2 = 1$ and $\rho - 1 = 4$.

$\mu = 2$.

Then $2 = \mathcal{Z}^* = y_1 = t_2$, and $\rho - 2 = 5$ and the type becomes $[8 * 11, 1; 3^{13}, 2^2]$.

5.2.3 case when $g = 2$

Assume that $g = 2$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 3 - \mu.$$

The type becomes $[8 * 11, 1; 3^{13}, 2]$.

5.2.4 case when $g = 3$

Assume that $g = 3$. Then

$$\mathcal{Z}^* = (1 - \mu)\bar{g} + 2 = 4 - 2\mu.$$

The type becomes $[8 * 11, 1; 3^{13}]$.

5.3 case when $i = 1$

Suppose that $k = A - 1$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 1 + \mu + (1 - \mu)\bar{g} + 2.$$

Then

$$\bar{g} \leq \frac{1 + \mu}{\mu - 1} = 1 + \frac{2}{\mu - 1} \leq 3.$$

5.3.1 case when $g = 0$

Suppose that $g = 0$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu + 2.$$

Define $r' = \sum_{j=2}^{\nu_1-1} t_j$, where $r = r' + t_{\nu_1}$. Then $r' > 0$ by hypothesis.

Suppose that $r' = 1$. Then $\mathcal{Z}^* = j(\mu - j)$ for some $j < \mu = \nu_1 - 1$ where $\mu - j \geq j$. Hence,

$$\mu = j + 2 + \frac{6}{j - 2}.$$

But

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= 8 \cdot \mu + 2k + 2 = (j - 1)t_j + (\mu - j + 1)t_{\mu-j+2} + (r - 1) \cdot \mu \\ &= (j - 1) + (\mu - 2j + 2)t_{\mu-j+2} + (r - 1) \cdot \mu. \end{aligned}$$

Therefore,

$$(\rho - 1) \cdot \mu = 2k + 2 - (j - 1) - (\mu - 2j + 2)t_{\mu-j+2} = 15 - j - (\mu - 2j + 2)t_{\mu-j+2}.$$

Following the next table, we obtain a solution $j = 5, \mu = 9, t_6 = 1$.

Table 2:

$j-2$	j	$j+2$	$6/(j-2)$	μ	$2k+3-j$	$2k+1+j-\mu$
1	3	5	6	11	12	5
2	4	6	3	9	11	8
3	5	7	2	9	10	9

Thus, $\nu_1 = 10, \sigma = 22, e = 32$. The type becomes $[22 * 32, 1; 10^9, 6]$.

Assume $r' \geq 2$. Then $\mathcal{Z}^* = \mu - 1 + j(\mu - j)$ for some $j < \mu = \nu - 1$ where $\mu + 2 - j \geq j$. Thus

$$2\mu + 2 \geq \mu - 1 + j(\mu - j).$$

Hence,

$$j^2 + 3 \geq (j - 1)\mu \geq 2(j - 1)j.$$

Therefore, $2j + 3 \geq j^2$, which implies $j \leq 3$. Moreover,

$$\mu \leq \frac{j^2 + 3}{j - 1} = j + 1 + \frac{4}{j - 1}.$$

Hence, $\mu \leq 7$. Then $y_j = 0$ for $j > 3$.

Let $a = y_1, b = y_2, c = y_3$. Thus

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu + 2 = a(\mu - 1) + 2b(\mu - 2) + 3c(\mu - 3).$$

If $c > 0$ then $\mu \geq 6$ and

$$(a + 2b + 3c - 2)\mu = a + 4b + 9c + 2 \geq 6(a + 2b + 3c - 2).$$

Hence, $14 \geq 5a + 8b + 9c$, which induces $c = 1, b = 0, a = 1$. But this contradicts $r' > 1$. Accordingly, $c = 0$.

If $b > 0$ then $\mu \geq 4$.

By $(a + 2b - 2)\mu = a + 4b + 2 \geq 4(a + 2b - 2)$, we obtain $10 \geq 3a + 4b$.

Hence, $b = 1, 2$.

If $b = 2$ then $a = 0$ and thus $\mu = 5$. By the way, from

$$\overline{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 2 = 2y2(\mu - 2) + (r - 2)\mu, y_2 = t_3 + t_4 = 2$$

it follows that

$$5(\rho - 2) = (\rho - 2)\mu = 2k + 2 \cdot 2 - 2t_3 - 3t_4 = 10 - t_4.$$

Therefore, $t_4 = 0, \rho - 2 = 2$. Hence, the type becomes $[14 * 20, 1; 6^{10}, 3^2]$.

If $b = 1$ then $a = 1, 2$ and thus $\mu = 1 + \frac{a}{6}$. Moreover, from $\bar{Y} = t_2 + (\mu - 1)t_\mu + (\mu - 2)t_{\mu-1} + (r - 1 - a)\mu$ it follows that

$$(\rho - a - 1)\mu = 2k + 2 - a - 2 - (\mu - 2)t_\mu - (\mu - 4)t_{\mu-1}.$$

If $a = 1$ then $\mu = 7$ and we derive a contradiction.

If $a = 2$ then $\mu = 4$ and the type becomes $[12 * 17, 1; 5^{10}, 4, 3, 2]$.

If $b = c = 0$ then $2\mu + 2 = a(\mu - 1)$. Hence, $\mu = 1 + \frac{4}{a-2}$.

Moreover, from $\bar{Y} = t_2 + (\mu - 1)t_\mu + (r - a)\mu$, it follows that

$$(\rho - a)\mu = 14 - a - (\mu - 2)t_\mu.$$

Table 3:

$a - 2$	a	$4/(a - 2)$	μ	$14 - a$	$14 - a - (\mu - 2)$	$14 - a - 2(\mu - 2)$
1	3	4	5	11	8	5
2	4	2	3	10	9	8
4	6	1	2	8	8	8

From this table, the condition that $14 - a - (\mu - 2)t_\mu$ is a multiple of μ is satisfied we get 1) $a = 3, \mu = 5, t_5 = 2$, 2) $a = 4, \mu = 3, t_3 = 1$ or 3) $a = 6, \mu = 2, t_2 = 6$.

- 1) The type becomes $[14 * 20, 1; 6^9, 4, 5^2, 2]$.
- 2) The type becomes $[10 * 14, 1; 4^{11}, 4, 3, 2^3]$.
- 3) The type becomes $[8 * 11, 1; 3^{12}, 2^6]$.

5.3.2 case when $g = 1$

Suppose that $g = 1$. Then

$$\mathcal{Z}^* = \mu + 3.$$

By $\mathcal{Z}^* = \mu + 3 \geq 2\mu - 4$, we obtain $\mu \leq 7$.

$$\mu = 7$$

Then $\mathcal{Z}^* = 10$ and $\mathcal{Z}^* = 6y_1 + 10y_2 + 12y_3$. Hence, $y_2 = t_3 + t_6 = 1$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 2t_3 + 5t_6 + (r - 1) \cdot \mu = 2 + 3t_6 + (r - 1) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$7(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 2k - 1 - 3t_6 = 11 - 3t_6.$$

Here are no solutions.

$$\mu = 6$$

Then $\mathcal{Z}^* = 9$ and $\mathcal{Z}^* = 5y_1 + 8y_2 + 9y_3$. Hence, $y_3 = t_4 = 1$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 3t_4 + (r - 1) \cdot \mu = 3 + (r - 1) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$6(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 2k - 2 = 10.$$

Here are no solutions.

$$\mu = 5$$

Then $\nu_1 = 6, \mathcal{Z}^* = 8$ and $\mathcal{Z}^* = 4y_1 + 6y_2$. Hence, $y_1 = t_2 + t_5 = 2$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = t_2 + 4t_5 + (r - 1) \cdot \mu = 2 + 3t_5 + (r - 2) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$5(\rho - 2) = (\rho - 2) \cdot \mu = 11 - 3t_5.$$

Then $t_5 = 2$ and $\rho - 2 = 1$. Hence, $r = 11$, $\sigma = 12 + 2 = 14$, $e = 14 + 6$. Hence, the type becomes $[14 * 20, 1; 6^9, 5^2]$.

$$\mu = 4$$

Then $\nu_1 = 5, \mathcal{Z}^* = 7$ and $\mathcal{Z}^* = 3y_1 + 4y_2$. Hence, $y_1 = t_2 + t_4 = 1, y_2 = t_3 = 1$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = t_2 + 3t_4 + 2 + (r - 2) \cdot \mu = 3 + 2t_4 + (r - 2) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$4(\rho - 2) = (\rho - 2) \cdot \mu = 10 - 2t_4.$$

Then $t_4 = 1$ and $\rho - 2 = 2$. Hence, $r = 12$, $\sigma = 10 + 2 = 12$, $e = 12 + 5 = 17$. Hence, the type becomes $[12 * 17, 1; 5^{10}, 4, 3]$.

$$\mu = 3$$

Then $\nu_1 = 4, \mathcal{Z}^* = 6$ and $\mathcal{Z}^* = 2y_1$. Hence, $y_1 = t_2 + t_3 = 3$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = t_2 + 2t_3 + (r - 3) \cdot \mu = 3 + t_3 + (r - 3) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$3(\rho - 3) = (\rho - 3) \cdot \mu = 10 - t_3.$$

Then $t_3 = 1$ and $\rho - 3 = 3$. Hence, $r = 14$, $\sigma = 8 + 2 = 10$, $e = 10 + 4 = 14$. Hence, the type becomes $[10 * 14, 1; 4^{10}, 3, 2^2]$.

$$\mu = 2$$

Then $\nu_1 = 3, \mathcal{Z}^* = 5$ and $\mathcal{Z}^* = y_1$. Hence, $y_1 = t_2 = 5$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k + 1 = 5 + (r - 5) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$2(\rho - 5) = (\rho - 5) \cdot \mu = 8.$$

Then $\rho - 5 = 4$. Hence, $r = 17$, $\sigma = 6 + 2 = 8$, $e = 11$. Hence, the type becomes $[8 * 11, 1; 3^{13}, 2^5]$.

5.3.3 case when $g = 2$

Suppose that $g = 2$. Then $\mathcal{Z}^* = 4 \geq \mu - 1$. Hence, $5 \geq \mu$.

$$\mu = 5$$

Then $\nu_1 = 6$ and $\mathcal{Z}^* = 4y_1 + 6y_2$. Hence, $y_1 = t_2 + t_5 = 1$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = t_2 + 4t_5 + (r - 1) \cdot \mu = 1 + 3t_5 + (r - 1) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$5(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 11 - 3t_5.$$

Here are no solutions.

$$\mu = 4$$

Then $\nu_1 = 5$ and $4 = \mathcal{Z}^* = 3y_1 + 4y_2$. Hence, $y_2 = t_3 = 1$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = t_2 + 2t_3 + (r - 1) \cdot \mu = 2 + (r - 1) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$4(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 10.$$

Here are no solutions.

$$\mu = 3$$

Then $\nu_1 = 4$ and $4 = \mathcal{Z}^* = 2y_1$. Hence, $y_1 = t_2 + t_3 = 2$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = t_2 + 2t_3 + (r - 2) \cdot \mu = 2 + t_3 + (r - 2) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$3(\rho - 1) = (\rho - 1) \cdot \mu = 10 - t_3.$$

Then $t_3 = 1, \rho - 1 = 3; \rho = 5$. Hence, the type becomes $[10 * 14, 1; 4^{11}, 3, 2]$.

$$\mu = 2$$

Then $\nu_1 = 3$ and $4 = \mathcal{Z}^* = y_1$. Hence, $y_1 = t_2 = 4$.

$$\bar{Y} = 8 \cdot \mu + 2k = 4 + (r - 4) \cdot \mu.$$

Therefore,

$$2(\rho - 4) = (\rho - 4) \cdot \mu = 12 - 4 = 8.$$

Then $\rho - 4 = 4; \rho = 8$. Hence, the type becomes $[8 * 11, 1; 3^{12}, 2^4]$.

5.3.4 case when $g = 3$

Suppose that $g = 3$. If $\mathcal{Z}^* \neq 0$, then $\mathcal{Z}^* = 5 - \mu \geq \mu - 1$. Hence, $3 \geq \mu$.

Otherwise, $\mathcal{Z}^* = 0; \mu = 5$.

If $\mu = 3$ then the type becomes $[10 * 14, 1; 4^{11}, 3]$.

5.3.5 case when $g = 4$

Suppose that $g = 4$. Then $\mathcal{Z}^* = 6 - 2\mu \geq \mu - 1$. Hence, $3 \geq \mu$.

If $\mu = 2$ then the type becomes $[8 * 11, 1; 3^{12}, 2^2]$.

If $\mu = 3$ then $3\mu = 2k - 2 = 10$. A contradiction.

6 Class IIIb.

Class IIIb. We say that the type belongs to Class IIIb if $p \geq 2$ except for the condition of Class III_a.

Then $i = A - k \geq 0$ and $\tilde{q} = \tilde{k} - k \geq 0$. Thus,

$$1. \bar{Y} = 8\mu + k + A_1 = 8\mu + 2k + i - \bar{g},$$

$$2. \bar{X} = 8\mu^2 + 2k\mu + \tilde{q} - i - \bar{g}.$$

Therefore,

$$\mathcal{Z}^* = i(\mu + 1) + (1 - \mu)\bar{g} - \tilde{q}.$$

Putting $\tilde{i} = i - \bar{g}$, we get $i + \bar{g} = \tilde{i} + 2\bar{g}$ and so $\bar{Y} = 8\mu + 2k + \tilde{i}$. Hence,

$$\mathcal{Z}^* = \tilde{i}(\mu + 1) + 2\bar{g} - \tilde{q}.$$

Since $\tilde{q} \geq 0$, it follows that

$$\tilde{i}(\mu + 1) + 2\bar{g} = \mathcal{Z}^* + \tilde{q} \geq 0.$$

Therefore,

$$(i - \bar{g})\nu_1 = \tilde{i}(\mu + 1) \geq -2\bar{g}.$$

Thus,

$$(\mu + 1)i \geq (\mu - 2)\bar{g}.$$

Suppose that $\bar{g} \geq 0$. Then

$$\frac{i(\mu + 1)}{\mu - 1} \geq \bar{g}.$$

If $i = 0$ then $g = 1$.

If $i = 1$ then $g \leq 4$.

6.1 case when $\bar{g} = 2$

Suppose that $g = 3$; thus $\bar{g} = 2$ and $\tilde{i} = i - \bar{g} = 1 - 2 = -1$. By $\frac{\nu_1}{\nu_1 - 2} = \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \geq \bar{g} = 2$, we get $\mu \leq 3$.

$$\mu = 3$$

Then $\nu_1 = 4$ and

$$\mathcal{Z}^* = \tilde{i}(\mu + 1) + 2\bar{g} - \tilde{q} = -4 + 4 - \tilde{q} = -\tilde{q}.$$

Therefore, $\tilde{q} = 0$ and $\mathcal{Z}^* = 0$.

Hence, $3\rho = \rho\mu = 2k + \tilde{i} = 2k - 1$. But from $\tilde{q} = 0$, it follows that 1) $k = 8, p = 2$ or 2) $k = 9, p = 3$. Thus, $k = 8, p = 2$ and $3\rho = 15$, which implies that $\rho = 5, r = 13$.

If $B = 1$ then $u = 1, \sigma = 8 + 2 = 10$ and $e = 10 + 4 + 1 = 15$. Therefore, the type becomes $[10 * 15, 1; 4^{13}]$.

If $B = 0$ then $u = 0, \sigma = 8 + 2 = 10$ and $e = 10$. Therefore, the type becomes $[10 * 10; 4^{13}]$.

$$\mu = 2$$

Then $\nu_1 = 3$ and

$$\mathcal{Z}^* = \tilde{i}(\mu + 1) + 2\bar{g} - \tilde{q} = -3 + 4 - \tilde{q} = 1 - \tilde{q}.$$

Therefore, either A) $\tilde{q} = 0$ and $\mathcal{Z}^* = 1$ or B) $\tilde{q} = 1$ and $\mathcal{Z}^* = 0$.

A) $\tilde{q} = 0$ and $\mathcal{Z}^* = 1$.

If $\tilde{q} = 0$ then $\mathcal{Z}^* = 1$. Hence, $t_2 = 1$ and $\bar{Y} = (r - 1)\mu + 1 = 8\mu + 2k + 1 - \bar{g} = 8\mu + 2k - 1$. Therefore, $2(\rho - 1) = 2k - 2$ and $\rho = k$. But from $\tilde{q} = 0$, it follows that 1) $k = 8, p = 2$ or 2) $k = 9, p = 3$.

1) If $B = 1$ then $u = 1, \rho = k = 8$ and $\sigma = 6 + 2 = 8$ and $e = 8 + 3 + 1 = 12$. Therefore, $r = 16$ and the type becomes $[8 * 12, 1; 3^{15}, 2]$.

If $B = 0$ then $u = 0, \rho = k = 8$ and $\sigma = 6 + 2 = 8$ and $e = 8$.

Therefore, $r = 16$ and the type becomes $[8 * 8; 3^{15}, 2]$.

2) $k = 9, p = 3, B = 1, u = 0$. Then $\rho = k = 9$ and $\sigma = 6 + 3 = 9$ and $e = 9 + 3 = 12$. Therefore, $r = 17$ and the type becomes $[9 * 12, 1; 3^{16}, 2]$.

B) $\tilde{q} = 1$

From $\tilde{q} = 1$, it follows that $k(p - 1) - 2p^2 = 1$. Thus,

$$k = 2(p + 1) + \frac{3}{p - 1}.$$

Thus $p - 1 = 1$ or 3 .

If $p = 2$ then $k = 9$. But $k - wp = 9 - 2w = 2u$, a contradiction.

If $p = 4$ then $k = 11$. But $k - wp = 11 - 4w = 2u$, a contradiction.

6.2 case when $\bar{g} = 1$

Suppose that $g = 2$; thus $\bar{g} = 1$ and $\tilde{i} = i - \bar{g} = 1 - 1 = 0$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 2 - \tilde{q}.$$

Therefore $\tilde{q} = 2$ or 1 or 0 .

6.2.1 case when $\tilde{q} = 2$

If $\tilde{q} = 2$ then $\mathcal{Z}^* = 0$. From $\tilde{q} = 2$, it follows that $k(p - 1) - 2p^2 = 2$. Thus,

$$k = 2(p + 1) + \frac{4}{p - 1}.$$

Table 4:

p	$2(p+1)$	$4/(p-1)$	k	$(k-3p)/2$	$(k-4p)/2$
2	6	4	10	2	1
3	8	2	10	0.5	-1
5	12	1	13	-1	-3.5

Thus we get the next table.

Thus, $p = 2, k = 10$. If $B = 1$ then $u = 2$ and if $B = 0$ then $u = 1$. From

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k + i - \bar{g} = 8\mu + 2k = r\mu.$$

it follows that $\rho\mu = 2k = 20$.

Table 5: $B = 1, u = 2$

ρ	μ	ν_1	σ	e	r
1	20	21	44	67	9
2	10	11	24	37	10
4	5	6	14	22	12
5	4	5	12	19	13
10	2	3	8	13	18

Table 6: $B = 0, u = 1$

ρ	μ	ν_1	σ	e	r
1	20	21	44	45	9
2	10	11	24	25	10
4	5	6	14	15	12
5	4	5	12	13	13
10	2	3	8	9	18

6.3 case when $\bar{g} = 3$

Suppose that $g = 4$; thus $\bar{g} = 3$ and $\tilde{i} = i - \bar{g} = 1 - 3 = -2$. Then since $\frac{\nu_1 i}{\nu_1 - 2} \geq \bar{g} = 3$, it follows that $\nu_1 = 3$. Hence,

$$\mathcal{Z}^* = \tilde{i}(\mu + 1) + 2\bar{g} - \tilde{q} = -2 \cdot 3 + 6 - \tilde{q} = -\tilde{q}.$$

Therefore, $\tilde{q} = 0$ and $\mathcal{Z}^* = 0$. Hence, $\rho\mu = 2\rho = 2k - 2$; so $\rho = k - 1$.

By $\tilde{q} = \tilde{k} - k = 0$, we get either 1) $p = 2, k = 8$ or 2) $p = 3, k = 9$.

If $p = 2, k = 8$ then $\rho = k - 1 = 7$ and $\nu_1 = 3$.

If $B = 1$ then $\sigma = 6 + 2 = 8, u = 1$ and $e = 8 + 3 + 1$. Hence the type becomes $[8 * 12, 1; 3^{15}]$.

If $B = 0$ then $\sigma = 6 + 2 = 8, u = 0$ and $e = 8$. Hence the type becomes $[8 * 8; 3^{15}]$.

If $p = 3, k = 9$ then $\rho = k - 1 = 8$ and $\nu_1 = 3$ and moreover, $\sigma = 6 + 3 = 9, u = 1$ and $e = 9 + 3 = 12$. Hence the type becomes $[9 * 12, 1; 3^{16}]$.

6.3.1 case when $\tilde{q} = 1$

As was shown before, this case does not occur.

6.3.2 case when $\tilde{q} = 0$

If $\tilde{q} = 0$ then 1) $k = 8, p = 2$ or 2) $k = 9, p = 3$. Moreover, $\mathcal{Z}^* = 2 - \tilde{q} = 2$. Since $\mathcal{Z}^* \geq \mu - 1$, it follows that $\mu = 2$ or 3.

$$\mu = 2.$$

Then $\nu_1 = 3$ and $\mathcal{Z}^* = t_2$. Hence, $t_2 = 2$ and

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k = 2 + (r - 2)\mu.$$

Hence, $(\rho - 2)\mu = 2(\rho - 2) = 2k - 2$. Thus, $\rho = k + 1$.

1) $k = 8, p = 2$. Then $\rho = k + 1 = 9; r = 17$.

If $B = 1$ then $\sigma = 6 + 2, e = 8 + 3 + 1 = 12$ and the type becomes $[8 * 12, 1; 3^{15}, 2^2]$.

2) $k = 9, p = 3$. Then $\rho = k + 1 = 10; r = 18$ and $\sigma = 6 + 3 = 9, e = 9 + 3 = 12$ and the type becomes $[9 * 12, 1; 3^{16}, 2^2]$.

$$\mu = 3.$$

Then $\nu_1 = 4$ and $\mathcal{Z}^* = 2(t_2 + t_3)$. Hence, $t_2 + t_3 = 1$. From

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k = t_2 + 2t_3 + (r - 1)\mu.$$

Hence, $(\rho - 1)\mu = 3(\rho - 1) = 2k - (t_2 + 2t_3) = 2k - 1 - t_3$. Thus, $3(\rho - 1) = 2k - 1 - t_3$.

1) $k = 8, p = 2$. Then $3(\rho - 1) = 2k - 1 - t_3 = 15 - t_3$. Hence, $t_3 = 0$ and $t_2 = 1, \rho - 1 = 5; r = 14$

If $B = 1$ then $\sigma = 8 + 2 = 10$, $e = 10 + 4 + 1 = 15$ and the type becomes $[10 * 15, 1; 4^{13}, 2]$.

If $B = 0$ then $\sigma = 8 + 2 = 10$, $e = 10$ and the type becomes $[10 * 10; 4^{13}, 2]$.

2) $k = 9, p = 3, B = 1, u = 0$. Then $3(\rho - 1) = 2k - 1 - t_3 = 17 - t_3$. No solution.

6.4 case when $\bar{g} = 0$

Suppose that $g = 1$; thus $\bar{g} = 0$ and $\tilde{i} = i - \bar{g} = i$.

Assume $i = 0$. Then $\tilde{i} = 0$ and $\mathcal{Z}^* = -\tilde{q}$.

By $\tilde{q} = 0$, we have two cases, i.e. 1). $k = 8, p = 2, B = 1, 0$ and 2). $k = 9, p = 3, B = 1$.

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k = r\mu.$$

Hence, $\rho\mu = 2k$.

Table 7: $k = 8, p = 2, B = 1$

ρ	r	μ	ν_1	σ	u	e
1	9	16	17	36	1	54
2	10	8	9	20	1	30
4	12	4	5	12	1	18
8	16	2	3	8	1	12

6.4.1 case when $i = 1$

Assume $i = 1$. Then

$$\mathcal{Z}^* = \mu + 1 - \tilde{q}.$$

If $\mathcal{Z}^* \neq 0$, then $\mathcal{Z}^* \geq \mu - 1$ and hence, $\tilde{q} \leq 2$.

Table 8: $k = 8, p = 2, B = 0$

ρ	r	μ	ν_1	σ	u	e
1	9	16	17	36	0	36
2	10	8	9	20	0	20
4	12	4	5	12	0	12
8	16	2	3	8	0	8

Table 9: $k = 9, p = 3, B = 1$

ρ	r	μ	ν_1	σ	u	e
1	9	18	19	41	0	60
2	10	9	10	23	0	33
3	11	6	7	17	0	24
6	14	3	4	11	0	15
9	17	2	3	9	0	12

6.4.2 case when $\tilde{q} = 2$

Suppose that $\tilde{q} = 2$. Then $k = 10, p = 2$ and $\mathcal{Z}^* = \mu - 1$.

Moreover, from $\mathcal{Z}^* = y_1(\mu - 1)$, it follows that $y_1 = t_2 + t_\mu = 1$ and

$$\overline{Y} = 8\mu + 2k + 1 = t_2 + (\mu - 1)t_\mu + (r - 1)\mu = 1 + (\mu - 2)t_\mu + (r - 1)\mu.$$

Therefore, $(\rho - 1)\mu = 2k - (\mu - 2)t_\mu$. Since $k = 10$ and $t_\mu = 0$ or 1 , it follows that 1) $(\rho - 1)\mu = 2k = 20, t_2 = 1$ or 2) $\rho\mu = 2k + 2 = 22, t_\mu = 1$.

1). From $(\rho - 1)\mu = 2k = 20, t_2 = 1$, we obtain the following tables:
Then the types are as follows:

1. $[44 * 67, 1; 21^9, 2]$,
2. $[24 * 37, 1; 11^{10}, 2]$,
3. $[14 * 22, 1; 6^{12}, 2]$,
4. $[12 * 19, 1; 5^{13}, 2]$,
5. $[8 * 13, 1; 3^{18}, 2]$.

Table 10: $B = 1, u = 2, p = 2$

ρ	μ	ν_1	σ	e	r
2	20	21	44	67	10
3	10	11	24	37	11
5	5	6	14	22	13
6	4	5	12	19	14
11	2	3	8	13	19

Table 11: $B = 0, u = 1, p = 2$

ρ	μ	ν_1	σ	e	r
2	20	21	44	45	10
3	10	11	24	25	11
5	5	6	14	15	13
6	4	5	12	13	14
11	2	3	8	9	19

Then the types are as follows:

1. $[44 * 45; 21^9, 2]$,
2. $[24 * 25; 11^{10}, 2]$,
3. $[14 * 15; 6^{12}, 2]$,
4. $[12 * 13; 5^{13}, 2]$,
5. $[8 * 9; 3^{18}, 2]$.

2). From $\rho\mu = 2k + 2 = 22, t_\mu = 1$, we obtain the following tables:

Then the types are as follows:

1. $[48 * 73, 1; 23^8, 22]$,
2. $[26 * 40, 1; 11^9, 10]$,
3. $[8 * 13, 1; 3^{18}, 2]$,

Table 12: $B = 1, u = 2, p = 2$

ρ	μ	ν_1	σ	e	r
1	22	23	48	73	9
2	11	12	26	40	10
11	2	3	8	13	19

Table 13: $B = 0, u = 1, p = 2$

ρ	μ	ν_1	σ	e	r
1	22	23	48	49	9
2	11	12	26	27	10
11	2	3	8	9	19

Then the types are as follows:

1. $[48 * 49; 23^8, 22]$,
2. $[26 * 27; 11^9, 10]$,
3. $[8 * 9; 3^{18}, 2]$,

6.4.3 case when $\tilde{q} = 1$

As was proved before, the case when $\tilde{q} = 1$ never occur.

6.4.4 case when $\tilde{q} = 0$

Suppose that $\tilde{q} = 0$. Then either 1) $k = 8, p = 2$ or 2) $k = 9, p = 3$ and $\mathcal{Z}^* = \mu + 1$.

If $\mu \geq 4$ then $\mu \geq 4\mu + 1 \geq 2\mu - 4$. Thus $\mu \leq 5$.

$\mu = 5$.

Then $\mathcal{Z}^* = \mu + 1 = 6$ and $\mathcal{Z}^* = 4y_1 + 6y_2$. Hence, $y_1 = 0, y_2 = t_3 + t_4 = 1$. Therefore, from

$$\overline{Y} = 8\mu + 2k + 1 = 2t_3 + 3t_4 + (r - 1)\mu = 2 + t_4 + (r - 1)\mu$$

it follows that $5(\rho - 1) = (\rho - 1)\mu = 2k - 1 - t_4$.

1) $k = 8, p = 2$.

Then $5(\rho - 1) = 2k - 1 - t_4 = 15 - t_4$. Hence, $t_4 = 0, t_3 = 1$. $\rho - 1 = 3$ and $\sigma = 12 + 2$.

If $B = 1$ then $e = 21$. The type becomes $[14 * 21, 1; 6^{11}, 3]$,

If $B = 0$ then $e = 15$. The type becomes $[14 * 15; 6^{11}, 3]$,

2) $k = 9, p = 3, B = 1$.

Then $5(\rho - 1) = 2k - 1 - t_4 = 17 - t_4$. No solution.

$\mu = 4$.

Then $\mathcal{Z}^* = \mu + 1 = 5$ and $\mathcal{Z}^* = 3y_1 + 4y_2$. No solution.

$\mu = 3$.

Then $\nu_1 = 4$ and $\mathcal{Z}^* = \mu + 1 = 4$ and $\mathcal{Z}^* = 2y_1 = 4$. Then $y_1 = t_2 + t_3 = 2$.

By

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k + 1 = t_2 + 2t_3 + (r - 2)\mu = 2 + t_3 + (r - 2)\mu$$

we obtain

$$3(\rho - 2) = 2k - 1 - t_3.$$

1) $k = 8$. Then $t_3 = 0, t_2 = 2$ and $\rho = 7$. Therefore, $\sigma = 10, e = 10 + 4 + 1 = 15, r = 15$ for $B = 1$. When $B = 1$, the type turns out to be $[10 * 15, 1; 4^{13}, 2^2]$. But if $B = 0$, the type turns out to be $[10 * 10; 1^3, 2^2]$.

2) $k = 9$. Then $3(\rho - 2) = 2k - 1 - t_3 = 17 - t_3$. Hence, $t_3 = 2, t_2 = 0$ and $\rho = 7$. $\sigma = 11, e = 11 + 4 = 15, r = 15$ for $B = 1, u = 0$.

6.4.5 case when $\mathcal{Z}^* = 0$

Suppose that $\mathcal{Z}^* = 0$. Then $0 = \mathcal{Z}^* = \mu + 1 - \tilde{q}$. Hence, $\mu + 1 = \tilde{q} = k(p - 1) - 2p^2$. Thus

$$\mu + 1 = k(p - 1) - 2p^2 \quad (21)$$

By $\bar{Y} = 8\mu + 2k + 1 = r\mu$, we obtain

$$\rho\mu = 2k + 1. \quad (22)$$

Hence,

$$\rho\mu + \rho = k(\rho p - \rho) - 2\rho p^2.$$

Therefore,

$$2k + 1 + \rho = k(\rho p - \rho) - 2\rho p^2.$$

Hence,

$$1 + \rho + 2\rho p^2 = k(\rho p - \rho - 2). \quad (23)$$

This implies that ρ is odd.

6.4.6 case when $\rho = 1$

Suppose that $\rho = 1$. Then $2 + 2p^2 = k(p - 3)$. Hence, $p \geq 4$ and

$$k = 2(p + 3) + \frac{20}{p - 3}.$$

Table 14: $B = 1$

p	k	u	μ	ν_1	σ	e
4	34	11	69	70	144	225
7	25	2	51	52	111	165
8	26	1	53	54	116	171

Then the types are as follows:

1. $[144 * 225, 1; 70^9]$,
2. $[111 * 165, 1; 52^9]$,
3. $[116 * 171, 1; 54^9]$,

Table 15: $B = 0$

p	k	μ	ν_1	σ	e
4	34	69	70	144	162
5	26	53	54	113	119

Then the types are as follows:

1. $[144 * 162; 70^9]$,
2. $[113 * 119; 54^9]$.

6.4.7 case when $\rho = 3$

Suppose that $\rho = 3$. Then

$$6p^2 + 4 = k(3p - 5).$$

Since $6p^2 + 4 = (3p - 5)(2p + 3) + p + 19$, it follows that $k = 2p + 3 + m$, $m = \frac{p+19}{3p-5}$.

If $p = 2$ then $m = 21$ and $k = 28$. From $3\mu = \rho\mu = 2k + 1 = 57$, it follows that $\mu = 19$; thus $\nu_1 = 20$, $\sigma = 40 + 2 = 42$.

If $B = 1$ then $u = 11$ and $e = 42 + 20 + 11 = 73$; the type becomes $[42 * 73, 1; 20^{11}]$.

If $B = 0$ then $u = 10$ and $e = 42 + 10 = 52$; the type becomes $[42 * 52; 20^{11}]$.

If $m = 2$ then $p = \frac{19}{5}$, a contradiction. Thus $m \geq 3$. Hence, $p + 19 \geq 3(3p - 5)$. So, $p \leq 4$. But $p = 3$ and $p = 4$ cannot be solutions.

6.4.8 case when $\rho \geq 5$

Suppose that $\rho \geq 5$. From $k \geq 3p$, it follows that

$$1 + \rho + 2\rho p^2 = k(\rho p - \rho - 2) \geq 3p(\rho p - \rho - 2) = 3\rho dp^2 - 3p(\rho + 2).$$

By $\rho \geq 5$, we get $p \leq 3$.

If $p = 2$ then $1 + 9\rho = (\rho - 2)k$; hence, $(\rho - 2)(k - 9) = 19$. Therefore, $k - 9 = 1$, $\rho - 2 = 19$. Then $\rho = 21$ and $21\mu = \rho\mu = 2k + 1 = 21$; so $\mu = 1$.

If $p = 3$ then $1 + 19\rho = 2(\rho - 1)k$; hence, $(\rho - 1)(2k - 19) = 20$. Therefore,
1) $\rho - 1 = 4$, $2k - 19 = 5$ or 2) $\rho - 1 = 20$, $2k - 19 = 1$.

1) $\rho = 5$ and $k = 12$.

By $5\mu = \rho\mu = 2k + 1 = 25$; so $\mu = 5$. Hence, $B = 0$ and $u = 0$. Moreover, $\sigma = 12 + 3 = 15$, $e = 15$, $r = 5 + 8 = 13$.

Then the type is $[15 * 15; 6^{13}]$.

2) $\rho = 21$, $k = 10$.

By $21\mu = \rho\mu = 2k + 1 = 21$, we get $\mu = 1$.

If $p = 4$ then $1 + 33\rho = (3\rho - 2)k$; hence, $(3\rho - 2)(k - 11) = 23$. Therefore, $3\rho - 2 = 23$ and $k - 11 = 1$. A contradiction.

6.5 case when $\bar{g} = -1, i = 0$

Suppose that $g = 0$ and $i = 0$; thus $\tilde{i} = \bar{g} = 1$. In this case,

$$\mathcal{Z}^* = \mu - 1 - \tilde{q}.$$

I). If $\mathcal{Z}^* \neq 0$, then $\mathcal{Z}^* \geq \mu - 1$ and hence, $\tilde{q} = 0$ and $\mathcal{Z}^* = \mu - 1$. Thus either 1) $k = 8, p = 2$ or 2) $k = 9, p = 3$. Therefore, by $\mathcal{Z}^* = y_1(\mu - 1)$ we obtain $y_1 = t_2 + t_\mu = 1$.

By $\overline{Y} = 8\mu + 2k + 1 = t_2 + (\mu - 1)t_\mu + (r - 1)\mu$, we obtain

$$(\rho - 1)\mu = 2k + 1 - t_2 + (\mu - 1)t_\mu = 2k + (\mu - 2)t_\mu.$$

Suppose that $t_\mu = 0$; hence, $t_2 = 1$. Hence,

$$(\rho - 1)\mu = 2k.$$

1) $k = 8, p = 2$.
 $B = 1$.

Table 16: $k = 8, p = 2, B = 1$

$\rho - 1$	ρ	μ	ν_1	σ	e
1	2	16	17	36	54
2	3	8	9	20	30
4	5	4	5	12	18
8	9	2	3	8	12

Table 17: $k = 8, p = 2, B = 0$

$\rho - 1$	ρ	μ	ν_1	σ	e
1	2	16	17	36	36
2	3	8	9	20	20
4	5	4	5	12	12
8	9	2	3	8	8

2) $k = 9, p = 3$.

Suppose that $t_\mu = 1$; hence, $t_2 = 0$ and

$$\rho\mu = 2k + 2.$$

1) $k = 8, p = 2$.
2) $k = 9, p = 3$.

Table 18: $k = 9, p = 3, B = 1$

$\rho - 1$	ρ	μ	ν_1	σ	e
1	2	18	19	41	60
2	3	9	10	23	33
3	4	6	7	17	24
6	7	3	4	11	15
9	10	2	3	9	12

Table 19: $k = 8, p = 2, B = 1$

ρ	μ	ν_1	σ	e	$\tilde{B}$
1	18	19	40	60	80
2	9	10	22	33	44
3	6	7	16	24	32
6	3	4	10	15	20
9	2	3	8	12	16

Table 20: $k = 8, p = 2, B = 0$

ρ	μ	ν_1	σ	e
1	18	19	40	40
2	9	10	22	22
3	6	7	16	16
6	3	4	10	10
9	2	3	8	8

Table 21: $k = 9, p = 3, t_\mu = 1.$

ρ	μ	ν_1	σ	e
1	20	21	45	66
2	10	11	25	36
4	5	6	15	21
5	4	5	13	18
10	2	3	9	12

II). If $\mathcal{Z}^* = 0$, then $\tilde{q} = \mu - 1$.

By

$$\overline{Y} = 8\mu + 2k + 1 = r\mu$$

we obtain $\rho\mu = 2k + 1$.

From

$$\mu - 1 = \tilde{q} = k(p - 1) - 2p^2$$

it follows that

$$\rho\mu - \rho = k\rho(p - 1) - \rho 2p^2.$$

Hence,

$$2k + 1 = k\rho(p - 1) - \rho 2p^2 + \rho.$$

Thus,

$$2\rho p^2 - \rho + 1 = k(\rho(p - 1) - 2). \quad (24)$$

This implies that ρ is odd.

6.5.1 case when $\rho = 1$

Suppose that $\rho = 1$. Then $2p^2 = k(p - 3)$. Hence,

$$k = 2(p + 3) + \frac{18}{p - 3}.$$

Table 22: $\rho = 1, B = 1$

$p - 3$	p	$18/(p - 3)$	$2p + 6$	k	μ	ν_1	σ	u	e
1	4	18	14	32	65	66	136	10	212
2	5	9	16	25	51	52	109	5	166
3	6	6	18	24	49	50	106	3	159
6	9	3	24	27	55	56	121	0	177

Table 23: $\rho = 1, B = 0$

$p - 3$	p	$18/(p - 3)$	$2p + 6$	k	μ	ν_1	σ
1	4	18	14	32	65	66	136
3	6	6	18	24	49	50	106

6.5.2 case when $\rho = 3$

Suppose that $\rho = 3$. Then $6p^2 - 2 = k(3p - 5)$. Hence,

$$k = 2p + 3 + \frac{p + 13}{3p - 5}.$$

Denoting $\frac{p+13}{3p-5}$ by m , we obtain $k = 2p + 3 + m$.

If $p = 2$ then $m = 15$ and $k = 22$. By $3\mu = \rho\mu = 2k + 1 = 45$, we get $\mu = 15$. Hence, $\nu_1 = 16$ and $\sigma = 32 + 2 = 34$.

If $B = 1$ then $u = (k - 3p)/2 = 8$. Hence, $e = 34 + 16 + 8 = 58$.

The type becomes $[34 * 58, 1; 16^{11}]$ which has $g = 0, Z^2 = 21, A = 22$.

If $B = 0$ then $u = (k - 4p)/2 = 7$. Hence, $e = 34 + 7 = 41$.

The type becomes $[34 * 41; 16^{11}]$ which has $g = 0, Z^2 = 21, A = 22$.

If $p = 3$ then $m = 4$ and $k = 13$. By $3\mu = \rho\mu = 2k + 1 = 27$, we get $\mu = 9$. Hence, $\nu_1 = 10$ and $\sigma = 23$.

If $B = 1$ then $u = (k - 3p)/2 = 2$. Hence, $e = 23 + 10 + 2 = 35$.

The type becomes $[23 * 35, 1; 10^{11}]$ which has $g = 0, Z^2 = 12, A = 13$.

If $B = 0$ then $u = (k - 4p)/2 = 5/2$, a contradiction.

If $p \geq 4$ then there are no solutions.

6.5.3 case when $\rho \geq 5$

Suppose that $\rho \geq 5$.

From $2\rho p^2 - \rho + 1 = k(\rho(p - 1) - 2) \geq 3p(\rho(p - 1) - 2)$, it follows that

$$3p + \frac{6p}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1 \geq p^2.$$

By $\rho \geq 5$ we conclude $p = 2, 3$.

Suppose $p = 2$; thus $k(\rho - 2) = 7\rho + 1$. Hence, $(k - 7)(\rho - 2) = 15, \rho - 2 \geq 3$.

Table 24: $\rho \geq 5, B = 1$

$\rho - 2$	ρ	$k - 7$	k	μ	ν_1	σ	u	e
3	5	5	12	5	6	14	3	23
5	7	3	10	3	4	10	2	16

The type becomes

1. $[14 * 23, 1; 6^{13}]$,

2. $[10 * 16, 1; 4^{15}]$.

Table 25: $\rho \geq 5, B = 0$

$\rho - 2$	ρ	$k - 7$	k	μ	ν_1	σ	u	e
3	5	5	12	5	6	14	2	16
5	7	3	10	3	4	10	1	11

The type becomes

1. $[14 * 16; 6^{13}]$,
2. $[10 * 11; 4^{15}]$.

Suppose $p = 3$; thus $2k(\rho - 1) = 17\rho + 1$. Hence, $(2k - 17)(\rho - 1) = 18$. $2k - 17$ is odd. We get the following table.

Table 26: $B = 1, p = 3$

$\rho - 1$	ρ	$2k - 17$	k	μ	ν_1	σ	u	e
2	3	9	13	9	10	23	2	35

The type becomes $[23 * 35, 1; 10^{11}]$.

6.6 case when $i = 1$

Suppose that $i = 1, g = 0$; thus $\bar{g} = -1$ and $\tilde{i} = i - \bar{g} = i + 1 = 2$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu - \tilde{q}.$$

If $\mathcal{Z}^* \neq 0$ and $\mu - 4 \geq 0$ then $\mathcal{Z}^* \geq 2\mu - 4$ and hence, $\tilde{q} \leq 4$.

If $\mu = 2$ then $\mathcal{Z}^* = 4 - \tilde{q} \geq 0$; thus $\tilde{q} \leq 4$.

If $\mu = 3$ then $\mathcal{Z}^* = 6 - \tilde{q} = 2y_1 \neq 0$; thus $\tilde{q} \leq 4$.

6.6.1 case when $\tilde{q} = 4$

Suppose that $\tilde{q} = 4$. Then $\mathcal{Z}^* = 2\mu - 4$. Assume $\mu \geq 4$. Since $\mathcal{Z}^* = y_1(\mu - 1) + 2y_2(\mu - 2) + 3y_3(\mu - 3) + \cdots$, it follows that $y_2 = t_3 + t_{\mu-1} = 1$.

By

$$\overline{Y} = 8\mu + 2k + 2 = 2t_3 + (\mu - 2)t_{\mu-1} + (r - 1)\mu = 2 + (\mu - 4)t_{\mu-1} + (r - 1)\mu,$$

we obtain $(\rho - 1)\mu = 2k + (\mu - 4)t_{\mu-1}$.

On the other hand, from $\tilde{q} = 4$, it follows that $k(p - 1) - 2p^2 = 4$ and hence,

$$k = 2(p + 1) + \frac{6}{p - 1}.$$

Table 27:

$p - 1$	p	$2(p + 1)$	$6/(p - 1)$	k	$(k - 3p)/2$	$(k - 4p)/2$
1	2	6	6	12	3	2

Thus $k = 12, p = 2$.

If $B = 0$ then $u = 2$; if $B = 0$ then $u = 3$.

Therefore, $(\rho - 1)\mu = 24 + (\mu - 4)t_{\mu-1}$.

If $t_{\mu-1} = 0$ then $(\rho - 1)\mu = 24$.

Table 28: $t_{\mu-1} = 0$

$\rho - 1$	μ	ν_1	σ	e	ρ	r
1	24	25	52	80	2	10
2	12	13	28	44	3	11
3	8	9	20	32	4	12
4	6	7	16	26	5	13
6	4	5	12	20	7	15
8	3	4	10	17	9	17
12	2	3	8	14	13	21

The types are as follows

1. $[52 * 80, 1; 25^9, 3]$,
2. $[28 * 44, 1; 13^{10}, 3]$,
3. $[20 * 32, 1; 13^{11}, 3]$,
4. $[16 * 26, 1; 7^{12}, 3]$,

5. $[12 * 20, 1; 5^4, 3]$,
6. $[10 * 17, 1; 4^{16}, 3]$,
7. $[8 * 14, 1; 3^{20}, 3]$.

If $t_{\mu-1} = 1$ then $(\rho - 2)\mu = 24 + 4 = 28$.

Table 29: $t_{\mu-1} = 1, B = 1$

$\rho - 1$	μ	ν_1	σ	e	ρ	r
1	28	29	60	92	2	9
2	14	15	32	50	3	10
4	7	8	18	29	5	12
7	4	5	12	20	8	15
14	2	3	8	14	15	22

The types are as follows

1. $[60 * 92, 1; 29^9, 27]$
2. $[32 * 50, 1; 15^{10}, 13]$
3. $[18 * 29, 1; 8^{11}, 6]$
4. $[12 * 20, 1; 5^{14}, 3]$

Table 30: $t_{\mu-1} = 1, B = 0$

$\rho - 1$	μ	ν_1	σ	e	ρ	r
1	28	29	60	62	2	10
2	14	15	32	34	3	11
4	7	8	18	20	5	13
7	4	5	12	14	8	16
14	2	3	8	10	15	23
28	1	2	6	8	29	37

The types are as follows

1. $[60 * 62; 29^9, 27]$,

2. $[32 * 34; 15^{10}, 13]$,
3. $[18 * 20; 8^{11}, 6]$,
4. $[12 * 14; 5^{14}, 3]$

6.6.2 case when $\tilde{q} = 3$

Suppose that $\tilde{q} = 3$, from which it follows that $k(p-1) - 2p^2 = 3$ and hence,

$$k = 2(p+1) + \frac{5}{p-1}.$$

Hence, $p-1 = 1$ or 5 .

If $p = 2$ then $k = 11$. But $k - wp = 11 - 2w = 2u$, contradiction.

If $p = 6$ then $k = 15$. But $k - wp = 15 - 6w = 2u$, contradiction.

6.6.3 case when $\tilde{q} = 2$

Suppose that $\tilde{q} = 2$. Then $\tilde{q} = 2$, it follows that $k(p-1) - 2p^2 =$ and hence,

$$k = 2(p+1) + \frac{4}{p-1}.$$

Table 31: $\tilde{q} = 2$

$p-1$	p	$2(p+1)$	$4/(p-1)$	k	$(k-3p)/2$	$(k-4p)/2$
1	2	6	4	10	2	1

Thus $p = 2$. If $B = 1$ then $u = 2$. And if $B = 0$ then $u = 1$.

On the other hand, $\mathcal{Z}^* = 2\mu - 2$. Then we obtain 1) $t_2 + t_\mu = 2$ or 2) $\mathcal{Z}^* = 2\mu - 2 \geq 3\mu - 9$ for $\mu \geq 6$. Hence, $\mu = 6$ or 7 .

In the case when 1) $t_2 + t_\mu = 2$, by

$$\overline{Y} = 8\mu + 2k + 2 = t_2 + (\mu - 1)t_\mu + (r - 2)\mu = 2 + (\mu - 2)t_\mu + (r - 2)\mu,$$

we obtain $(\rho - 1)\mu = 2k - (\mu - 2)t_\mu$ where $t_\mu \leq 2$.

$$t_\mu = 2.$$

Then $(\rho - 2)\mu = 2k - 2(\mu - 2)$ and $\rho\mu = 2k + 4 = 24$.

Table 32:

ρ	r	μ	ν_1	σ	u	e
1	9	24	25	52	2	79
2	10	12	13	28	2	43
3	11	8	9	20	2	31
4	12	6	7	16	2	25
6	14	4	5	12	2	19
8	16	3	4	10	2	16
12	20	2	3	8	2	13

Table 33:

ρ	r	μ	ν_1	σ	u	e
1	9	24	25	52	1	53
2	10	12	13	28	1	29
3	11	8	9	20	1	21
4	12	6	7	16	1	17
6	14	4	5	12	1	13
8	16	3	4	10	1	11
12	20	2	3	8	1	9

$$t_\mu = 1.$$

Then $(\rho - 2)\mu = 2k - \mu + 2$ and $(\rho - 1)\mu = 2k + 2 = 22$.

$$t_\mu = 0.$$

Then $(\rho - 2)\mu = 2k = 20$.

6.6.4 case when $\tilde{q} = 0$

Assume $\tilde{q} = 0$. Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu.$$

If $\mu \geq 6$ then $2\mu = \mathcal{Z}^* \geq 3\mu - 9$; thus $\mu \leq 9$.

$$\mu = 9$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 18 = 8y_1 + 14y_2 + 18y_3.$$

Hence, $y_3 = t_4 + t_7 = 1$.

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k + 2 = 3t_4 + 6t_7 + (r - 1)\mu.$$

Thus, $9(\rho - 1) = (\rho - 1)\mu = 2k - 1 - 3t_7$.

But if $k = 8$ then $2k - 1 - 3t_7 = 15 - 3t_7$, which is not divisible by 9.

If $k = 9$ then $2k - 1 - 3t_7 = 17 - 3t_7$, which is not divisible by 9.

$$\mu = 8$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 16 = 7y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 16y_4.$$

Hence, $y_4 = t_5 = 1$.

$$\bar{Y} = 8\mu + 2k + 2 = 4 + (r - 1)\mu.$$

Thus, $8(\rho - 1) = (\rho - 1)\mu = 2k - 2$.

If $k = 9$ then $2k - 2 = 16$ and $\rho - 1 = 1$.

$\sigma = 21, e = 30, r = 11$ and the type turns out to be $[21 * 30, 1, ; 9^{10}, 5]$.

$$\mu = 7$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 14 = 6y_1 + 10y_2 + 12y_3.$$

No solution.

$$\mu = 6$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 12 = 5y_1 + 8y_2 + 9y_3.$$

No solution.

$$\mu = 5$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 10 = 4y_1 + 6y_2.$$

Then $y_1 = t_2 + t_5 = y_2 = t_3 + t_4 = 1$.

Hence,

$$5(\rho - 2) = 2k + 2 - 3 - t_4 - 3t_5.$$

If $k = 8$ then $2k + 2 - 3 - t_4 - 3t_5 = 15 - t_4 - 3t_5$. This is divisible by 5 whenever $t_4 = t_5 = 0$.

$\sigma = 14, u = 1, e = 21, r = 13$ and the type turns out to be $[14 * 21, 1, ; 6^{11}, 3, 2]$.

If $k = 9$ then there are no solution.

$$\mu = 4$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 8 = 3y_1 + 4y_2.$$

Then $y_2 = t_3 = 2$.

Hence,

$$4(\rho - 2) = 2k - 2.$$

Then $2(\rho - 2) = k - 1 = 8$ and $\rho = 6$.

$\sigma = 13, u = 0, e = 18, r = 14$ and the type turns out to be $[13 * 18, 1, ; 5^{12}, 3^2]$.

$$\mu = 3$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 6 = 2y_1.$$

Then $y_1 = t_2 + t_3 = 2$.

Hence,

$$3(\rho - 3) = 2k - 1 - t_3.$$

Then $k = 8, t_3 = 0$ and $\rho = 5$.

$\sigma = 10, u = 1, e = 15, r = 16$ and the type turns out to be $[10 * 15, 1, ; 4^{13}, 2^3]$.

$$\mu = 2$$

Then

$$\mathcal{Z}^* = 2\mu = 4 = y_1.$$

Then $y_1 = t_2 = .$

Hence,

$$\rho - 4 = k - 1.$$

If $k = 8$ then $\rho = 11, u = 1, p = 2$.

$\sigma = 8, u = 1, e = 12, r = 19$ and the type turns out to be $[8 * 12, 1, ; 3^{15}, 2^4]$.

If $k = 9$ then $\rho = 20, u = 0, p = 3$.

$\sigma = 9, u = 0, e = 12, r = 20$ and the type turns out to be $[9 * 12, 1, ; 3^{16}, 2^4]$.

6.7 case when $\mathcal{Z}^* = 0$

Suppose that $\mathcal{Z}^* = 0$. Then $0 = \mathcal{Z}^* = 2\mu - \tilde{q}$. Hence, $2\mu = \tilde{q} = k(p-1) - 2p^2$. Thus

$$2\mu + 2 = k(p-1) - 2p^2. \quad (25)$$

By $\bar{Y} = 8\mu + 2k + 2 = r\mu$, we obtain

$$\rho\mu = 2k + 2. \quad (26)$$

Thus

$$k(\rho p - \rho - 4) = 4 + 2\rho p^2 \quad (27)$$

6.7.1 case when $\rho = 1$

Suppose that $\rho = 1$. Then $k(p-5) = 4 + 2p^2$; thus

$$k = 2(p+5) + \frac{54}{p-5}. \quad (28)$$

Table 34: $B = 1, \rho = 1$

$p-5$	p	$54/(p-5)$	$2(p+5)$	k	u	μ	ν_1	σ	e
1	6	54	22	76	29	154	155	316	500
2	7	27	24	51	15	104	105	217	337
3	8	18	26	44	10	90	91	190	291
6	11	9	32	41	4	84	85	181	270
9	14	6	38	44	1	90	91	196	288

The types are as follows

1. $[316 * 500, 1; 155^9]$,
2. $[217 * 337, 1; 105^9]$,
3. $[190 * 291, 1; 91^9]$,
4. $[181 * 270, 1; 85^9]$,
5. $[196 * 288, 1; 91^9]$,

The types are as follows

1. $[316 * 342; 155^9]$,
2. $[190 * 196; 91^9]$,

Table 35: $B = 0, \rho = 1$

$p-5$	p	$p+5$	$54/(p-5)$	k	$k-4p$	u	μ	ν_1	σ	e
1	6	11	54	76	52	26	154	155	316	342
3	8	13	18	44	12	6	90	91	190	196

6.7.2 case when $\rho = 2$

Suppose that $\rho = 2$. Then $k(p-3) = 4 + 2p^2$; thus

$$k = 2(p+3) + \frac{20}{p-3}. \quad (29)$$

Table 36: $B = 1, \rho = 2$

$p-3$	p	$p+3$	20	k	$k-3p$	u	μ	ν_1	σ	e
1	4	7	20	34	22	11	35	36	76	123
4	7	10	5	25	4	2	26	27	61	90
5	8	11	4	26	2	1	27	28	64	93

The types are as follows

1. $[76 * 123, 1; 36^{10}]$,
2. $[61 * 90, 1; 27^{10}]$,
3. $[64 * 93, 1; 28^{10}]$,

Table 37: $B = 0, \rho = 2$

$p-3$	p	$p+3$	20	k	$k-4p$	u	μ	ν_1	σ	e
1	4	7	20	34	18	9	35	36	76	85
2	5	8	10	26	6	3	27	28	61	64

The types are as follows

1. $[76 * 85; 36^{10}]$,
2. $[61 * 64; 27^{10}]$.

6.7.3 case when $\rho = 3$

Suppose that $\rho = 3$. Then $k(3p - 7) = 4 + 6p^2$; thus

$$k = 2(p + 2) + \frac{2p + 32}{3p - 7}. \quad (30)$$

Hence, $p > 2$. Letting $m = \frac{2p+32}{3p-7}$, we obtain $Pm = 2p + 32$, where $P = 3p - 7$. Then $(3m - 2)P = 110$. From this, the next tables follow.

Table 38: $\rho = 3, B = 1$

$3m - 2$	$P = 3p - 7$	p	m	k	μ	ν_1	σ	u	e
10	11	6	4	20	14	15	36	1	52
22	5	4	8	20	14	15	34	4	53
55	2	3	19	29	20	21	45	10	76

Table 39: $\rho = 3, B = 0$

$3m - 2$	$P = 3p - 7$	p	m	k	μ	ν_1	σ	u	e
22	5	4	8	20	14	15	34	2	36

The types are as follows

1. $[36 * 52, 1; 15^{11}]$,
2. $[34 * 53, 1; 15^{11}]$,
3. $[45 * 76, 1; 21^{11}]$,
4. $[34 * 36; 15^{11}]$.

6.7.4 case when $\rho = 4$

Suppose that $\rho = 4$. Then $k(p - 2) = 1 + 2p^2$; thus

$$k = 2(p + 2) + \frac{9}{p - 2}. \quad (31)$$

Thus $p - 2 = 1, 3, 9$.

The types are as follows

Table 40: $\rho = 4, B = 1$

$p - 2$	p	$2p + 4$	$9/(p - 2)$	k	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
1	3	10	9	19	40	10	11	25	5	41
3	5	14	3	17	36	9	10	25	1	36

1. $[25 * 41; 11^{12}]$,
2. $[25 * 36; 10^{12}]$.

6.7.5 case when $\rho \geq 5$

Since $k \geq 3p$, it follows that

$$k(\rho p - \rho - 4) = 4 + 2\rho p^2 \geq 3(\rho p - \rho - 4)p.$$

Hence,

$$12p + 4 + 3\rho p \geq \rho p^2.$$

Defining a function $f(x, y)$ to be $yx^2 - 12x - 4 - 3yx$, we get $f(5, 5) = -14$, $f(6, 5) = 14$. Therefore, we see that if $y \geq 5$ and $x \geq 6$, then $f(x, y) \geq 0$.

Therefore, if $\rho \geq 5$ then $5 \leq 4$. We shall enumerate all types with $p \leq 5$.

$p = 2$

By (27), we obtain $k(\rho - 4) = 4 + 8\rho$. Hence,

$$(k - 8)(\rho - 4) = 36.$$

From this we obtain the following table.

Table 41: $p = 2, B = 1$

$k - 8$	$\rho - 4$	k	ρ	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
4	9	12	13	26	2	3	8	3	14
6	6	14	10	30	3	4	10	4	18
12	3	20	7	42	6	7	16	7	30
18	2	26	6	54	9	10	22	10	42
36	1	44	5	90	18	19	40	19	78

Table 42: $p = 2, B = 0$

$k - 8$	$\rho - 4$	k	ρ	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
4	9	12	13	26	2	3	8	2	10
6	6	14	10	30	3	4	10	3	13
12	3	20	7	42	6	7	16	6	22
18	2	26	6	54	9	10	22	9	31
36	1	44	5	90	18	19	40	18	58

The types are as follows

1. $[8 * 14, 1; 3^{21}]$,
2. $[10 * 18, 1; 4^{18}]$,
3. $[16 * 30, 1; 6^{15}]$,
4. $[22 * 42, 1; 10^{114}]$,
5. $[40 * 78, 1; 19^{13}]$.

1. $[8 * 10; 3^{21}]$,
2. $[10 * 13; 4^{18}]$,
3. $[16 * 22; 6^{15}]$,
4. $[22 * 31; 10^{114}]$,
5. $[40 * 58; 19^{13}]$.

$p = 3$

By (27), we obtain $k(\rho - 2) = 2 + 9\rho$. Hence,

$$(k - 9)(\rho - 2) = 20.$$

From this we obtain the following table.

Table 43: $p = 3, B = 1$

$k - 9$	$\rho - 2$	k	ρ	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
2	10	11	12	24	2	3	9	1	13
4	5	13	7	28	4	5	13	2	20
10	2	19	4	40	10	11	25	5	41
20	1	29	3	60	20	21	45	10	76

Table 44: $p = 3, B = 0$

$k - 9$	$\rho - 2$	k	ρ	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
5	4	14	6	30	5	6	15	1	16

The types are as follows

1. $[9 * 13, 1; 3^{20}]$,
2. $[13 * 20, 1; 5^{15}]$,
3. $[15 * 16; 6^{14}]$,
4. $[25 * 41, 1; 11^{12}]$,
5. $[45 * 76, 1; 21^{11}]$.

$$p = 4$$

By (27), we obtain $k(3\rho - 4) = 4 + 32\rho$. Hence, letting $K = 3k - 32$, $R = 3\rho - 4$, we get

$$KR = (3k - 32)(3\rho - 4) = 140.$$

From this we obtain the following table.

Table 45: $p = 4, B = 1$

K	R	$\rho - 2$	k	ρ	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
4	35	12	13	26	2	3	10	0	13	
10	14	14	6	30	5	6	16	1	23	
28	5	20	3	42	14	15	34	4	53	
70	2	34	2	70	35	36	76	11	123	

Table 46: $p = 4, B = 0$

K	R	$\rho - 2$	k	ρ	$2k + 2$	μ	ν_1	σ	u	e
28	5	20	3	42	14	15	34	2	36	
70	2	34	2	70	35	36	76	9	85	

The types are as follows

1. $[10 * 13, 1; 3^{21}]$,
2. $[16 * 23, 1; 6^{14}]$,
3. $[34 * 53, 1; 15^{11}]$,
4. $[76 * 123, 1; 36^{10}]$.
5. $[34 * 36; 15^{11}]$,
6. $[76 * 85; 36^{10}]$.

$$p = 5$$

By (27), we obtain $k(4\rho - 4) = 4 + 50\rho$. Hence, letting $K = 2k - 25$, $R = \rho - 1$, we get

$$KR = (2k - 25)(\rho - 1) = 27.$$

From this we obtain the following table.

Table 47: $p = 5$

K	R	ρ	k	μ	ν_1
1	27	28	13	1	2
3	9	10	14	3	4
9	3	4	17	9	10
27	1	2	26	27	28

If $B = 1$ then $u = (k - 3p)/2$ is integer; thus the case when $\rho = 4, k = 17, \mu = 9$ survives. Indeed, $u = (15 - 3 \times 5)/2 = 1$. Hence, $\sigma = 25, e = 36, r = 12$. The type turns out to be $[25 * 36, 1; 20^{12}]$.

If $B = 0$ then $u = (k - 4p)/2$ is integer; thus the case when $\rho = 2, k = 26, \mu = 27$ survives. The type turns out to be $[61 * 64; 28^{10}]$.

7 Hartshorne's Lemma

Suggested by Hartshorne ([5]), we consider a divisor $2D + \sigma K_S$. The intersection numbers of this and divisor D and Z , will produce useful identities among invariants.

By $\tilde{\theta}_2$ we denote $(2C + \sigma K_0) \cdot C$. From $(2D + \sigma K_S) \cdot D = 2\sigma\bar{g} - (\sigma - 2)D^2$ it follows that

$$2\sigma\bar{g} - (\sigma - 2)D^2 = \tilde{\theta}_2 + pY + 2\tilde{Z}.$$

By the way,

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_2 &= (2C + \sigma K_0) \cdot C \\
&= (\sigma Z_0 - (\sigma - 2)C) \cdot C \\
&= 2\sigma\bar{g}_0 - (\sigma - 2)C^2 \\
&= \sigma(\sigma\tilde{B} - 2\sigma - \tilde{B}) - (\sigma - 2)\sigma\tilde{B} \\
&= \sigma(\tilde{B} - 2\sigma).
\end{aligned}$$

If $B \geq 2$ then $\tilde{B} - 2\sigma = 2u + (B - 2)\sigma \geq 0$.

If $B = 0$ then $\tilde{B} - 2\sigma = 2u \geq 0$.

However, if $B = 1$ then $\tilde{B} - 2\sigma = 2e - 3\sigma$.

In the case when $2e - 3\sigma \geq 0$, then $\tilde{\theta}_2 \geq 0$.

In the case when $2e - 3\sigma < 0$, letting $L = -(2e - 3\sigma) > 0$, we consider $\tilde{\theta}_3 = (3C + eK_0) \cdot C$. Then

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_3 &= (3C + eK_0) \cdot C \\
&= (eZ_0 - (e - 3)C) \cdot C \\
&= 2e\bar{g}_0 - (e - 3)C^2 \\
&= e(\sigma\tilde{B} - 2\sigma - \tilde{B}) - (e - 3)\sigma\tilde{B} \\
&= -2\sigma e - e\tilde{B} + 3\sigma\tilde{B} \\
&= -2\sigma e - 2e^2 + e\sigma + 3\sigma(2e - \sigma) \\
&= \sigma(2e - 3\sigma) - e(2e - 3\sigma) \\
&= L(e - \sigma) \\
&= L(u + \nu_1).
\end{aligned}$$

Thus $\tilde{\theta}_3 = L(u + \nu_1) \geq 3L > 0$. Moreover,

$$2e\bar{g} - (e - 3)D^2 = \tilde{\theta}_3 + (p + u)Y + 3\tilde{Z}.$$

We say that the sign of the type (S, D) is $\text{RH}_{(+)}$ if either $B \neq 1$ or $B = 1$ and $2e - 3\sigma \geq 0$. Otherwise, we say the sign of the type is $\text{RH}_{(-)}$, namely in the case when $B = 1$ and $2e - 3\sigma < 0$.

Instead of D , we take Z . Then $(2D + \sigma K_S) \cdot Z = \sigma Z^2 - 2\bar{g}(\sigma - 2)$ and by θ_2^* we denote $(2C + \sigma K_0) \cdot Z_0$. Thus

$$\sigma Z^2 - 2\bar{g}(\sigma - 2) = \theta_2^* + p\bar{Y} + 2\tilde{Z}^*.$$

We want to show that $\theta_2^* \geq 0$ in the case of $\text{RH}_{(+)}$. Actually,

$$\begin{aligned}
\theta_2^* &= (2C + \sigma K_0) \cdot Z_0 \\
&= (\sigma Z_0 - (\sigma - 2)C) \cdot Z_0 \\
&= \sigma Z_0^2 - 2\bar{g}_0(\sigma - 2) \\
&= \sigma(\sigma\tilde{B} - 4\sigma - 2\tilde{B} + 8) - (\sigma - 2)(\sigma\tilde{B} - 2\sigma - \tilde{B} + 2) \\
&= (\sigma - 2)(\tilde{B} - 2\sigma)
\end{aligned}$$

Since $\theta_2^* = (\sigma - 2)(e - B\sigma + 2 - 2\sigma) = (\sigma - 2)(2u + B_2\sigma)$, it follows that $\theta_2^* = (\sigma - 2)(2u + B_2\sigma) \geq 8u \geq 0$, if $B \neq 1$.

If $B = 1$ then $\theta_2^* = (\sigma - 2)(2e - 3\sigma)$.

Hence, if $2e - 3\sigma \geq 0$, then $\theta_2^* \geq 4(2e - 3\sigma) \geq 0$.

In the case when the sign of the type is $\text{RH}_{(-)}$, namely if $2e - 3\sigma = -L$ is negative, consider $(3C + eK_0) \cdot Z_0$, which we denote by θ_3^* .

Then

$$eZ^2 - 2(e - 3)\bar{g} = \theta_3^* + (p + u)\bar{Y} + 3\bar{Z}^*.$$

By the way,

$$\begin{aligned} \theta_3^* &= (3C + eK_0) \cdot Z_0 \\ &= (eZ_0 - (e - 3))C \cdot Z_0 \\ &= eZ_0^2 - 2\bar{g}_0(e - 3) \\ &= e(\sigma\tilde{B} - 4\sigma - 2\tilde{B} + 8) - (e - 3)(\sigma\tilde{B} - 2\sigma - \tilde{B}) \\ &= e(2 + 5\sigma - 2e) - 3\sigma(\sigma + 1) \\ &= e(2 + 2\sigma + L) - 3\sigma(\sigma + 1) \\ &= 2e(\sigma + 1) - 3\sigma(\sigma + 1) + eL \\ &= (\sigma + 1)(2e - 3\sigma) + eL \\ &= L(e - \sigma - 1) \\ &= L(u + \nu_1 - 1) \geq 2L(u + 2) > 0. \end{aligned}$$

7.1 invariant ω

Since $\omega = 3\bar{g} - D^2$, it follows that

$$\begin{aligned} 2\sigma\bar{g} - (\sigma - 2)D^2 &= 2\sigma\bar{g} + (\sigma - 2)(\omega - 3\bar{g}) \\ &= (\sigma - 2)\omega - (\sigma - 6)\bar{g}. \end{aligned}$$

Therefore,

$(2D + \sigma K_S) \cdot D = (\sigma - 2)\omega - (\sigma - 6)\bar{g}$ and it follows that

$$(\sigma - 2)\omega - (\sigma - 6)\bar{g} = \tilde{\theta}_2 + pY + 2\tilde{Z}. \quad (32)$$

Thus, when the signature of type is $\text{RH}_{(+)}$, then

$$(\sigma - 2)\omega \geq (\sigma - 6)\bar{g}.$$

Hence, if $\sigma \geq 8, \nu_1 \geq 3$ then $\bar{g} \leq 3\omega$.

When the signature of the type is $\text{RH}_{(-)}$, then

$$\begin{aligned} 2e\bar{g} - (e-3)D^2 &= 2e\bar{g} + (e-3)(\omega - 3\bar{g}) \\ &= (e-3)\omega - (e-9)\bar{g} \end{aligned}$$

and hence,

$$(e-3)\omega - (e-9)\bar{g} = \tilde{\theta}_3 + (p+u)Y + 3\tilde{Z}.$$

Thus,

$$(e-3)\omega \geq (e-9)\bar{g}.$$

If $e \geq 12, \nu_1 \geq 3$ then $\bar{g} \leq 3\omega$.

7.2 invariant α

Replacing ω by $\alpha - \bar{g}$, we obtain

$$(\sigma-2)\omega - (\sigma-6)\bar{g} = (\sigma-2)(\alpha - \bar{g}) - (\sigma-6)\bar{g} = (\sigma-2)\alpha - 2(\sigma-4)\bar{g}.$$

Hence,

$$(\sigma-2)\alpha - 2(\sigma-4)\bar{g} = \tilde{\Theta}_2.$$

Here by $\tilde{\Theta}_2$ we denote $\tilde{\theta}_2 + pY + 2\tilde{Z}$.

Furthermore,

$$(e-3)\omega - (e-9)\bar{g} = (e-3)(\alpha - \bar{g}) - (e-9)\bar{g} = (e-3)\alpha - 2(e-6)\bar{g} = \tilde{\Theta}_3.$$

Here by $\tilde{\Theta}_3$ we denote $\tilde{\theta}_3 + (p+u)Y + 3\tilde{Z}$.

7.3 A

Since $A = Z^2 - \bar{g}$, it follows that

$$\begin{aligned} \sigma Z^2 - 2(\sigma-2)\bar{g} &= (\bar{g} + A) - 2(\sigma-2)\bar{g} \\ &= \sigma A - (\sigma-4)\bar{g}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\sigma A - (\sigma-4)\bar{g} = \theta_2^* + p\bar{Y} + 2Z^*.$$

When the signature of the type is $\text{RH}_{(+)}$, then

$$\sigma A \geq (\sigma - 4)\bar{g}.$$

If $\sigma \geq 6$, then $\bar{g} \leq 3A$.

When the signature of the type is $\text{RH}_{(-)}$, then

$$\begin{aligned} eZ^2 - 2(e - 3)\bar{g} &= e(A + \bar{g}) - 2(e - 3)\bar{g} \\ &= eA - (e - 6)\bar{g}. \end{aligned}$$

Moreover,

$$eA - (e - 6)\bar{g} = \theta_3^* + (p + u)\bar{Y} + 3Z^* \geq 0.$$

Thus,

$$eA \geq (e - 6)\bar{g}.$$

If $e \geq 9$ then $\bar{g} \leq 3A$.

7.4 A and α

We obtain the following identities:

$$(\sigma - 2)\alpha - 2(\sigma - 4)\bar{g} = \tilde{\Theta}_2. \quad (33)$$

$$(e - 3)\alpha - 2(e - 6)\bar{g} = \tilde{\Theta}_3. \quad (34)$$

$$(\sigma - 2)\omega - (\sigma - 6)\bar{g} = \tilde{\Theta}_2. \quad (35)$$

$$(e - 3)\omega - (e - 9)\bar{g} = \tilde{\Theta}_3. \quad (36)$$

$$\sigma A - (\sigma - 4)\bar{g} = \Theta_2^*. \quad (37)$$

$$eA - (e - 6)\bar{g} = \Theta_3^*. \quad (38)$$

By Θ_{2-1}^* we denote $2\Theta_2^* - \tilde{\Theta}_2$, then

$$2\sigma A - (\sigma - 2)\alpha = \Theta_{2-1}^*.$$

When the sign of the type is $\text{RH}_{(+)}$, then $\Theta_{2-1}^* \geq 0$ and so

$$2\sigma A \geq (\sigma - 2)\alpha.$$

By Θ_{3-1}^* we denote $2\Theta_3^* - \tilde{\Theta}_3$, that is non-negative and so

$$2eA - (e - 3)\alpha = \Theta_{3-1}^*.$$

When the sign of the type is $\text{RH}_{(-)}$, then $\Theta_{3-1}^* > 0$ and so

$$2eA \geq (e - 3)\alpha.$$

7.5 estimates

Proposition 6 *Suppose that either $\sigma \geq 8, \nu_1 \geq 3$ or $e \geq 12, \nu_1 \geq 3$.*

1. *If ω is even, $\bar{g} \leq 3\omega$. The identity occurs whenever $[8 * 8; 4^r]^*, 1 \leq r \leq 7$.*
2. *If $\bar{g} < 3\omega$ then $\bar{g} \leq 3\omega - 3$. The identity occurs whenever $[8 * 8; 4^r, 3]^*, 0 \leq r \leq 7$.*
3. *If $\bar{g} < 3\omega - 3$ then $\bar{g} \leq 3\omega - 5$.*
4. *If ω is odd, then $\bar{g} \leq 3\omega - 4$. The identity occurs whenever $[8 * 8; 4^r, 2]^*, 1 \leq r \leq 7$.*

8 bibliography

References

- [1] W.Barth, C.Peters, A. van de Ven, Compact Complex surfaces, Ergebnisse der Mathematik, Springer Verlag, 1984.
- [2] E.Bombieri, Canonical models of surfaces of general types, Publ. Math., I.H.E.S., **42**(1973), 171-219.
- [3] J.L. Coolidge, A Treatise on Algebraic Plane Curves, Oxford Univ. Press., (1928).
- [4] Oliver Debarre, Higher-dimensional Algebraic Geometry, UTX, Springer, (2001).
- [5] R. Hartshorne, Curves with high self-intersection on algebraic surfaces, Publ.I.H.E.S. **36**, (1970), 111-126.
- [6] S.Iitaka, On irreducible plane curves, Saitama Math. J. **1** (1983), 47–63.
- [7] S.Iitaka, Birational geometry of plane curves, Tokyo J. Math., **22**(1999), pp289-321.
- [8] S.Iitaka, On logarithmic plurigenera of algebraic plane curves, in Research on Birational Properties of Algebraic Curves, Gakushuin University, 2006, Jan., p 39 – 112, also in Iitaka’s web page¹.
- [9] S.Iitaka, Relationships between birational invariants ω and σ of algebraic plane curves, in Research on Birational Properties of Algebraic Curves, Gakushuin University, 2010, Feb., p 51 – 142.
- [10] S.Iitaka, On birational invariants A and Ω of algebraic plane curves, in Algebraic Geometry, Mejiro, 2010, Gakushuin University, 2011, Feb., p 139 – 188.
- [11] S.Iitaka, On the nonbirational invariant e of algebraic plane curves, in Birational Geometry of Algebraic Plane Curves and related Topic in Algebraic Geometry, 2010, Gakushuin University, 2010, Feb., p 165 – 188.

¹<http://www-cc.gakushuin.ac.jp/%7E851051/iitaka1.htm>

- [12] S.Iitaka, Logarithmic Kodaira dimension and mixed plurigenera, in Research on Birational Properties of Algebraic Curves, Gakushuin University, 2009, Feb., p 27 – 66.
- [13] O.Matsuda, On numerical types of algebraic curves on rational surfaces, Research on Birational Geometry of Algebraic Curves, Gakushuin University, 2006, 167–174.
- [14] M.Nagata, On rational surfaces II, 1960.

Shigeru IITAKA
e-mail : iitakashigeru@gmail.com

特異平面曲線のゴナリティ再訪

(津山シンポジウム, 2012 年 7 月 30 日)

酒井文雄

1 はじめに

既約平面代数曲線 $C \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の次数が d で, 特異点の最大重複度が ν のとき, C は**タイプ** (d, ν) であるという. 早いもので, もう 8 年も前のことであるが, タイプ (d, ν) の平面曲線 C の**ゴナリティ** G が等号 $G = d - \nu$ を満たすための判定条件をいくつか証明した [4]. そのときの議論の中に, 次のような不等式

$$r + \delta - Q(k) \geq \sum_{m_i \neq 1} \frac{m_i(m_i - 2)}{4}$$

があった. しかし, 当時は, 右辺は非負だからということで, 単に, 不等式

$$r + \delta - Q(k) \geq 0$$

を用いた. 最近になって, 無視した右辺の項を考慮して証明を再検討した結果, 所々で判定条件を改良することができた. ところで, 結論を等号ではなく, 下からの評価式

$$G \geq d - \nu - q \quad (q \text{ は非負整数})$$

の形で述べることができ, 有効であるということは 2006 年頃にわかっていた. もちろん, $q = 0$ とすれば, 等号が結論になる^{*1}.

2 主結果

結果を記述するために, いくつかの不変量と記号を定めておく.

- (i) $Q(x) = x(d - x)$. 2 次関数 $Q(x)$ は $0 \leq x \leq d/2$ の範囲で単調増加関数である.
- (ii) $\text{Data}(C) = [m_1, \dots, m_n]$. ここで, $m_1, \dots, m_n$ は C の特異点の重複度列 (無限小近傍の点を含む). $[3, \dots, 3, 2, \dots, 2]$ を簡略形 $[3_\alpha, 2_\beta]$ で表す. さらに, 次の不変量を用いる.

^{*1} 重複度 ν の点からの射影を考えることにより, $G \leq d - \nu$ である.

- $\delta = \sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i - 1)}{2}$
- $V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i - 2)}{4}$

(iii) ν_i で, i 番目に大きい重複度を表す. つまり, $m_1, \dots, m_n$ を大きい順に並べて, $\nu_1, \dots, \nu_n$ とする. 特に, $\nu_1 = \nu$ である. また, $i > n$ については, $\nu_i = 1$ としておく. このとき, 次の不変量を定義する.

$$\sigma = \frac{\nu_2}{\nu} + \frac{\nu_3}{\nu} + \frac{\nu_4}{\nu}$$

(iv) q は非負整数で, $2 \leq d - \nu - q \leq d - \nu$ を満たすとする.

(v) 自然数 k_0 を次で定義しておく.

$$k_0 = \begin{cases} \max \left\{ \left\lfloor \frac{d}{\nu} \right\rfloor, 3 \right\} & d/\nu \geq \sigma - q/\nu \text{ の場合} \\ \max \left\{ \left\lfloor \frac{d}{\nu} \right\rfloor, 2 \right\} & \text{その他の場合} \end{cases}$$

定理 1 タイプ (d, ν) の平面曲線 C について ($d \geq 6$), 2 条件

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \delta \leq Q \left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right) - (d - \nu - q) \\ \text{(B)} \quad & \delta \leq Q(k_0) - (d - \nu - q) + V \end{aligned}$$

が満たされていると, 下からの評価式

$$G \geq d - \nu - q$$

が成立する.

注意 1 (1) $\nu = 2$ の場合, 条件 (A) = 条件 (B) だから, 定理の主張は

$$\delta \leq Q \left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right) - (d - 2 - q) \quad \Rightarrow \quad G \geq d - 2 - q$$

になる. 特に, $q = 0$ の場合には, Coppens-Kato の定理 [1] に他ならない.

(2) $\nu = 2$ の場合, 下からの評価は最良のものである. 曲線

$$C_k : y^{2k+1} = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^2$$

については, $d = 2k + 1$, $\text{Data}(C) = [2k^2]$, $\delta = k^2$, $Q([d/2]) = k(k + 1)$ であるので, $q = k - 1$ に対して, $\delta = Q([d/2]) - (d - 2 - q)$ が成立する. したがって, 定理 1 により, $G \geq k$ が従う. ところで, C_k は曲線 $y^{2k+1} = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^2$ に双有理で, $G \leq k$ となることがわかるので, 等号 $G = k$ が成立する.

(3) 証明方法からすると, 条件 (A) はこれ以上弱くすることはできない. 条件 (B) には, まだ改良の余地があると思われる. $\nu \geq 6$ かつ $k_0 = [d/\nu]$ の場合には, 条件 (B) $\Rightarrow$ 条件 (A) が証明できる. 適用例を挙げておく. 曲線

$$C : y^{30} = \prod_{i=1}^2 (x - a_i)^6 \prod_{j=1}^{24} (x - b_j)$$

の場合, $\nu = 6$ かつ $k_0 = 6$ であり, $q = 0$ について, 条件 (B) が成立する. したがって, $G = 30$ が結論される.

今回, $\nu = 3$ の場合には, 条件 (B) を除くことに成功した.

定理 2 タイプ $(d, 3)$ の平面曲線 C については ($d \geq 6$), 定理 1 の条件 (A) のみかが満たされていれば, 評価式

$$G \geq d - 3 - q$$

が成立する.

注意 2 $\nu \geq 5$ のとき, $q = 0$ に対して, 条件 (A) のみでは, 結論 $G = d - \nu$ は成立しない. 反例が存在する.

3 有理関数

タイプ (d, ν) の平面曲線 $C : F = 0$ 上の有理関数 φ は射影平面上 $\mathbf{P}^2$ 上の有理関数 $\Phi = G/H$ の制限 $\varphi = \Phi|_C$ として得られる. ここで, G, H は同じ次数の互いに素な同次多項式である (ただし, $F \nmid H$). いま, $k = \deg(G) = \deg(H)$ のとき, Φ を**次数 k の有理関数**という. 次数 $r = \deg(\varphi)$ は下記のように計算される. $\mathbf{P}^2$ にブローアップを逐次施して, 有理関数 Φ の基点と C の特異点を同次に解消する.

$$\begin{array}{ccc} X_s = X \supset \tilde{C} & & \\ \downarrow & & \\ \vdots & & \searrow \tilde{\Phi} \\ \downarrow & & \\ X_1 & & \\ \downarrow & & \\ X_0 = \mathbf{P}^2 \supset C & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

各 i について, $\pi_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ を点 P_i のブローアップとし, C の逆像における P_i の重複度を m_i で表す ($m_i \geq 0$). さらに, X における C の逆像 (strict transform) を $\tilde{C}$ で表すことにする. このとき, $\tilde{\Phi}$ のファイバー f と $\tilde{C}$ との交点の個数が求める次数 r である. 構成法から,

$$\begin{aligned} \tilde{C} &\sim \pi^* O(d) - \sum_{i=1}^s m_i E_i & (E_i \text{ は } \pi_i \text{ の例外曲線の全逆像}), \\ f &\sim \pi^* O(k) - \sum_{i=1}^s a_i E_i & (a_i \text{ は非負整数}). \end{aligned}$$

となる.

補題 1 次の等式が成立する.

$$(i) \quad k^2 = \sum_{i=1}^s a_i^2$$

$$(ii) \quad r = dk - \sum_{i=1}^s a_i m_i$$

命題 1 (i) $r + \delta - Q(k) \geq V$ (冒頭で述べた不等式).

(ii) $r < d - \nu$ ならば, 不等式 $k \geq k_0$ が成立する.

証明. (i) [4] 参照. (ii) $r < d - \nu$ とする. 簡単にわかるように, $k \geq 2$ である. また, $k = 2$ のときには, $d/\nu < \sigma$ である ([4]). 補題 1 (ii) より, $r \geq dk - (\sum a_i)\nu$ を得る. ここで, $\sum a_i \leq \sum a_i^2 = k^2$ だから, $r \geq k(d - k\nu)$ となる. 仮定 $r < d - \nu$ と合わせると, $(k^2 - 1)\nu > (k - 1)d$ となり, $k + 1 > d/\nu$ を得る. したがって, $k \geq [d/\nu]$ である.

4 証明

定理 1 の証明. (1) 背理法で示す. $G < d - \nu - q$ を仮定すると, C 上の有理関数 φ で, $r = \deg(\varphi) < d - \nu - q$ となるものが存在する.

(2) 次の補題により, 条件 (A) を仮定すれば, $\mathbf{P}^2$ 上の有理関数 Φ で, $\Phi|_C = \varphi$ かつ $k = \deg(\Phi) < [d/2]$ を満たすものが存在する.

補題 2 ([4, 5], 原型は [1, 2]) 次数 d の平面曲線 C 上の有理関数 φ を考え, $r = \deg(\varphi)$ とおく. もし, 自然数 $l < d$ で不等式

$$r + \delta < Q(l + 1)$$

を満たすものがあれば, $\mathbf{P}^2$ 上の有理関数 Φ で φ を誘導し, 次数 $k = \deg(\Phi) \leq l$ となるものが存在する.

(3) 命題 1 (ii) により, $k \geq k_0$ であり, $k_0 \leq k < [d/2]$ だから, $Q(k_0) \leq Q(k)$ である. 次に, 命題 1 (i) により,

$$r + \delta \geq Q(k) + V$$

である. したがって, 不等式 $d - \nu - q + \delta > Q(k_0) + V$ が成立する. すなわち,

$$\delta > Q(k_0) - (d - \nu - q) + V$$

となり, 条件 (B) に矛盾する.

定理 2 の証明. $\nu = 3$ の場合, $\text{Data}(C) = [3_\alpha, 2_\beta]$ とする. 定理 1 の証明と同様に, $r = \deg(\varphi) < d - 3 - q$ となる C 上の有理関数 φ と φ を誘導する $\mathbf{P}^2$ 上の有理関数 Φ で, $k = \deg(\Phi) < [d/2]$

となるものの存在を仮定することができる. $\nu = 3$ の場合には, 評価式 $\sum a_i m_i \leq 2k^2 + \alpha$ を示すことができ, その結果,

$$k > \frac{d}{2} - \lambda - 1 \quad \left(\lambda = \frac{\alpha - 1 - q}{2([d/3] - 1)} \right)$$

が成立する. そこで,

$$k_1 = \left\lfloor \frac{d}{2} - \lambda \right\rfloor$$

と定めると, $k \geq k_1$ が成立する. さらに, 次を示すことができる. 詳細は [5] 参照.

補題 3 不等式 $V \geq Q([d/2]) - Q(k_1)$ が成立する.

さて, 命題 1 (i) により,

$$r + \delta \geq Q(k) + V \geq Q(k_1) + V$$

となり, 不等式

$$\delta > Q(k_1) + V - (d - 3 - q)$$

を得る. 条件 (A) と併せると, $Q([d/2]) > Q(k_1) + V$ となり, これは補題 3 に矛盾する.

参考文献

- [1] M.Coppens and T.Kato, The gonality of smooth curves with plane models, Manuscripta Math. **70**, 5–25 (1992).
- [2] M.Coppens and T.Kato, Correction to the gonality of smooth curves with plane models, Manuscripta Math. **71**, 337–338 (1991).
- [3] M.Namba, Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces, Lecture Notes in Math. **767**, Springer-Verlag, 1979.
- [4] M.Ohkouchi and F.Sakai, The gonality of singular plane curves, Tokyo J. Math. **27**, 137 – 147 (2004).
- [5] F.Sakai, The gonality of singular plane curves II, To appear in Proceedings of the Conference on Affine Algebraic Geometry in Osaka, March, 2011.

酒井文雄

〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 2 5 5

埼玉大学大学院理工学研究科

E-mail: fsakai@rimath.saitama-u.ac.jp

平面代数曲線と共に

(津山シンポジウム, 2012 年 7 月 31 日)

酒井文雄

1 はじめに

5月末に「平面代数曲線」(共立出版)という本を出版しました。その内容は、埼玉大学や学習院大学、およびその他の大学で行った講義や集中講義を基にまとめたものです。思えば、数学科に進学して以来、平面代数曲線は常に身近にあったような気がします。特に、1979年に埼玉大に着任して以降、学部や大学院のセミナーのテーマの多くは平面代数曲線でした。また、1988年頃からは私自身の研究テーマの一つにもなりました。

津山シンポジウムで講演する機会をいただいたので、代数曲線の本(教科書)の変遷を調べてみようという気になり、古典的な本を何冊か集めてみました。驚いたことに、昔は入手が困難であった多くの古い本が Web サイトからの Download が可能になっていました。

2 超古典

1800 – 1900 に出版された本には次のようなものがありました。

発行年	著者	題名
1830	Plücker	Theori der algebraischen Curven
1852	Salmon	A Treatise on the Higher Plane Curves
1861	Hesse	Vorlesungen über analytischen Geometrie
1876	Clebsch	Vorlesungen über Geometrie
1894	M.Noether & Brill	Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit

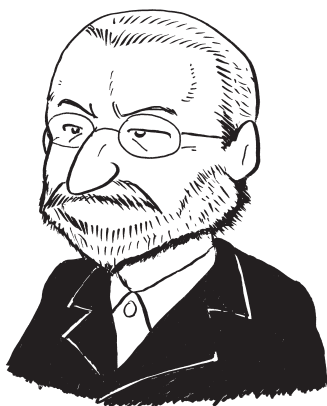
Plücker は 1834–1868 の間ボン大学教授でしたが、1847 年以降は 物理学科に所属し、晩年数学に復帰したのだそうです(クラインはその当時の弟子)。目次によると、主な内容は特異点、Plücker 公式、特異 4 次曲線の分類、2 重接線などです。

Salmon はアイルランドの人で、所属は Dublin にある Trinity College でした。神学の著作もあり、学長も務めました。また、チェスの棋士でもあったそうで、Dublin チェス協会会長 (1890–1903) の経歴もあります。ケイリー (1821–1895, Cambridge 大) やシルベスター (1814–1897) が友人でした。第2版 (1873) は、ケイリーに手伝ってもらったとのこと。本の序文では、ポンスレ、シャルル、Plücker に言及しています。内容は、座標、3次曲線、4次曲線、超越曲線、曲線の変換などです。

Hesse はヤコビが教授陣にいたケーニヒスベルグ大で学びました。Hesse は情熱的な講義を行ったそうです。弟子にアロンホルド、Clebsch、リプシッツなどがいます。その後、ハイデルベルグ大 (1856–1868) や、ミュンヘン工科大 (1868–1874) に転任しました。ヘッセ行列式、3次曲線のヘッセ標準型などは有名です。講義録の内容は空間内の平面、パスカル6辺形、同次座標、行列式、同次関数、2次曲面、2次曲面の極、線形変換、Dupin の定理などです。

Clebsch はケーニヒスベルグ大で Hesse に学びました。その後、ギーセン大 (1863–1868) でゴルダンと共同研究をし (アーベル関数論)、さらに、Brill, Max Noether, リンデマン、リューローなどと代数幾何のドイツ学派を作りました。また、ゲッティンゲン大 (1868–1872) 時代には、C. ノイマンと共に数学雑誌 Math. Ann. を創刊しました。突然の死 (ジフテリア, 享年 39 才) により、友人や弟子達で講義録を出版することになったそうです。元になった講義は円錐曲線の解析幾何 (夏学期 1871), 代数曲線論 (冬学期 1871/72), 形式の理論 (夏学期 1872) でした。講義録では、2次2類曲線、形式入門 (終結式, 判別式), 代数曲線の一般論, 3次3類曲線, 代数曲線の幾何とアーベル積分 (随伴曲線) などが扱われています。

Max Noether と Brill の共著の著作は過去と現在の代数関数論の発展に関する総合報告です。Max Noether の祖父が Samuel から Nöther に改名 (ユダヤ人の強制改名) したのだそうです。ハイデルベルグ大で学び、学位は天文学でしたが、卒業後、ギーセン大に滞在し、Clebsch と共同研究し、私講師の Brill に出会いました。ほとんど毎年、Math. Ann. に論文を掲載 (1870–1921) しています。エルランゲン大の教授に就任しました。



Max Noether (1844–1921)

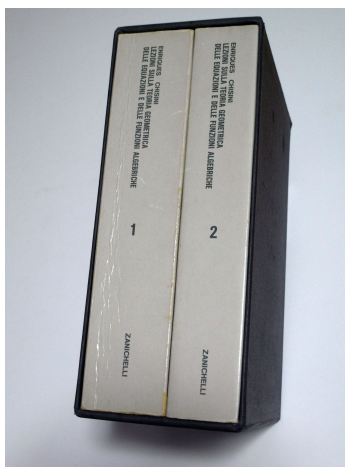
3 古典

次に, 1900–1970 に出版された本のリストを作ってみました. ここで, 古典というのは, 私の学生時代には既に存在していたという意味です. ただ, 学生時代に読んだ記憶はありません.

発行年	著者	題名
1901	Basset	Cubic and Quartic Curves
1902	Loria	Spezielle algebraische und tranzendenten Ebene Kurven
1915	Enriques	Lezioni sulla theoria geometrica delle Equazione e delle funzioni algebrique
1920	Hilton	Plane Algebraic Curves
1921	Severi	Vorlesungen über algebraichen Geometrie
1928	Coolidge	A Treatise on Algebraic Plane Curves
1939	vd.Waerden	Einführung in der algebraischen Geometrie
1950	Walker	Algebraic Curves
1969	Fulton	Algebraic Curves

Loria (トリノ大, 1862–1954) の本に述べられている項目は直線, 円, 円錐曲線, 3次曲線, 4次曲線, 5次以上の特殊曲線, 任意次数の特殊曲線などで, 特殊な平面曲線の記述が詳しい.

Enriques (1871–1946) はピサ大出身で, ローマ大に移り, カステルヌオーヴォとの共同研究をしました. この講義録に述べられている項目は対応の原理と応用, 極曲線に基づいた平面曲線の基本定理, 代数曲線の特異点, 曲線と一変数関数, 楕円関数とアーベル関数などです.



Chisini による Enriques の講義録

Hilton の本の序文には次のようなことが書かれています。

平面代数曲線論は今でも多くの数学科の学生を魅了しているが、英語の読者には適当な本が少ない。Salmon の古典的な本はその当時の要求には応えるものであったが、最終版は 40 年も前の出版であり、大分前から絶版である。

この本に述べられている主な項目を列举しておきます。特異点、接線、プリュッカー数、2 次変換、特異 3 次曲線、非特異 3 次曲線、有理 4 次曲線、不足数 1 または 2 の 4 次曲線、非特異 4 次曲線。

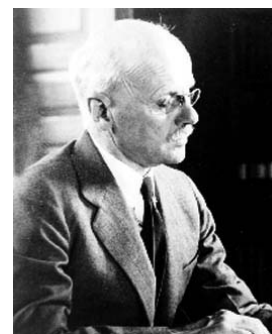
Severi (1879–1961) はトリノ大で C. セグレに学び、ボローニャ大で Enriques の助手、ピサ大でベルティーニの助手を務めました。第一次世界大戦時には砲兵隊に属しました、1922 年より、ローマ大。この講義録の主な内容は、平面曲線の線形系、有理および双有理変換、代数曲線上の線形点列、曲線の種数、2 曲線間の対応、種数 p の曲線のモジュライ、リーマン面上の代数関数、アーベル積分、アーベルの定理とその系などです。

Coolidge (1873–1954) はアメリカ人で、Harvard 大、Oxford 大を卒業後、コネチカット州で教師をしていたときに、後のルーズベルト大統領を教え、生涯の友となったそうです。1899 年以降 Harvard 大に移り、1902 年から 2 年間、トリノ大の C. セグレ、ボン大のシュトゥーディの下で学び、シュトゥーディの指導により学位を取得しました。第一次世界大戦時中は陸軍少将でした、1918 年にハーバード大教授に昇任しました。Coolidge の本の序文には次のようなことが書いてあります（抜粋）。

1 年間に発表される数学の著書や論文数は少なくとも 4000 編に上るので、新たに著書を出すに当たっては、新しい結果を含むか新しい形でなければならない。この本は後者である。

平面代数曲線が数学の流行であったことがあった。100 年前には、メビウスや Plücker は、射影座標、極曲線、短縮記号を発展させた。50 年前には不変式や余不変式が華やかであり、Salmon の本や Clebsch の大著がよく読まれた。同時期に、複素関数論、積分論、Clebsch やクラインの仕事は数学思想に不朽の影響を残した。

流行が去った後でも、イタリアでは、セグレ、カステルヌオーボ、Enriques, Severi などの貢献により、代数幾何への関心が広く残った。Salmon の「高次平面曲線」は形式においても内容においても古くなったし、Enriques の講義録は魅力的に書かれてはいるが歴史的な記述が多い。Severi の講義録はすぐれた本であるが、平面曲線の多くの重要な部分が省かれている。比較的新しい Hilton やガングリの本は理論の完全な解説ではなく教科書である。この本を書くときの困難は材料や方法の選択であった。代数的な不変式論に多くのページを割かないことにした。クラインやポアンカレによって発展させられた主題については簡単に触れるのみにした。大部分はイタリア学派の精神と流儀に基づいて書いた。その背後にある Max Noether の貢献は非常に大きい。アーベルの定理については証明なしで述べた。数論的な方法についてはヘンゼル・ランズベルグの本を見てほしい。



van der Waerden (1903–1996) の本の序文（要約，前田博信訳）から引用します。

ザリスキーの代数曲面論を読んでいたら，代数幾何の入門書を書こうという考えが以前にも増して固まってきた．代数曲線や曲面の講義が役に立った．ドイリンク博士とガルテン博士の講義ノートを利用することができた．内容は必要，不必要を基準として選択した．

この本の第3章（平面代数曲線）の内容は次の通りです．ベズーの定理，直線と超曲面の交点，曲線の有理変換，双対曲線，曲線の分枝特異点の分類，変曲点，ヘッセの曲線，3次曲線，3次曲線上の点群，特異点の解消，種数の不変性，プリュッカーの公式．

Walker の本の目次は次のようになっています．1. 代数的準備，2. 射影空間，3. 平面代数曲線，4. 形式的べき級数，5. 曲線の変換，6. 線形系．序文には次のようなことが書いてあります．

この本は代数幾何研究のための出発点を提供するために書いた．トピックスや方法は下記のような考えの元を選んだ．

- 可能な限り初等的な扱いとすること
- 代数幾何の問題を処理する最近発展した代数的方法のいくつかを紹介すること
- これらの方法と古典的な解析的方法や幾何学的方法との関係を示すこと
- さらに一般的方法を具体的な幾何的問題に応用すること

このような判定条件により，曲線論のトピックスの選択は双有理変換と線形系が中心になった．題材の教育経験から，基本的な代数や射影幾何への入門が必要であることがわかったので，これらを最初の二つの章に入れた．そのことで，この本はほぼ自己充足的になった．方法や定理の証明，問題等は様々な原典から取った．特に，Severi の講義録，van der Waerden の「代数幾何入門」および「現代代数」，レフシェッツ，ザリスキーの講義録などである．

Fulton (1939–) の本は著者が 30 才のときの著作で，1967-68 年にブランダイス大で行った学部向け講義および大学院向けの集中講義に基づいています．序文には次のように書かれています．

この本の目的は，現代代数幾何の観点から見た代数曲線論を，過度な準備なしで，展開することである．

目次：1. アフィン代数的集合，2. アフィン代数多様体，3. 平面曲線の局所的性質，4. 射影多様体，5. 射影平面曲線，6. 多様体，射，有理射，7. 特異点の解消，8. リーマン・ロッホの定理．



William Fulton (2006)

4 近代

埼玉大学在職中 (1979–2012) , 学部や大学院のセミナーにおけるテキストとして用いた本の中で代数曲線に関する本のリストを作ってみました. 上記古典からは, Walker, Fulton を何度か用いました. それぞれ, 一緒に読んだ学生の顔と共に懐かしく思い出します.

出版年	著者	題名
1976	Mumford	Algebraic Geometry I
1979	河合壮一	代数幾何学
1980	小野 孝	オイラーの主題による変奏曲
1981	Brieskorn	Ebene algebraische Kurven
1982	飯高 茂	An Introduction to Birational Algebraic Geometry
1984	難波 誠	Geometry of Projective Curves
1989	Griffiths	Introduction to Algebraic Curves
1990	Abyankar	Algebraic Geometry for Scientists and Engineers
1991	リード	初等代数幾何学講義
1992	Kirwan	Complex Algebraic Curves
1992	Cox 他	Ideals, Varieties and Algorithms
1993	Stichtnoth	Algebraic Function Fields and Codes
1993	上野健爾	代数幾何学入門
1995	Miranda	Algebraic Curves and Riemann Surfaces
1996	Völklein	Groups as Galois Groups
1998	Bix	Conics and Cubics
1998	Gibson	Elementary Geometry of Algebraic Curves
2001	Fischer	Plane Algebraic Curves

参考文献

- [1] Indexes of Biographies :<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>
- [2] クライン (彌永昌吉監修, 足立恒雄, 浪川幸彦監訳) : 19 世紀の数学, 共立出版, 1995
- [3] コルモゴロフ, ユシケヴィッチ編 (小林昭七監訳) : 19 世紀の数学 II, 朝倉書店, 2008

特異点を2つ持つ有理尖点平面曲線について

戸野 恵太

C を複素射影平面 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ 上の代数曲線とする。 C の局所的に既約な特異点を**尖点**と呼ぶ。以後 C は特異点として尖点のみを持つ有理曲線であるとする。このような C を**有理尖点平面曲線**と呼ぶことにする。 $\sigma: V \rightarrow \mathbf{P}^2$ を C の特異点の最小埋め込み解消とする。これは $\sigma^{-1}(C)$ が正規交差因子になる最短のブローアップの列の合成である。 σ による C の固有変換を C' と書く。本稿では C' の自己交点数 $(C')^2$ を考察する。例えば C を $y^d = x^{d-1}z$, $d \geq 3$ で定義される曲線とする。ただし (x, y, z) は $\mathbf{P}^2$ の同次座標である。このとき C は尖点を1つだけ持つ有理尖点平面曲線で $(C')^2 = d$ である。

C の尖点 P の**重複度列**を $\overline{m}_P(C)$ または単に $\overline{m}_P$ と書く。これは P の重複度から始めて、 σ の P 上 (無限小近傍の点も含む) の各ブローアップによる C の固有変換の例外曲線との交点における重複度を並べたものである。なお $\overline{m}_P$ に同じ重複度 m が k 個続くときそれを m_k と略記する。また最後の連続する1を省略する。例えば (2_k) は A_{2k} 型特異点の重複度列である。[SST] に従って、 C の尖点が $P_1, P_2, \dots, P_n$ であるときこれらの重複度列の順序を無視した組 $[\overline{m}_{P_1}, \overline{m}_{P_2}, \dots, \overline{m}_{P_n}]$ を $\text{Data}(C)$ と書く。例えば尖点を3つ持つ有理尖点4次曲線 C について $\text{Data}(C) = [(2), (2), (2)]$ である。

C を尖点を2つ持つ有理尖点平面曲線とする。 C の補集合の対数的小平次元を $\overline{\kappa} = \overline{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C)$ と書くと [W, Ts] により $\overline{\kappa} \geq 1$ が成立する。また [To2] より $(C')^2 \leq 0$ が成立する。さらに $(C')^2 = 0$ であることと $\overline{\kappa} = 1$ は同値である。本稿では尖点を2つ持つ有理尖点平面曲線 C で $(C')^2 = -1$ をみたすものを考察する。

定理 1. C を尖点を2つ持つ有理尖点平面曲線とする。 $(C')^2 = -1$ なら $\text{Data}(C)$ は次のどれかである。ただし a は自然数である。

No.	$\text{Data}(C)$	$\deg C$
(1)	$[(ab + b - 1, ab - 1, b_{a-1}, b - 1), ((ab)_2, b_a)] \quad (b \geq 2)$	$2ab + b - 1$
(2)	$[(ab + b, ab, b_a), ((ab + 1)_2, b_a)] \quad (b \geq 2)$	$2ab + b + 1$
(3)	$[(ab + 1, ab - b + 1, b_{a-1}), ((ab)_2, b_a)] \quad (b \geq 3)$	$2ab + 1$
(4)	$[(ab + b, ab, b_a), ((ab + b - 1)_2, b_a, b - 1)] \quad (b \geq 3)$	$2ab + 2b - 1$

逆に上記の任意の $\text{Data}(C)$ に対してそれを実現する尖点を2つ持つ有理尖点平面曲線 C が存在する。

なお [Fe] において尖点を 2 つ持つ有理尖点平面曲線 C の系列が多数構成されている。それらの中で $(C')^2 = -1$ をみたすものの $\text{Data}(C)$ は定理 1 (1), (2), (3) で $a = 1$ の場合と一致する。

謝辞. 本稿は津山代数幾何シンポジウム 2012 で発表した内容と [To2] を要約したものです。本稿を執筆する機会を与えていただいたことに感謝いたします。なお本研究は科研費 (22540040) ならびに風樹会の助成を受けたものです。

1 定理 1 の証明の準備

D を滑らかな曲面 V 上の因子、 $\varphi: V' \rightarrow V$ を双有理射、 $B \subset V'$ を因子とする。 $\varphi(\text{Supp } B) = \text{Supp } D$ かつ φ の各ブローアップの中心が D またはその逆像の点であるとき φ は B を D に潰す、または B は D に縮むという。 $D_1, \dots, D_r$ を D の既約成分とする。以後各 D_i は射影的で、 D は単純正規交差因子であるとする。すなわち D は被約有効因子で各 D_i は滑らかであり、相違な D_i, D_j に対して $D_i D_j \leq 1$ が成り立ち、相違な D_i, D_j, D_k に対して $D_i \cap D_j \cap D_k = \emptyset$ であるとする。

D の双対グラフを $\Gamma = \Gamma(D)$ と書く。 Γ の各頂点に、 D の対応する既約成分 D_i の自己交点数 D_i^2 を重みとして与える。本稿では D とその重み付き双対グラフ Γ を区別しないことがある。 D や Γ に関して [Fu, 第 3 節] や [MT1, 第 1 章] などに従って次の記号や用語を用いる。 $P \in D$ におけるブローアップが D に関して発芽的 (あるいは細分的) であるとは P が D の非特異点 (あるいは特異点) であることと定める。この用語は D が一点のときにも用いる。この場合のブローアップは細分的であると定める。

Γ は線形かつ連結であるとする。 $r > 1$ のとき Γ に一方の端点から他方への向きを与えたものを線形鎖と呼ぶ。空のグラフ $\emptyset$ と $r = 1$ のグラフは線形鎖であると約束する。以後 Γ を線形鎖とする。 Γ には D_1 から D_r へ向きが与えられていて、 $i = 1, \dots, r-1$ に対して $D_i D_{i+1} = 1$ が成り立つように $D_1, \dots, D_r$ の番号を付けておく。 Γ を $[-D_1^2, \dots, -D_r^2]$ または $[D_1, \dots, D_r]$ で表す。 $r(\Gamma) = r$ と定める。各 D_i が有理曲線であるとき Γ を有理線形鎖と呼ぶ。本稿ではすべての線形鎖は有理線形鎖であると約束する。 $\Gamma \neq \emptyset$ かつ $D_i^2 \leq -2$ がすべての i に対して成り立つとき Γ を許容線形鎖と呼ぶ。 $r \times r$ 行列 $(-D_i D_j)$ の行列式を $d(\Gamma)$ と書く。ただし $\Gamma = \emptyset$ のときは $d(\emptyset) = 1$ と定める。

$A = [a_1, \dots, a_r]$ を線形鎖とする。 $A \neq \emptyset$ のとき次の記号を用いる。

$${}^t A := [a_r, \dots, a_1], \quad \overline{A} := [a_2, \dots, a_r], \quad \underline{A} := [a_1, \dots, a_{r-1}].$$

[Fu, Lemma 3.6] より $d(A)$ は次の性質を持つ。

補題 1.1. $A = [a_1, \dots, a_r]$ を線形鎖とする。

(i) $r > 1$ なら $d(A) = a_1 d(\overline{A}) - d(\overline{\overline{A}}) = d({}^t A) = a_r d(\underline{A}) - d(\underline{\underline{A}})$ が成り立つ。

(ii) $r > 1$ なら $d(\overline{A})d(\underline{A}) - d(A)d(\overline{\underline{A}}) = 1$ である。

(iii) A 許容線形鎖なら $\gcd(d(A), d(\overline{A})) = 1$, $d(A) > d(\overline{A}) > 0$ である。

許容線形鎖 $A = [a_1, \dots, a_r]$ に対して $e(A) := d(\overline{A})/d(A)$ と定める。[Fu, Corollary 3.8] より e は許容線形鎖の集合と区間 $(0, 1)$ の有理数の集合の間の全単射である。許容線形鎖 A に対して $A^* := e^{-1}(1 - e({}^t A))$ を A の随伴線形鎖と呼ぶ ([Fu, 3.9]). [Fu, Corollary 3.7, Proposition 4.7] より許容線形鎖とその随伴線形鎖は次の性質を持つ。

補題 1.2. A, B を許容線形鎖とする。

(i) $e(A) + e(B) = 1$ なら $d(A) = d(B)$, $e({}^t A) + e({}^t B) = 1$ である。

(ii) $A^{**} = A$, ${}^t(A^*) = ({}^t A)^*$, $d(A) = d(A^*) = d(\overline{A^*}) + d(\underline{A})$ が成り立つ。

(iii) $[A, 1, B]$ が $[0]$ に縮むことと $A = B^*$ は同値である。

整数 m と整数 $n \geq 0$ に対して $[m_n] = [\overbrace{m, \dots, m}^n]$, $t_n = [2_n]$ と定める。
 $A = [a_1, \dots, a_r]$, $B = [b_1, \dots, b_s]$ に対して $A * B = [\underline{A}, a_r + b_1 - 1, \overline{B}]$,
 $A^{*n} = \overbrace{A * \dots * A}^n$ と定義する ($n \geq 1$). 空でない線形鎖 A, B, C に対して
 $(A * B) * C = A * (B * C)$ が成り立つ。補題 1.1 と補題 1.2 を使って次を示すことができる。

補題 1.3. $A = [a_1, \dots, a_r]$ を許容線形鎖とする。

(i) 自然数 n に対して $[A, n+1]^* = t_n * A^*$ が成り立つ。

(ii) $A^* = t_{a_r-1} * \dots * t_{a_1-1}$ である。

(iii) 自然数 m, n があつて $[A, m+1] = [n+1, A]$ (あるいは $A * t_m = t_n * A$) であれば $m = n$, $a_1 = \dots = a_r = n+1$ (あるいは $A = t_n^{*r(A^*)}$) である。

次の補題を定理 1 の証明で使用する ([To1, Corollary 8]).

補題 1.4. a を自然数、 A を許容線形鎖とする。 B を許容線形鎖または空であるとする。 $[A, 1, B]$ はブローダウンの列の合成 π により $[a]$ に縮むと仮定する。さらに $[a]$ は A の像であるとする。

(i) $[a]$ は A の初めの曲線の像である。 $A^* = [B, n+1, t_{a-1}]$ をみたす自然数 n がある。 $B \neq \emptyset$ なら $A = [a] * t_n * B^*$ が成り立つ。

(ii) π の初めの n 回のブローアップは $[a]$ やその逆像に関して発芽的であり、残りのブローアップは細分的である。すべての細分的ブローアップの合成は $[A, 1, B]$ を $[a] * t_n, 1]$ に潰す。

- (iii) π の各ブローアップの例外曲線は $[a]$ の唯一の (-1) -曲線 (自己交点数が -1 の滑らかな有理曲線) である。

逆に任意の自然数 a, n と許容線形鎖 B に対して $[[a] * t_n * B^*, 1, B]$ は $[a]$ に縮む。

1.1 尖点の解消

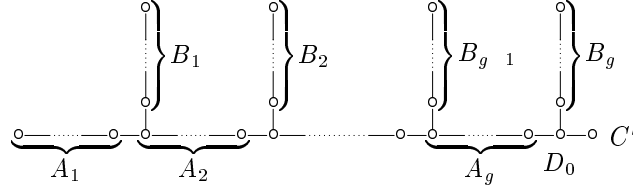
(C, P) を滑らかな曲面 V 上の曲線の芽とする。 (C, P) は尖点であるとする。 $\sigma : V' \rightarrow V$ をその最小埋め込み解消とする。 σ は C の固有変換 C' が $\sigma^{-1}(P)$ と横断的に交わる最短のブローアップの列 $V' = V_n \xrightarrow{\sigma_n^{-1}} V_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_2 \xrightarrow{\sigma_1} V_1 \xrightarrow{\sigma_0} V_0 = V$ の合成である。次の補題は (C, P) が尖点であることと σ が最小であることから従う。

補題 1.5. $i \geq 1$ に対して C の V_i における固有変換は $(\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_{i-1})^{-1}(P)$ と 1 点で交わる。それは σ_{i-1} の例外曲線上にあり $i < n$ なら次のブローアップ σ_i の中心でもある。

σ の最後のブローアップの例外曲線を D_0 とする。

補題 1.6 ([To1, Lemma 11]). 次が成り立つ。

- (i) $\sigma^{-1}(C)$ の双対グラフは次の形である。ただし $g \geq 1$ であり A_1 は σ_0 の例外曲線を含むと約束する。



A_i の既約成分 $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots$ (あるいは B_i の既約成分 $B_{i,1}, B_{i,2}, \dots$) を上図の左から右へ (あるいは下から上へ) 向かって番号を付ける。この向きと自己交点数 $A_{i,1}^2, A_{i,2}^2, \dots, B_{i,1}^2, B_{i,2}^2, \dots$ により A_i, B_i を線形鎖とみなす。

- (ii) $\sigma = \sigma_0 \circ \rho'_1 \circ \rho''_1 \circ \cdots \circ \rho'_g \circ \rho''_g$ と分解する。ここで各 ρ'_i (あるいは ρ''_i) は P の逆像に関して発芽的 (あるいは細分的) なブローアップからなる。
- (iii) 各 $\rho_i := \rho'_i \circ \rho''_i$ は次の性質を持つ。
- (a) $j < i$ に対して ρ_i は線形鎖 A_j, B_j を変えない。
 - (b) 各 i に対して $A_{i,1}$ の $\rho_i \circ \cdots \circ \rho_g$ による像は (-1) -曲線である。

- (c) ρ_g は $A_g + D_0 + B_g$ を (-1) -曲線 $\rho_g(A_{g,1})$ に潰す。 $i < g$ に対して ρ_i は $(\rho_{i+1} \circ \dots \circ \rho_g)(A_i + A_{i+1,1} + B_i)$ を (-1) -曲線 $(\rho_i \circ \dots \circ \rho_g)(A_{i,1})$ に潰す。

以後補題 1.6 (i) のとおり A_i, B_i を線形鎖とみなす。補題 1.5 よりこれらは許容線形鎖である。 ρ'_i のブローアップの回数を o_i と書くと補題 1.4 より次を得る。

命題 1.7. $i = 1, \dots, g$ に対して次が成り立つ。

- (i) $A_i = t_{o_i} * B_i^*, A_i^* = [B_i, o_i + 1]$.
(ii) A_i は $E^2 \leq -3$ をみたす既約成分 E を含む。

1.2 尖点の特性列

前節の記号を引き続き用いる。 $\alpha_0 = \text{mult}_P C$ を C の P における重複度とする。 (C, P) が次の局所パラメータ表示を持つような $P = (0, 0) \in V$ の近傍の局所座標 (x, y) がある。

$$x = t^{\alpha_0}, y = \sum_{i=\alpha_1}^{\infty} c_i t^i \quad (c_{\alpha_1} \neq 0, \alpha_1 > \alpha_0, \alpha_1 \not\equiv 0 \pmod{\alpha_0}).$$

このとき次をみたす自然数の列 $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ が唯一ある。これを (C, P) の**特性列**と呼んで $\text{Ch}_P = \text{Ch}_P(C)$ と書く。

- (i) $\gcd(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = 1$.
(ii) $\gcd(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}) > 1$ なら α_i は $c_j \neq 0$ かつ $\gcd(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}) > \gcd(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, j)$ をみたす最小の j である。

次により Ch_P から (C, P) の重複度列が得られる。 $i = 1, \dots, k$ に対して $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ において以下の通りユークリッドの互除法を実行する。

$$\begin{aligned} \gamma_i &= a_{i,1} m_{i,1} + m_{i,2} & (0 < m_{i,2} < m_{i,1}), \\ m_{i,1} &= a_{i,2} m_{i,2} + m_{i,3} & (0 < m_{i,3} < m_{i,2}), \\ &\dots & \dots \\ m_{i,n_i-2} &= a_{i,n_i-1} m_{i,n_i-1} + m_{i,n_i} & (0 < m_{i,n_i} < m_{i,n_i-1}), \\ m_{i,n_i-1} &= a_{i,n_i} m_{i,n_i}, \end{aligned}$$

ただし $m_{1,1} = \alpha_0, m_{i+1,1} = m_{i,n_i}$ である。 $a_{i,n_i} > 1, n_i > 1$ であり、 $a_{i,1} \geq 0, a_{i,j} > 0$ ($j > 1$) である。このとき (C, P) の重複度列は次で与えられる。

$$(\alpha_0, \overbrace{m_{1,1}, \dots, m_{1,1}}^{a_{1,1}}, \dots, \overbrace{m_{i,j}, \dots, m_{i,j}}^{a_{i,j}}, \dots, \overbrace{1, \dots, 1}^{a_{k,n_k}}).$$

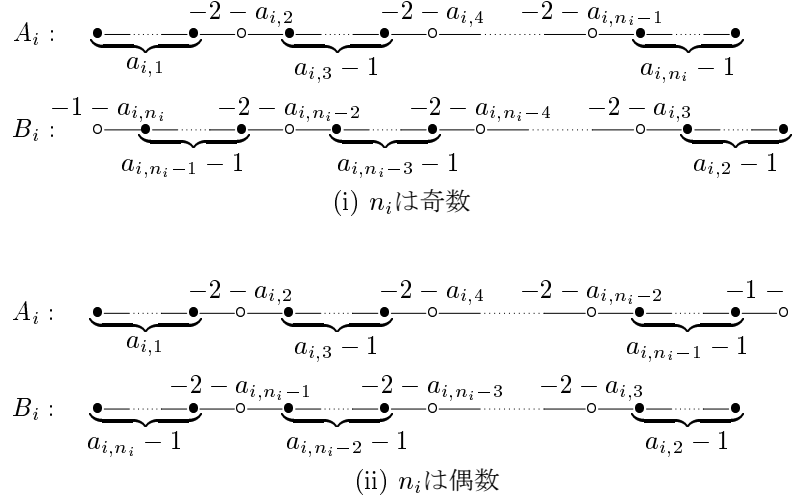


図 1: A_i と B_i の重み付き双対グラフ

逆にこの関係を使って $\overline{m}_P$ から Ch_P を計算できる。詳細については [BK, p.516, Theorem 12] や [MaSa] を参照していただきたい。ただしこれらの文献では $\gamma_1 = \alpha_1$ と定義されている。なお次の関係式により (C, P) のピユイズー対 (Puiseux pairs) $(q_1, p_1), \dots, (q_k, p_k)$ が Ch_P から計算される。

$$\alpha_0 = q_1 \cdots q_k, \quad \frac{\alpha_i}{\alpha_0} = \frac{p_i}{q_1 \cdots q_i}, \quad \gcd(q_i, p_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, k).$$

次に Ch_P から計算された $\overline{m}_P$ と線形鎖 A_i, B_i の関係を述べる ([To2, Proposition 10], [BK, p.524, Theorem 15])。

命題 1.8. $(m_{1,1}, (m_{1,1})_{a_{1,1}}, \dots, (m_{k,n_k})_{a_{k,n_k}})$ と $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ の間に次の関係が成り立つ。とくに $g = k$ である。

(i) n_i が奇数のとき

$$\begin{aligned} A_i &= t_{a_{i,1}+1} * [a_{i,2}] * \cdots * t_{a_{i,n_i-2}+1} * [a_{i,n_i-1}] * t_{a_{i,n_i}}, \\ B_i &= [a_{i,n_i}] * t_{a_{i,n_i-1}+1} * \cdots * [a_{i,5}] * t_{a_{i,4}+1} * [a_{i,3}] * t_{a_{i,2}}, \end{aligned}$$

である。ただし $n_i = 3$ のときは $A_i = t_{a_{i,1}+1} * [a_{i,2}] * t_{a_{i,3}}$, $B_i = [a_{i,3}] * t_{a_{i,2}}$ である。

(ii) n_i が偶数のとき

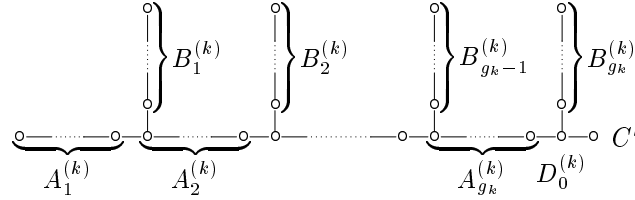
$$\begin{aligned} A_i &= t_{a_{i,1}+1} * [a_{i,2}] * \cdots * t_{a_{i,n_i-1}+1} * [a_{i,n_i}], \\ B_i &= t_{a_{i,n_i}} * [a_{i,n_i-1}] * t_{a_{i,n_i-2}+1} * \cdots * [a_{i,5}] * t_{a_{i,4}+1} * [a_{i,3}] * t_{a_{i,2}}, \end{aligned}$$

である。ただし $n_i = 2$ のときは $A_i = t_{a_{i,1}+1} * [a_{i,2}]$, $B_i = t_{a_{i,2}-1}$ である。

A_i と B_i の重み付き双対グラフは図 1 に記載のもので与えられる。図において $*$ (または $\bullet$) は (-1) -曲線 (または (-2) -曲線) を表す。各線形鎖には図の左から右へ向きが与えられている。

2 定理 1 の証明

C を尖点 P_1, P_2 を持つ有理尖点平面曲線とする。 $\sigma: V \rightarrow \mathbf{P}^2$ を P_1, P_2 の最小埋め込み解消、 C' を σ による C の固有変換とする。 $D := \sigma^{-1}(C)$ とおく。 $\sigma = \sigma^{(1)} \circ \sigma^{(2)}$ であるとしてよい。ここで $\sigma^{(k)}$ は P_k 上 (無限小近傍の点も含む) のブローアップからなる。 $\sigma^{-1}(P_k)$ の双対グラフは次の形をしている ($k = 1, 2$)。



$\sigma^{(k)}$ の初めのブローアップを $\sigma_0^{(k)}$ と書く。 $A_1^{(k)}$ は $\sigma_0^{(k)}$ の例外曲線を含むと約束する。上図において $A_1^{(k)}, \dots, A_{g_k}^{(k)}$ (または $B_1^{(k)}, \dots, B_{g_k}^{(k)}$) に左から右へ (または下から上へ) 向きを与えて $A_i^{(k)}$ と $B_i^{(k)}$ 線形鎖とみなす。補題 1.6 より $\sigma^{(k)} = \sigma_0^{(k)} \circ \sigma_{1,1}^{(k)} \circ \sigma_{1,2}^{(k)} \circ \dots \circ \sigma_{g_k,1}^{(k)} \circ \sigma_{g_k,2}^{(k)}$ と分解できる。ここで各 $\sigma_{i,1}^{(k)}$ (または $\sigma_{i,2}^{(k)}$) は P_k に関して発芽的 (または細分的) なブローアップからなる。 $i \geq 1$ について $\sigma_{i,1}^{(k)} \circ \sigma_{i,2}^{(k)}$ は $[A_i^{(k)}, 1, B_i^{(k)}]$ を (-1) -曲線に潰す。 $\sigma_{i,1}^{(k)}$ が行うブローアップの回数を $o_i^{(k)}$ と書く。

以後 $(C')^2 = -1$ と仮定する。 $F'_0 = D_0^{(1)}$ と置く。 C' のブローダウンを $\sigma': V \rightarrow V'$ とすると V' において $(F'_0)^2 = 0$ だから $\mathbf{P}^1$ -ファイブレーション $p': V' \rightarrow \mathbf{P}^1$ で F'_0 が非特異ファイバーであるものがある。 $p = p' \circ \sigma': V \rightarrow \mathbf{P}^1$, $F_0 = F'_0 + C'$ とおく。

注意. V' 上 $(D_0^{(2)})^2 = 0$ でもあるからもう一つの $\mathbf{P}^1$ -ファイブレーションで $D_0^{(2)}$ が非特異ファイバーになるものがある。

曲面 $X = V \setminus D$ は $\mathbf{Q}$ -ホモロジー平面、すなわち $h^i(X, \mathbf{Q}) = 0$ ($i > 0$) である。 $p|_X$ の一般のファイバーは $\mathbf{C}^{**} = \mathbf{P}^1 \setminus \{3 \text{ 点} \}$ である。このようなファイブレーションは [MiSu] において研究がなされている。以後の証明ではその研究結果を使う。 V からある n 次ヒルツェブルフ曲面 Σ_n への双有理射 $\varphi: V \rightarrow \Sigma_n$ で $p \circ \varphi^{-1}: \Sigma_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ が $\mathbf{P}^1$ -束になるものがある。 φ は p の特異ファイバーに含まれる (-1) -曲線を順次ブローダウンすることで得られる。 $D_0^{(1)}$ と交わる $A_{g_1}^{(1)} + B_{g_1}^{(1)}$ の既約成分がちょうど 2 つある。それらを S_1, S_3 とする。 $S_2 = D_0^{(2)}$ とおく。 S_1, S_2, S_3 は p の 1-セクション、すなわちファイバーとの交点数が 1 である。 D はこれら以外に p のセクションを含まない。

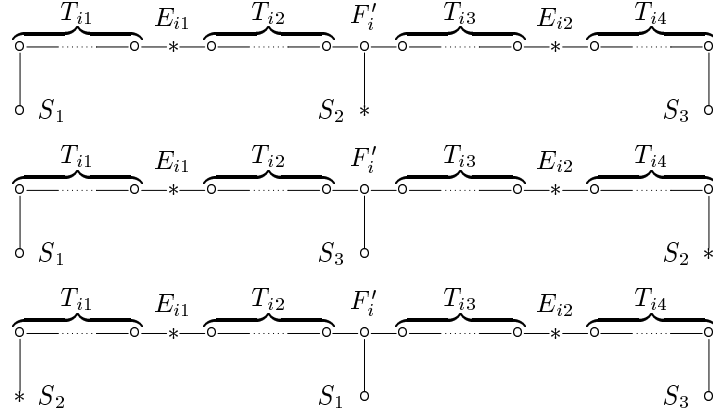


図 2: F_i の双対グラフの候補 ($i = 1, 2$)

補題 2.1. $\varphi(S_1 + S_2 + S_3)$ は滑らかであるとしてよい。 $\varphi(S_1) \sim \varphi(S_2) \sim \varphi(S_3)$ (線形同値) であり、各 i に対して $n = \varphi(S_i)^2 = 0$ である。

証明. $\varphi(S_1 + S_2 + S_3)$ が特異点 P を持つとする。 P のブローアップ ϕ_1 を行う。 V 上 $S_1 + S_2 + S_3$ は滑らかだから $\varphi = \phi_1 \circ \varphi'$ となるように φ のブローアップの順序を選べる。 P を通る $p \circ \varphi^{-1}$ のファイバーの ϕ_1 による固有変換を F' として、そのブローダウン ϕ_2 を行う。 F' は $p \circ \varphi'^{-1}$ の特異ファイバーの既約成分だから φ を $\phi_2 \circ \varphi'$ で置き換えることができる。 $\varphi(S_1 + S_2 + S_3)$ が持ち得る特異点はこの操作を繰り返して解消可能であることが分かる。 よって $\varphi(S_1 + S_2 + S_3)$ が滑らかであるようにブローダウン φ を行うことができる。 残りの主張はこのことから従う。 $\square$

F_0 以外の p の特異ファイバーを $F_1, \dots, F_l$ とする。 $i = 1, \dots, l$ に対して D に含まれない F_i の既約成分の和を E_i と書く。 D の双対グラフはループを含まないので各 E_i は 0 ではない。 よって $p|_X$ による X の像は $\mathbf{C}$ である。 $\bar{\kappa}(V \setminus D) = 2$ だから [MT2, Main Theorem] より E_i の各既約成分は D と少なくとも 2 点で交わる。 [MiSu, Lemma 1.5] において 3 つの 1 -セクションを持つ $\mathbf{C}^{**}$ -ファイブレーションの特異ファイバーがいくつかの型に分類されている。 それらの中で E_i の各既約成分が D と少なくとも 2 点で交わるものは (I_1) 型と (III_1) 型の特異ファイバーだけである。 D の双対グラフがループを含まないことから各 F_i は (III_1) 型であることが分かる。 [MiSu, Lemma 2.3] より p は F_0 以外に特異ファイバーを高々 2 つしか持たない。 S_2 は $D - S_2$ と 3 点で交わるので p はちょうど 3 つの特異ファイバー F_0, F_1, F_2 を持つ。 各 $i = 1, 2$ に対して $F_i + S_1 + S_2 + S_3$ の双対グラフは図 2 に記載のもののどれかと一致する。 なお図において $*$ は (-1) -曲線を表す。 また $E_i = E_{i1} + E_{i2}$ であり、 $T_{i,j}$ は空かもしれない。

曲線に潰す。よって補題 1.4 より $T_{22} = t_{l_{22}}$ と書ける ($l_{22} \geq 1$). $T_{22} = \emptyset$ のときには $l_{22} = 0$ と定める。

(ii) $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_{21} \circ \varphi_{11} \circ \varphi_{12} \circ \varphi_{22}$ と分解できるとしてよい。ここで φ_0 は C' のブローダウン、 φ_{ij} は $T_{i,2j-1} + E_{ij} + T_{i,2j}$ のブローダウンである。 $[E_{21}, T_{22}] = [1, t_{l_{22}}]$, $\varphi(S_1)^2 = 0$ だから補題 1.2 (iii) より φ_{11} は $[S_1, T_{11}, E_{11}, T_{12}]$ を $[l_{22} + 1]$ に潰す。よって補題 1.4 より $[S_1, T_{11}]^* = [T_{12}, k_{12} + 1, t_{l_{22}}]$ と書ける ($k_{12} \geq 1$). S_1 とその逆像に関して細分的な φ_{11} のブローアップをすべて合成したものは $[T_{11}, E_{11}, T_{12}]$ を $[t_{k_{12}-1}, 1]$ に潰す。 $\varphi(F'_1)^2 = 0$ なので補題 1.2 (iii) より φ_{12} は $[F'_1, T_{13}, E_{12}, T_{14}]$ を $[k_{12}]$ に潰す。よって補題 1.4 より $[F'_1, T_{13}]^* = [T_{14}, k_{34} + 1, t_{k_{12}-1}]$ と書ける ($k_{34} \geq 1$). 同様に φ_{22} は $[T_{23}, E_{22}, T_{24}, S_3]$ を $[k_{34}]$ に潰す。従って補題 1.4 より $[S_3, {}^tT_{24}]^* = [{}^tT_{23}, k + 1, t_{k_{34}-1}]$ と書ける ($k \geq 1$). $\varphi(F'_2)^2 = 0$ だから $0 = -f_2 + k + 1$ である。最後の主張は命題 1.7 から従う。□

$B_{g_2}^{(2)}$ は ${}^t[T_{12}, F'_1]$, $[F'_1, T_{13}]$, ${}^t[T_{22}, F'_2]$, $[F'_2, T_{23}]$ のどれかである。これらを個別に考察することにより定理 1 の前半の主張の証明は完了する。本稿では $B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1]$ の場合だけを扱う。残りの場合も同様に議論することができる。以後 $B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1]$ と仮定する。

補題 3.2. $T_{13} = \emptyset$, $k_{34} = 1$, $T_{14} = t_{f_1-k_{12}-1}$, $[T_{24}, S_3]^* = [f_2, T_{23}]$ である。

証明. $B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1]$ だから $T_{13} = \emptyset$ であり、補題 3.1 より $[T_{14}, k_{34} + 1, t_{k_{12}-1}] = t_{f_1-1}$ である。よって $k_{34} = 1$, $T_{14} = t_{f_1-k_{12}-1}$ となる。従って補題 3.1 より $[T_{24}, S_3]^* = [f_2, T_{23}]$ である。□

3.1 $g_2 = 1$ のとき

$A_1^{(2)} = [T_{22}, F'_2]$ または $A_1^{(2)} = {}^t[F'_2, T_{23}]$ である。 $A_1^{(2)} = [T_{22}, F'_2]$ とすると $T_{23} = \emptyset$ だから補題 3.2 より $[T_{24}, S_3] = t_{f_2-1}$ である。よって $T_{14} + S_3 + T_{24}$ の既約成分はすべて (-2) -曲線であり $A_{g_1}^{(1)}$ も (-2) -曲線だけからなる。これは命題 1.7 に反する。よって $A_1^{(2)} = {}^t[F'_2, T_{23}]$ であり $T_{22} = \emptyset$ である。従って補題 3.2 と命題 1.7 より $[T_{24}, S_3] = [o_1^{(2)} + 1, T_{12}, F'_1]$ が成り立つ。このことから $T_{24} \neq \emptyset$ でなければならない。

$T_{14} = \emptyset$ とする。 $f_1 = k_{12} + 1$, $g_1 = 1$, $A_1^{(1)} = [T_{24}, S_3]$ が成り立つ。 $t_{l_{22}} = T_{22} = \emptyset$ だから補題 3.1 より $B_1^{(1)} = [T_{12}, f_1]^*$ を得る。よって命題 1.7 より $[o_1^{(2)} + 1, T_{12}, f_1] = [T_{24}, S_3] = t_{o_1^{(1)}} * [T_{12}, f_1]$ が成り立つ。これより $o_1^{(1)} = 2$, $o_1^{(2)} = 1$ となる。このとき $[T_{12}, f_1] = t_1 * [T_{12}, f_1]$ だから $[T_{12}, f_1]^* = [[T_{12}, f_1]^*, 2]$ となってしまう。従って $T_{14} \neq \emptyset$ である。 $g_1 = 1$ とすると $A_1^{(1)} = [T_{14}, S_3]$, $T_{24} = \emptyset$ となり $T_{24} \neq \emptyset$ であることに反する。よって $g_1 = 2$ である。このとき $A_2^{(1)} = S_3$ だから補題 3.1 より $T_{12} = \emptyset$, $o_2^{(1)} = 1$, $A_2^{(1)} = S_3 = [k_{12} + 2]$ が成り立つ。命題 1.7 より $B_2^{(1)} = t_{k_{12}}$ を得る。

補題 3.2 より T_{14} は (-2) -曲線だけからなるので命題 1.7 より $B_1^{(1)} = {}^tT_{14}$, $A_1^{(1)} = T_{24}$ となる。これと補題 3.2 と命題 1.7 を使って $[f_2, T_{23}] = t_{k_{12}+1} * [t_{f_1-k_{12}-1}, o_1^{(1)}+1]$ と計算される。 $\emptyset \neq T_{14} = t_{f_1-k_{12}-1}$ だから $[f_2, T_{23}] = [t_{k_{12}}, 3, t_{f_1-k_{12}-2}, o_1^{(1)}+1]$ が成り立つ。一方命題 1.7 より $[f_2, T_{23}] = {}^tA_1^{(2)} = t_{f_1-1} * t_{o_1^{(2)}} = [t_{f_1-2}, 3, t_{o_1^{(2)}-1}]$ である。よって $o_1^{(2)} = 2$, $o_1^{(1)} = 1$, $f_1 = k_{12} + 2$ を得る。 $k = k_{12}$ とおくと $A_2^{(1)} = [k+2]$, $B_2^{(1)} = t_k$, $B_1^{(1)} = [2]$, $B_1^{(2)} = [k+2]$ となる。命題 1.7 より $A_1^{(1)} = [3]$, $A_1^{(2)} = [2, 3, t_k]$ である。以上の結果に命題 1.8 を適用して $\text{Data}(C) = [(2(k+1), (k+1)_2), ((k+2)_2, k+1)]$ と計算することができる。これは定理 1 (2) $a = 1$, $b = k + 1$ の場合である。

3.2 $g_2 = 2$ のとき

$A_2^{(2)} = F'_2$, $T_{22} \neq \emptyset$ である。補題 3.1 より T_{22} は (-2) -曲線だけからなる。よって命題 1.7 より $B_1^{(2)} = {}^tT_{22}$, $A_1^{(2)} = {}^tT_{23}$ であり $A_1^{(2)} = t_{o_1^{(2)}} * [l_{22} + 1]$ である。また補題 3.1 より $r(A_{g_1}^{(1)}) \geq 2$ だから $g_1 = 1$ でなければならない。このとき $A_1^{(1)} = [T_{14}, S_3]$ または $A_1^{(1)} = [T_{24}, S_3]$ である。補題 3.2 より T_{14} は (-2) -曲線だけからなる。補題 3.1 より $A_1^{(1)} - S_3$ は (-2) -曲線以外の既約成分を含む。よって $A_1^{(1)} = [T_{24}, S_3]$, $T_{14} = \emptyset$, $f_1 = k_{12} + 1$ を得る。

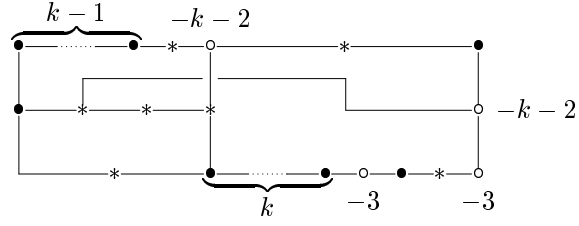
$A_2^{(2)} = F'_2$ だから命題 1.7 より $t_{f_2-1} = [o_2^{(2)}+1, T_{12}, f_1]$ が成り立つ。よって $o_2^{(2)} = 1$, $f_1 = 2$, $T_{12} = t_{f_2-3}$ である。従って $k_{12} = 1$ となる。補題 3.1 より $[S_1, T_{11}] = t_{f_2+l_{22}-2}^* = [f_2 + l_{22} - 1]$ を得る。命題 1.7 と補題 3.2 より $[f_2, T_{23}] = A_1^{(1)*} = [S_1, T_{11}, o_1^{(1)}+1] = [f_2 + l_{22} - 1, o_1^{(1)}+1]$ と計算できる。よって $l_{22} = 1$, $T_{23} = [o_1^{(1)}+1]$ であり $o_1^{(2)} = 1$, $o_1^{(1)} = 2$ となる。 $k = f_2 - 2$ とおくと $k \geq 1$ であり $B_1^{(1)} = [k+2]$, $A_2^{(2)} = [k+2]$, $B_1^{(2)} = [2]$, $A_1^{(2)} = [3]$ である。命題 1.7 より $A_1^{(1)} = [2, 3, t_k]$, $B_2^{(2)} = t_k$ である。これらから $\text{Data}(C) = [(2(k+1), (k+1)_2), ((k+2)_2, k+1)]$ と計算される。これは定理 1 (2) $a = 1$, $b = k + 1$ の場合である。

3.3 定理 1 の前半の主張の証明

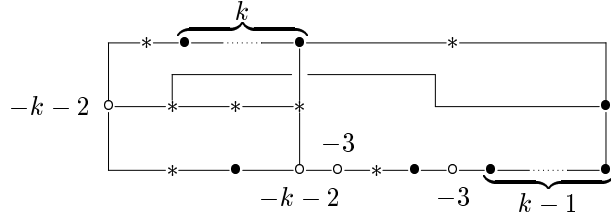
$B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1]$ の場合と残りの場合の $D + E_1 + E_2$ の双対グラフを図 4 に示す。ただし k, l は自然数である。各グラフと $\text{Data}(C)$ と定理 1 に記載の $\text{Data}(C)$ の関係は以下のとおりである。これらから定理 1 の前半の主張が従う。

$$(1) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1]$$

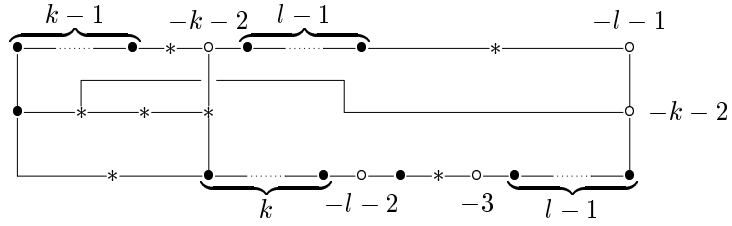
(1-1) $g_2 = 1$. $\text{Data}(C) = [(2(k+1), (k+1)_2), ((k+2)_2, k+1)]$ であり定理 1 (2) ($a = 1$, $b = k + 1$) に一致する。



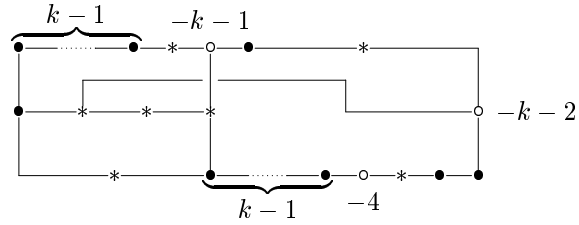
$$(1-1) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1], g_2 = 1$$



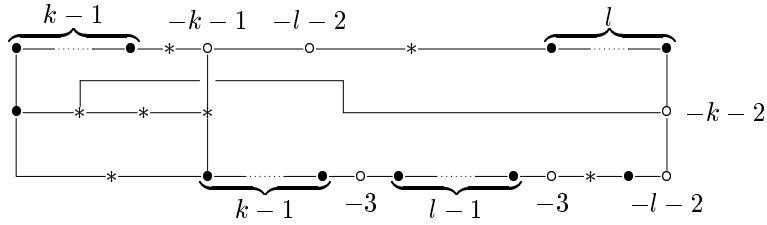
$$(1-2) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{12}, F'_1], g_2 = 2$$



$$(2-1) B_{g_2}^{(2)} = [F'_1, T_{13}], k_{34} = 1$$

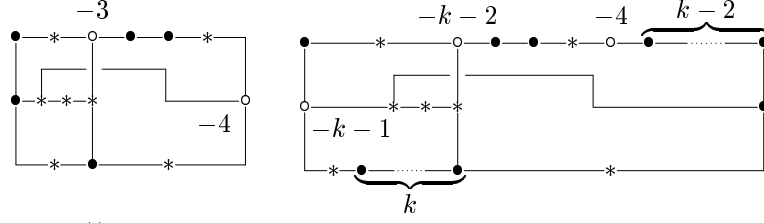


$$(2-2) B_{g_2}^{(2)} = [F'_1, T_{13}], k_{34} > 1, T_{14} = \emptyset$$



$$(2-3) B_{g_2}^{(2)} = [F'_1, T_{13}], k_{34} > 1, T_{14} \neq \emptyset$$

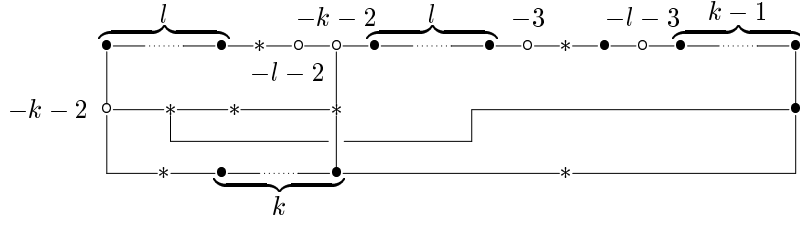
図 4: $D + E_1 + E_2$ の双対グラフ



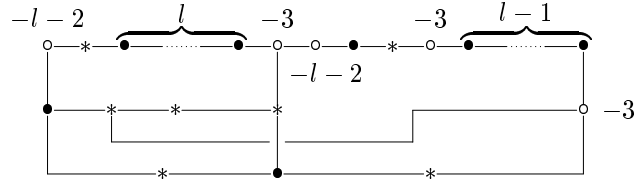
(i) $k = 1$

(ii) $k > 1$

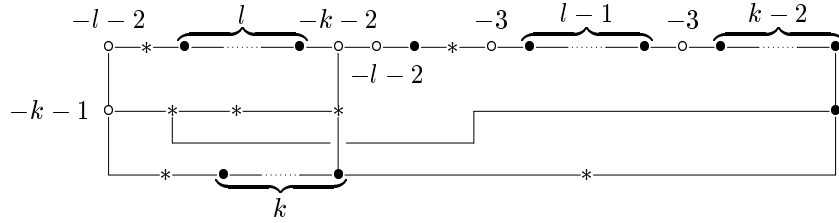
$$(3-1) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{22}, F'_2], g_2 = 1$$



$$(3-2) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{22}, F'_2], g_2 = 2, k_{12} = 1$$

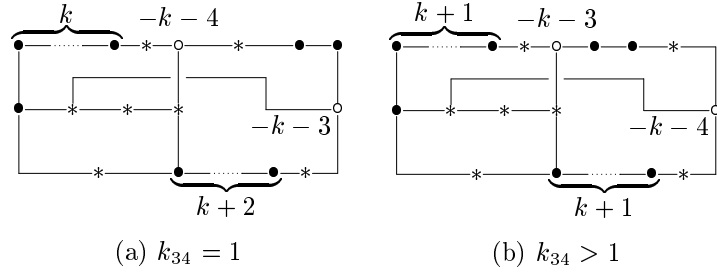


$$(3-3) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{22}, F'_2], g_2 = 2, k_{12} > 1, k = 1$$



$$(3-3) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{22}, F'_2], g_2 = 2, k_{12} > 1, k > 1$$

図 4: $D + E_1 + E_2$ の双対グラフ (続き)



$$(4-1-1) \ B_{g_2}^{(2)} = [F'_2, T_{23}], \ g_2 = 1, \ g_1 = 1$$

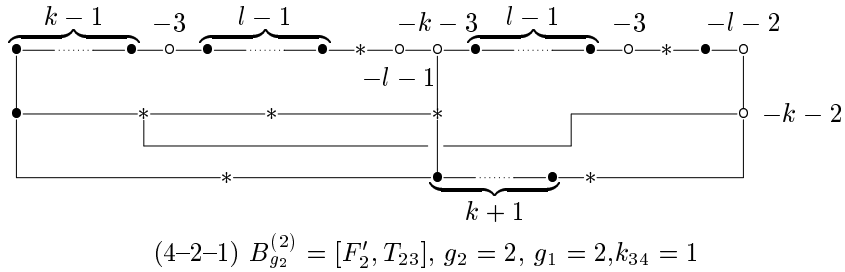
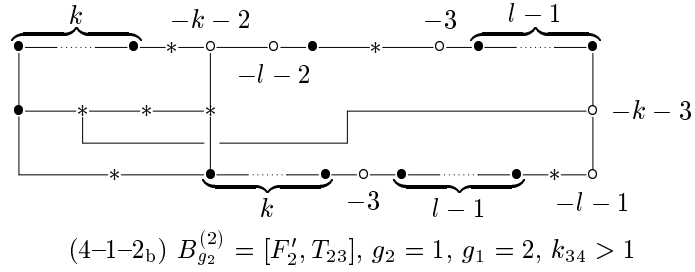
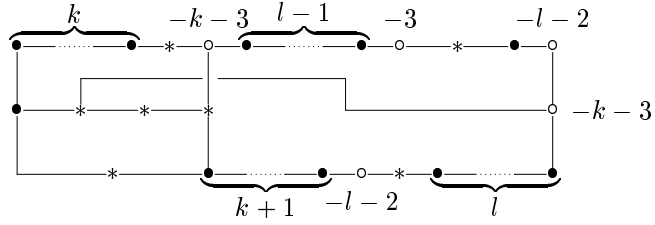
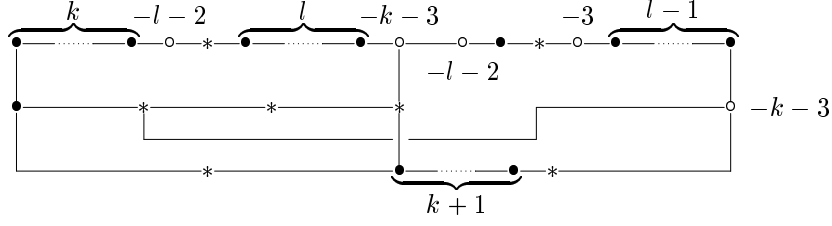


図 4: $D + E_1 + E_2$ の双対グラフ (続き)



$$(4-2-2) B_{g_2}^{(2)} = [F'_2, T_{23}], g_2 = 2, g_1 = 2, k_{34} > 1$$

図 4: $D + E_1 + E_2$ の双対グラフ (続き)

(1-2) $g_2 = 2$. $\text{Data}(C) = [(2(k+1), (k+1)_2), ((k+2)_2, k+1)]$ であり定理 1 (2) ($a = 1, b = k+1$) に一致する。

$$(2) B_{g_2}^{(2)} = [F'_1, T_{13}]$$

(2-1) $k_{34} = 1$. $\text{Data}(C) = [(((l+1)(k+1), l(k+1), (k+1)_l), ((l(k+1)+1)_2, (k+1)_l)]$ であり定理 1 (2) ($a = l, b = k+1$) に一致する。

(2-2) $k_{34} > 1, T_{14} = \emptyset$. $\text{Data}(C) = [((k+1)_3), (2k+1, k_2)]$ であり定理 1 (1) ($a = 1, b = k+1$) に一致する。

(2-3) $k_{34} > 1, T_{14} \neq \emptyset$. $\text{Data}(C) = [(((l+1)(k+1))_2, (k+1)_{l+1}), ((l+1)(k+1)+k, l(k+1)+k, (k+1)_l, k)]$ であり定理 1 (1) ($a = l+1, b = k+1$) に一致する。

$$(3) B_{g_2}^{(2)} = {}^t[T_{22}, F'_2]$$

(3-1) $g_2 = 1$. $\text{Data}(C) = [(2k+1, k_2), ((k+1)_3)]$ であり定理 1 (1) ($a = 1, b = k+1$) に一致する。

(3-2) $g_2 = 2, k_{12} = 1$. $\text{Data}(C) = [(((l+1)(k+1)+1)_2, (k+1)_{l+1}), ((l+2)(k+1), (l+1)(k+1), (k+1)_{l+1})]$ であり定理 1 (2) ($a = l+1, b = k+1$) に一致する。

(3-3) $g_2 = 2, k_{12} > 1$. $\text{Data}(C) = [((l+1)(k+1)+k, l(k+1)+k, (k+1)_l, k), (((l+1)(k+1))_2, (k+1)_{l+1})]$ であり定理 1 (1) ($a = l+1, b = k+1$) に一致する。

$$(4) B_{g_2}^{(2)} = [F'_2, T_{23}]$$

(4-1-1_a) $g_2 = 1, g_1 = 1, k_{34} = 1$. $\text{Data}(C) = [(k+3), ((k+2)_3)]$ であり定理 1 (3) ($a = 1, b = k+2$) に一致する。

(4-1-1_b) $g_2 = 1, g_1 = 1, k_{34} > 1$. $\text{Data}(C) = [((k+2)_3), (k+3)]$ であり定理 1 (3) ($a = 1, b = k+2$) に一致する。

- (4-1-2_a) $g_2 = 1, g_1 = 2, k_{34} = 1$. $\text{Data}(C) = [(((l+1)(k+2))_2, (k+2)_{l+1}), ((l+1)(k+2)+1, l(k+2)+1, (k+2)_l)]$ であり定理 1 (3) ($a = l+1, b = k+2$) に一致する。
- (4-1-2_b) $g_2 = 1, g_1 = 2, k_{34} > 1$. $\text{Data}(C) = [((l+1)(k+2), l(k+2), (k+2)_l), ((l(k+2)+k+1)_2, (k+2)_l, k+1)]$ であり定理 1 (4) ($a = l, b = k+2$) に一致する。
- (4-2-1) $g_2 = 2, k_{34} = 1$. $\text{Data}(C) = [((l(k+2)+k+1)_2, (k+2)_l, k+1), ((l+1)(k+2), l(k+2), (k+2)_l)]$ であり定理 1 (4) ($a = l, b = k+2$) に一致する。
- (4-2-2) $g_2 = 2, k_{34} > 1$. この場合 $k_{34} = 2$ である。 $\text{Data}(C) = [((l+1)(k+2)+1, l(k+2)+1, (k+2)_l), (((l+1)(k+2))_2, (k+2)_{l+1})]$ であり定理 1 (3) ($a = l+1, b = k+2$) に一致する。

3.4 定理 1 の後半の主張の証明

Γ を図 4 に記載のグラフの一つとする。補題 1.2 (iii) と補題 1.4 より Γ の部分グラフ F_0, F_1, F_2 は互いに交わらない 0-曲線にブローダウンできる。このブローダウンによる S_1, S_2, S_3 の像は互いに交わらない 0-曲線であり、各 F_i の像と横断的に交わる。よって Σ_0 の 3 本のファイバーとセクションから始めてこのブローダウンの手順を逆にたどることによって Γ を実現することができる。補題 1.4 より $\Gamma - E_1 - E_2 - C'$ は $\mathbf{P}^2$ の 2 点に潰すことができる。よって定理 1 に記載の $\text{Data}(C)$ は 2 つの尖点を持つ有理尖点平面曲線 C の尖点のものとして実現できる。

参考文献

- [BK] Brieskorn, E., Knörrer, H.: Plane algebraic curves. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser 1986.
- [Fe] Fenske, T.: Rational 1- and 2-cuspidal plane curves, Beiträge zur Algebra und Geometrie **40**, (1999), 309–329.
- [Fu] Fujita, T.: On the topology of non-complete algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **29**, (1982), 503–566.
- [MaSa] Matsuoka, T., Sakai, F.: The degree of rational cuspidal curves, Math. Ann. **285**, (1989), 233–247.
- [MiSu] Miyanishi, M., Sugie, T.: $\mathbf{Q}$ -homology planes with $\mathbf{C}^{**}$ -fibrations, Osaka J. Math. **28**, (1991), 1–26.

- [MT1] Miyanishi, M., Tsunoda, S.: Non-complete algebraic surfaces with logarithmic Kodaira dimension $-\infty$ and with non-connected boundaries at infinity, Japan. J. Math. **10**, No. 2, (1984), 195–242.
- [MT2] Miyanishi, M., Tsunoda, S.: Absence of the affine lines on the homology planes of general type, J. Math. Kyoto Univ. **32**, (1992), 443–450.
- [SST] Sakai, F. and Saleem, M. and Tono, K.: Hyperelliptic plane curves of type $(d, d - 2)$, Beiträge zur Algebra und Geometrie **51** (2010), 31–44.
- [To1] Tono, K.: On Orevkov’s rational cuspidal plane curves, J. Math. Soc. Japan **64**, (2012), 365–385.
- [To2] Tono, K.: On a new class of rational cuspidal plane curves with two cusps, Preprint. arXiv:1205.1248
- [Ts] Tsunoda, S.: The complements of projective plane curves, RIMS-Kôkyûroku **446**, (1981), 48–56.
- [W] Wakabayashi, I.: On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in $\mathbf{P}^2$, Proc. Japan Acad. **54**, Ser. A, (1978), 157–162.

〒 338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255
 埼玉大学大学院理工学研究科
 E-mail address: `ktono@rimath.saitama-u.ac.jp`

Wonderful Presents from Iitaka and Grothendieck

Kazuhisa Maehara

August 31, 2012

1 Introduction

Professor Iitaka presents a list of problems for arithmetic, algebraic and analytic geometry, which is called Iitaka program. The canonical Iitaka fibration is one thing among them and it defines Kodaira dimension. Kodaira dimension is a birational(resp. bimeromorphic) invariant and plays a central role for perspective view of arithmetic, algebraic and analytic varieties among all. To classify the category whose objects are algebraic varieties and whose morphisms are rational maps he proposes a lot of conjectures: for a fibre space V/W of algebraic varieties

$$\kappa(V) \geq \kappa(V_w) + \kappa(W)$$

From spirit of Iitaka classification of algebraic varieties by Kodaira dimension it leads to Mori (resp. Kawamata) program. Iitaka's insight from point of view of Kodaira dimension admits many properties for curves and surfaces to still hold for higher dimensional varieties. For example Kobayashi-Ochiai's theorem generalizes de-Franchi's theorem for curves. Severi's theorem for curves ≥ 2 is generalized to higher dimensional varieties. The efforts to try to prove these conjectures makes me to notice the general theories of Grothendieck's, a theory of schemes (EGA1-4), a theory of etale fundamental groups or Galois category, deformation theory for additive category, an extension theory of group sheaves over topos and a categorical homotopic theory. In this talk I will explain the last one to obtain a general theorem available to a local test category which is an analogue to locally simply connected space and apply it to our situation, algebraic schemes, non commutative algebraic stacks, etc.

2 Preliminary

2.1 The theory of the homotopy type of Grothendieck[Malt],[Cisinski]

The homotopical category Hot is originally the category of the CW-complexes. The homotopical category is the category whose objects are topological spaces, and whose morphisms are homotopy equivalence classes of continuous maps. Two topological spaces X and Y are isomorphic in this category if and only if they are homotopy-equivalent. This Hot is equivalent to the category localizing the category of all the topological spaces and continuous maps by topological weak equivalences W_∞ such that

- W_∞ is a part of the continuous
- $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ are bijections.
- $\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ are isomorphisms of groups for $n \geq 1$.

That is

$$Hot \cong W_\infty^{-1}Top.$$

The category of simplexes is the category the objects of which

$$\Delta_m = \{0, 1, \dots, m\}$$

and the morphisms of which are increasing maps. The category $\hat{\Delta}$ of the presheaves over Δ is called the category of the simplicial sets. We have a unique couple of adjoint functors, i.e., topological realization and singular simplicial set functor

$$|\cdot| : \hat{\Delta} \rightarrow Top, S : Top \rightarrow \hat{\Delta}$$

A simplicial weak equivalence is a morphism of simplicial sets the topological realization of which is a homotopy equivalence. This simplicial equivalence is described W_∞ . Then the topological realization functor and the singular simplicial set functor are compatible with weak equivalences and induce categorical equivalences

$$W_\infty^{-1}\hat{\Delta} \rightarrow W_\infty^{-1}Top, W_\infty^{-1}Top \rightarrow W_\infty^{-1}\hat{\Delta}$$

which are quasi-inverses.

The homotopical category Hot can be obtained as a localization of the 2-category Cat the objects of which are the small categories and the morphisms of which are the functors. There are a couple of adjoint functors, i.e., the categorical realization functor and the nerf functor,

$$c : \hat{\Delta} \rightarrow Cat, N : Cat \rightarrow \hat{\Delta}$$

where the restriction of c to Δ is the inclusion $\Delta \subset Cat$ and the simplicial set

$$(N(C))_m = Hom_{Cat}(\Delta_m, C), m \geq 0$$

the ordered set Δ_m being as a category. A categorical weak equivalence is defined to be a functor the nerf of which is a simplicial weak equivalence. Let W_∞ be the part of $Fl(Cat)$ which are the categorical equivalences. The nerf functor is compatible with categorical weak equivalence and induces a categorical equivalence:

$$W_\infty^{-1}Cat \rightarrow W_\infty^{-1}\hat{\Delta}$$

However, the categorical realization functor is not compatible with the categorical weak equivalences. A quasi-inverse functor to N

$$Simpl : \hat{\Delta} \rightarrow Cat$$

, where it associates a simplicial set K to a category of simplexes $Simpl(K)$. The $Simpl$ functor induces a categorical equivalence

$$W_\infty^{-1}\hat{\Delta} \rightarrow W_\infty^{-1}Cat$$

which is a quasi-inverse to the nerf functor N . A categorical weak equivalence is characterized by Artin-Mazur equivalence. Let $u : A \rightarrow B$ be a functor of small categories and F a locally constant over $\hat{B}$. A morphism of toposes $(u^*, u_*) : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ is Artin-Mazur equivalence if and only if

$$H^m(\hat{B}, F) \rightarrow H^m(\hat{A}, u^*F)$$

are isomorphisms for $m \geq 0$ and any locally constant sheaf F . (as sets for $m = 0$, as groups for $m = 1$, as abelian groups for $m \geq 2$.) Let A be a small category and $i_A : \hat{A} \rightarrow Cat$ ($F \rightarrow A/F$) Then

$$W_{\hat{A}} = i_A^* W_\infty$$

A couple of adjoint functors

$$i_A : W_A^{-1}\hat{A} \rightarrow W_\infty^{-1}Cat$$

and

$$i_A^* : Hot = W_\infty^{-1}Cat \rightarrow W_{\hat{A}}^{-1}\hat{A}$$

, where

$$i_A^* : Cat \rightarrow \hat{A}C \mapsto (a \mapsto Hom_{Cat}(A/a, C))$$

are categorical equivalences, quasi-inverses each other if and only if A is said to be a weak test category. A morphism $u : A \rightarrow B$ of Cat is aspheric if $u/b : A/b \rightarrow B/b$ is a weak equivalence for any object b of B . Grothendieck says A is a weak test category if and only if for any category with a final object i_A^* is aspheric, i.e., i_A^* in W_∞ .

A category A is a local test category if and only if for any object a A/a is a weak test category.

A category A is a test category if and only if A is a weak test category and a local test category at once.

A test category is as good as the category of simplicial sets Δ .

Theorem 1 (*Theorem A of Quillen's*) *If $u : A \rightarrow B$ is a morphism of Cat such that $u/b : A/b \rightarrow B/b$ is in W_∞ for any object b of B , then u is in W_∞ .*

Definition 1 (Weak Basic Localizer) *The weak basic localizer W is characterized by the following conditions.*

- (*La weak saturation*) *the identity is in W . If two morphisms of a commutative triangle in W , then the third of them is in W . If $i : A \subset B$, $r : B \rightarrow A$ and $r \circ i = id_A$, then $ir \in W$ implies $i \in W$.*
- (*Lb final object*) *If A is a small category with a final object, then the unique functor $A \rightarrow \{pt\}$ is in W .*
- (*Lc Theorem A of Quillen's*) *If $u : A \rightarrow B$ is a morphism of Cat such that $u/b : A/b \rightarrow B/b$ for all objects b of B , then u is in W .*

Definition 2 (Basic Localizer) *The basic localizer W is characterized by the following conditions.*

- (*La weak saturation*) *the identity is in W . If two morphisms of a commutative triangle in W , then the third of them is in W . If $i : A \subset B$, $r : B \rightarrow A$ and $r \circ i = id_A$, then $ir \in W$ implies $i \in W$.*
- (*Lb final object*) *If A is a small category with a final object, then the unique functor $A \rightarrow \{pt\}$ is in W .*

- (LC relative Theorem A of Quillen's) Given a commutative triangle in Cat

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

and if $u : A \rightarrow B$ is a morphism of Cat such that $u/c : A/c \rightarrow B/c$ for all objects c of C , then u is in W .

Given a weak basic localizer W , we can do an analogue to an original categorical weak equivalence W_∞ . We have analogous notions, $Hot_W = W^{-1}Cat$, W -weak test categories, W -local test categories, W -test categories.

Kan extensions are universal constructs in category theory.

Definition 3 Let A, B, C be three categories and $F : A \rightarrow B$, $G : A \rightarrow C$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ G \downarrow & \nearrow R_M & \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ R \end{array}$$

The right Kan extension of G along F consists of a functor $R : B \rightarrow C$ and a natural transformation $\eta : RF \rightarrow G$ which is co-universal so that for any functor $M : B \rightarrow C$ and a natural transformation $\mu : MF \rightarrow G$, there exists uniquely a natural transformation $\delta : M \rightarrow R$ in the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccc} & RF & \\ \eta \swarrow & & \searrow \delta_F \\ G & \xleftarrow{\mu} & MF \end{array}$$

The left Kan extension of G along F is dual to the right Kan extension.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ G \downarrow & \nearrow L & \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & LF & \\ \eta \swarrow & & \searrow \delta_F \\ G & \xrightarrow{\mu} & MF \end{array}$$

A theory of Kan homotopical extensions is the concept of Grothendieck theory of derivators. A localizer is a couple of (M, W) such that M is a category and such that W is a part of morphisms $Hot_{(M,W)}(I)$ is a localization of the category $Func(I, M)$ of functors from I to M by induced W argument-wise on natural transformations. For any functor $u : I \rightarrow J$ between small categories we have an inverse image functor $u^* : Hot_{(M,W)}(J) \rightarrow Hot_{(M,W)}(I)$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

If there exists a structure of a Quillen's closed model category on M whose weak equivalences are W and if M admits small inductive limits (resp. projective limits), then there exist the left Kan extensions (resp. the right Kan extensions). For example the localizer (Cat, W_∞) is the one. For every functor $F : I \rightarrow Cat$, we obtain a cofibred category by Grothendieck construction which is called an integration of F along I ;

$$\int_I F \rightarrow I$$

From the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \int_I F & \xrightarrow{u_!} & \int_J F \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

we obtain

$$u_! : Hot_{(Cat,W)}(I) \rightarrow Hot_{(Cat,W)}(J)$$

induced by localization. This is a left adjoint functor to

$$u^* : Hot_{(Cat,W)}(J) \rightarrow Hot_{(Cat,W)}(I)$$

The dual notion of integration is co-integration, denoted by $\nabla_I F = (\int_{I^o} F^o)^o$ for a contra-variant functor $F : I^o \rightarrow Cat$.

Given a basic localizer W , Grothendieck says a functor between small categories $u : A \rightarrow B$ (resp. $B' \rightarrow B$) is W -proper (resp. W -smooth) if for any cartesian square

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

the base change morphism

$$u'_! w^* \rightarrow v^* u_!$$

is an isomorphism, where $u_! : \text{Hot}_{(Cat, W)}(A) \rightarrow \text{Hot}_{(Cat, W)}(B)$ and $u'_! : \text{Hot}_{(Cat, W)}(A') \rightarrow \text{Hot}_{(Cat, W)}(B')$ are homotopical left Kan extensions. They are dual each other.

Let A be a small category and a functor

$$j_A : \hat{A} \rightarrow Cat/A$$

defined by $j_A X = (A/X, A/X \rightarrow A)$. Since $j_A^{-1}(W/A) = W_{\hat{A}}$, the functor j_A induces

$$j_A : H_W \hat{A} \rightarrow \text{Hot}_W Cat // A = (W/A)^{-1} Cat/A$$

which is called the category of W -types of locally homotopical constants over A and $H_W = W^{-1}$.

Proposition 1 *Let W a basic localizer and A a W -local test category. Then*

$$j_A : H_W \hat{A} \rightarrow \text{Hot}_W Cat // A$$

is a categorical equivalence.

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{j_A} & Cat/A \\ p^* \downarrow & \searrow^{dis} & \uparrow \Xi' \\ A \hat{\times} \Delta & \xleftarrow{N} & Hom(A^o, Cat) \end{array}$$

$$\Xi' : Hom(A^o, Cat) \rightarrow Cat/A \quad F \mapsto \nabla_A F$$

$$\Xi : Cat/A \rightarrow Hom(A^o, Cat) \quad a \mapsto a \setminus C$$

Representations of a presheaf of small categories over a category. Let A be a small category and A a presheaf of small categories over a category A . The category $Rep(A)$ of representations of A as follows. An object of $Rep(A)$ is a couple (X, ξ) such that X_a is a presheaf over A_a for each object a of A and for every morphism $\alpha : a \rightarrow a'$ a morphism of presheaves $\xi_\alpha : X_{a'} \rightarrow A_\alpha^* X_a$ for each object a of A and $\xi_{1_a} = 1_{X_a}$. We have a following picture;

$$X_a \quad X_{a'} \rightarrow A_\alpha^* X_a$$

$$A_a \xleftarrow{A_\alpha} A_{a'}$$

$$a \xrightarrow{\alpha} a'$$

For any composed morphisms of A

$$a \xrightarrow{\alpha} a' \xrightarrow{\alpha'} a''$$

we have the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} X_{a''} & \xrightarrow{\xi_\alpha} & A_{\alpha'}^* X_{a'} & \xrightarrow{A_{\alpha'}^* \xi_\alpha} & A_{\alpha'}^* A_\alpha^* X_a \\ & \searrow \xi'_\alpha \alpha & & & \end{array}$$

To each morphism $\phi : (X, \xi) \rightarrow (Y, \eta)$ associates a morphism $\phi_a : X_a \rightarrow Y_a$ for any object a of A such that for any $\alpha : a \rightarrow a'$ the following square is commutative.

$$\begin{array}{ccc} X_{a'} & \xrightarrow{\xi_\alpha} & A_\alpha^* X_\alpha \\ \phi_{\alpha'} \downarrow & & \downarrow A_\alpha^* \phi_\alpha \\ Y_{a'} & \xrightarrow{\eta_\alpha} & A_\alpha^* Y_\alpha \end{array}$$

Let A be a small category, G a presheaf of small groupoids over A and $BG = \nabla G$ the classifying category associated to G .

Lemma 1 *Let A be a small category and A a presheaf of small categories over A . Then we obtain the canonical categorical equivalence.*

$$\hat{\nabla} A \cong \text{Rep}(A)$$

Theorem 2 (Grothendieck) *Let W be a basic localizer and $u : A \rightarrow B$ a W -smooth functor. Then if B is a W -local test category, A is also a W -local test category.*

We here assume an axiom of great cardinality which is said to be the principle of Vopenka. Hence every localizer over a small category is accessible.

Corollary 1 *Let W be an accessible basic localizer and A a W -local test category and A a presheaf of small categories over A . Then the category of A -representations admits a structure of closed model category with generated cofibrant the cofibrations of which are the monomorphisms and the weak equivalences of which are the W -equivalences. If moreover W is proper, then this structure is proper. There exists a categorical equivalence between the homotopical category $H_W \text{Rep}(A)$ and the category $\text{Hot}_W // \nabla A$ of the locally constant W -homotopy types over ∇A .*

$$\text{Hot}_W // \nabla A \cong \nabla A$$

Given a presheaf of small groupoids G over a small category A , we have a classifying space BG of G with a universal G -torsors

$$EG \rightarrow BG$$

From now on suppose a basic localizer is accessible and that A is a W -local test category.

Since EG is a G -torsor over BG and since the morphism from EG to the final object of G is a right proper W -equivalence. We can construct such a classifying space by choosing locally cofibrant representation EG that the morphism from EG to the final object of $Rep(G)$ is a trivial fibration in the meaning of the structure of the category of local closed models with respect to W . We can hence define BG as the quotient of EG under action of G . The forgetful functor $RepG/EG \rightarrow RepG$ is a left Quillen equivalence for the categorical structures of local or injective closed models with respect to W .

There exists a left Quillen equivalence

$$Rep(G)/EG \rightarrow \hat{A}/BG \quad (X, X \rightarrow EG \mapsto (G \setminus, G \setminus \rightarrow BG$$

Since we have a categorical equivalence

$$H_W Rep(G)/EG \cong H_W \hat{A}/BG$$

and a canonical categorical equivalence

$$H_W Rep(G)/EG \cong H_W Rep(G)$$

we have a descent functor which is a categorical equivalence

$$\mathbf{Desc} : H_W Rep(G) \longleftrightarrow H_W \hat{A}/BG$$

The descent functor admits a monodromy functor as quasi-inverse

$$\mathbf{Mon} : H_W \hat{A}/BG \longleftrightarrow H_W Rep(G)$$

defined by

$$(X, X \rightarrow BG \xrightarrow{Mon} X \times_{BG} EG$$

The fact that functors descent and monodromy which are quasi-inverses can be considered as a generalization of the topological Galois theory giving a correspondence between the category of covering of a locally simply connected space and the category of its fundamental groupoid representations.

3 Results

Let us consider the 2-category of categories of the sheaves of groupoids representations whose objects are the sheaf of groupoids representation categories and whose morphisms are functors compatible with sheaf of groupoid action. Apply it to the category Sch of locally noetherian connected normal schemes and take a sheaf $\mathbf{G}$ of groupoids as a sheaf of categories whose objects are universal schemes over opens and whose morphisms are Grothendieck etale fundamental groups acting on universal schemes. Then

$$Rep(\mathbf{G}) = \nabla \hat{\mathbf{G}}$$

$$\mathcal{H}_W Rep(\mathbf{G}) \cong \mathcal{H}_W \hat{Sch} / \nabla \mathbf{G}$$

$$\mathcal{H}_W Rep(\mathbf{G}) \cong \mathbf{Hot}_W // \nabla \mathbf{G}$$

Let X be a locally noetherian connected normal scheme and replace Sch by Sch/X . We obtain

$$Rep(\mathbf{G}|X) = \nabla \hat{\mathbf{G}}|X$$

$$\mathcal{H}_W Rep(\mathbf{G}|X) \cong \mathcal{H}_W \hat{Sch}/X / \nabla \mathbf{G}|X$$

$$\mathcal{H}_W Rep(\mathbf{G}|X) \cong \mathbf{Hot}_W // \nabla \mathbf{G}|X$$

Hence X is uniquely defined by $\mathbf{G}|X$. $\mathbf{G}|X$ is determined by the absolute Galois groups of all points on X .

Proposition 2 *Let k be a ground field. Let K be a function field over k and K^s a separable closure of K in an algebraically closed extension of K . Then to each automorphism $\sigma \in \text{Aut}_k(K)$ associates an automorphism of $\text{Gal}(K^s/K)$ such that*

$$\sigma \in \text{Aut}_k(K) \longrightarrow (g \mapsto g^\sigma) \in \text{Aut}(\text{Gal}(K^s/K))$$

which is a mono-morphism. Here extensions are given for each automorphism of $\text{Aut}_k(K)$.

Proof 1 *Let $\text{Aut}_k(K^s, K) = \{g | g \in \text{Aut}_k(K^s), g(K) \subset K\}$. We have a natural homomorphism*

$$\varphi : \text{Aut}_k(K^s, K) \rightarrow \text{Aut}_k(K).$$

Then $\text{Gal}(K^s/K) = \ker(\varphi)$. Note that $\text{Gal}(K^s/K)$ is center-free. Thus for any $\sigma \neq \text{id}$ of $\text{Aut}_k(K)$ there exists an extension $\bar{\sigma}$ since K^s/K is algebraic such that $g \mapsto g^\sigma = \bar{\sigma}^{-1}g\bar{\sigma}$ is non-trivial automorphism. $g \mapsto g^\sigma = g$ for all g implies $\sigma = \text{id}$. Hence $g^\alpha = g^\beta$ for all g implies $\alpha = \beta$. Thus $\sigma \mapsto (g \in \mathbf{Gal}(K^s/K) \mapsto g^\sigma \in \mathbf{Gal}(K^s/K))$ is injective.

Proposition 3 *Let G denote $\text{Aut}_K(K^s) = \text{Gal}(K^s/K)$.*

1. *there exists an exact sequence*

$$1 \rightarrow \text{Aut}_K(K^s) \rightarrow \text{Aut}_k(K^s, K) \rightarrow \text{Aut}_k(K) \rightarrow 1$$

2. *In the following diagram, the vertical homomorphism is surjective and the horizontal homomorphism is defined by g^σ for an element σ of $\text{Aut}_k(K^s, K)$ for any element g of $\text{Aut}_K(K^s)$. Here $\bar{\sigma}$ is an extension when σ is an element of $\text{Aut}_k(K)$.*

$$\begin{array}{ccc} \sigma \mapsto & & (g \mapsto g^\sigma = \bar{\sigma}^{-1}g\bar{\sigma}) \\ \text{Aut}_k(K^s, K) & \longrightarrow & \text{Aut}(\text{Aut}_K(K^s)) \\ \downarrow & & \\ \text{Aut}_k(K) & & \end{array}$$

3.

$$\text{Aut}_k(K^s) = \varprojlim_{\psi} \text{Aut}_k(K^s, \psi(K))$$

where ψ runs all $\text{Aut}_k(K^s)$.

4.

$$\text{Aut}_K(K^s) \triangleleft \text{Aut}_k(K^s, K)$$

5.

$$\text{Aut}_{\psi(K)}(K^s) \triangleleft \text{Aut}_k(K^s, \psi(K))$$

6. *There exists a surjection*

$$\text{Aut}(\text{Gal}(K^s/K)) \rightarrow \text{Aut}_k(K^s)$$

which is a fibre space with the same fibre $\text{Gal}(K^s/K)$.

Proof 2 1. *Since K^s/K is separably algebraic, every automorphism of $\text{Aut}_k(K)$ is able to have an extension to $\text{Aut}_k(K^s)$ which keeps K into itself. Hence we have a surjective homomorphism*

$$\text{Aut}_k(K^s, K) \rightarrow \text{Aut}_k(K)$$

whose kernel is $\text{Aut}_K(K^s)$. In fact K is a fixed field by action $\text{Gal}(K^s/K)$ on K^s .

2. *From (1) it is obvious.*

3. It follows from (1) and (2) replacing K by $\psi(K)$.
4. From (1) it follows immediately.
5. The proof is the same argument as (4).
6. Since $\text{Aut}_k(\psi(K))$ is isomorphic to $\text{Aut}_k(K)$ and

$$\text{Aut}_k(K^s) = \varprojlim_{\psi} \text{Aut}_k(K^s, \psi(K))$$

we get (6) with the aid of (1).

Definition 4 Let k be a ground field and K a function field over k . A groupoid is defined to be a category whose object is $\text{Spec}(K^s)$ and whose morphisms are $\text{Gal}(K^s/K)$.

Proposition 4 Let k be an algebraically closed field. Let E be a groupoid extension of a profinite group P by a groupoid G . Assume

- E has a group section over P . Here it is necessary to assume k is algebraically closed.
- P is the absolute Galois group $\Gamma_K = \text{Gal}(\hat{K}/K)$.
- G is a groupoid whose objects is the separably algebraic closure of a field in an algebraically closed field, i.e., $\text{Spec}(K^s)$ and whose morphisms are the absolute Galois groups acting the object.
- the automorphism group $\text{Aut}_{\Gamma_L}(G_L)$ of G_L is locally algebraic group for every algebraic extension field L of K .

Then P is trivial extension after base-change by a finite extension K' of K .

Proof 3

$$\begin{array}{ccccc} H^1(P, \text{Aut}(G)) & \longrightarrow & H^1(P, (G \rightarrow \text{Aut}(G))) & \longrightarrow & H^2(P, G) \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & H^1(P, \text{Out}(G)) & & \end{array}$$

A given extension class is in $H^1(P, (G \rightarrow \text{Aut}(G)))$. If E has a group section, $P \rightarrow E$, $E \rightarrow \text{Inn}(E)$ and $\text{Inn}(E) \rightarrow \text{Aut}(G)$ gives an element $H^1(P, \text{Aut}(G)) \cong \text{Hom}(P, \text{Aut}(G))$. By assumption this image is a finite group. After base-change E attains a trivial extension.

We will next give a proof for a special case, which is a prototype of the precedent. Let p be a prime number. Let K be a subfield of a finitely generated field extension of $\mathbb{Q}_p$, which is called a sub- p -adic field. Let $\text{Gal}(/K)$ be the absolute Galois group $\text{Gal}(\hat{K}/K)$, where $\hat{K}$ is the algebraic closure of K in an algebraically closed field containing K . In the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}K(X) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}K(Y) \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & \text{Spec}K(S) & \\
 & \downarrow & \\
 & \text{Spec}K &
 \end{array}$$

where $K(X)$, $K(Y)$ and $K(S)$ are function fields which are regular extensions over K , i.e., X , Y , S are varieties geometrically irreducible, reduced over K , if X is trivial, i.e., $X = X_0 \times_K S$ for some variety X_0 over K , when does Y decompose $Y = Y_0 \times_{K'} S$ for some variety Y_0 over a finite extension K' of K ? The answer is yes when $\text{Aut}_{\hat{K}}(\text{Spec}\hat{K}(Y))$ is a group scheme which is locally of finite type, i.e., locally algebraic group.

Remark 1 1. The object of our groupoid is a universal covering of a scheme to act by the absolute Galois group, where the universal covering must also a universal covering of such a scheme that we should prove in the conclusion. For example it is suitable for the aim to take $\text{Spec}(K)$ as a scheme since its universal covering $\text{Spec}(K^s)$ is also a universal covering of any type sub-covering.

2. Let K , L be function fields over a ground field k . Assume L is an extension of K . Let $\text{Gal}(K^s/K)$, $\text{Gal}(L^s/L)$ be the absolute Galois groups of K , L , respectively. Then we have a homomorphism $\text{Gal}(L^s/L) \rightarrow \text{Gal}(K^s/K)$, which canonically factors in the following way:

$$\text{Gal}(L^s/L) \rightarrow \text{Gal}(K^s/(L \cap K^s))$$

is a surjection.

$$\text{Gal}(K^s/(L \cap K^s)) \rightarrow \text{Gal}(K^s/K)$$

is an injection.

4 Mochizuki's Galois theory

Let k be an algebraically closed field of characteristic 0, say, the complex number field. We investigate the birational algebraic geometry from the point of view of the profinite Galois groups

thanks to Mochizuki theory. Let $X \rightarrow S$ be a fibre space of smooth algebraic spaces over k . Let $\text{Spec}k(\eta)$ denote the generic point of the fibre space and $k(\bar{\eta})$ the algebraic closure of $k(\eta)$. The absolute Galois group of $R(X)$ is defined to be the Galois group with Kull topology of the Galois extension $\bar{R}(X)/R(X)$, which denotes $\Gamma_X = \text{Gal}(\bar{R}(X)/R(X))$. This is a profinite group.

Theorem 3 [Mch] *Let p be a prime number. Let K be a subfield of a finitely generated field extension of $\mathbb{Q}_p$. Let X_K be a smooth pro-variety over K and Y_K a hyperbolic pro-curve over K . Let $\text{Hom}_K^{\text{dom}}(X_K, Y_K)$ be the set of dominant K -morphisms from X_K to Y_K and $\text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Pi_{X_K}, \Pi_{Y_K})$ the set of open continuous group homomorphisms $\Pi_{X_K} \rightarrow \Pi_{Y_K}$ over Γ_K , modulo up to inner automorphisms arising from Δ_{Y_K} . Then the natural map*

$$\text{Hom}_K^{\text{dom}}(X_K, Y_K) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Pi_{X_K}, \Pi_{Y_K})$$

is bijective.

Here we have a natural homomorphism $\pi_1(X_K) \rightarrow \Gamma_K$. Let Δ_{X_K} be the maximal pro- p quotient of the geometric fundamental group $\pi_1(X_K)$. Let $\Pi_{X_K} = \pi_1(X_K)/\ker(\pi_1(X_K) \rightarrow \Delta_{X_K})$.

Theorem 4 [Mch] *Let p be a prime number. Let K be a subfield of a finitely generated field extension of $\mathbb{Q}_p$. Let L, M be function fields of arbitrary dimension over K . Let $\text{Hom}_{\text{Spec}(K)}(\text{Spec}(L), \text{Spec}(M))$ be the set of K -morphisms from M to L . Let $\text{Hom}_{\Gamma}^{\text{open}}(\Gamma_L, \Gamma_M)$ over Γ_K , considered up to composition with an inner automorphism arising from $\ker(\Gamma_M, \Gamma_K)$, where Γ_L and Γ_M are the absolute Galois groups of L and M , respectively. Then the natural map $\text{Hom}_K(\text{Spec}(L), \text{Spec}(M)) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_L, \Gamma_M)$ is bijective.*

Theorem 5 ([SGA] SGA1 EX.IX Th.6.1) *Let S be the spectre of an Artinian ring A with the residue field k , $\bar{k}$ a algebraic closure of k , X an S scheme, $X_0 = X \otimes_A k$, $\bar{X}_0 = X \otimes_A \bar{k}$, $\bar{a}$ a geometric point of $\bar{X}$, a its image in X and b its image in S . Suppose that X_0 is quasi-compact and geometrically connected over k . Then the sequence of canonical homomorphisms*

$$1 \rightarrow \pi_1(\bar{X}_0, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(S, b) \rightarrow 1$$

is exact and

$$\pi_1(S, b) \cong \pi_1(k, \bar{k}) = \text{Gal}(\bar{k}/k)$$

We in fact use the following homotopy exact sequence.

Proposition 5 ([TAM] Prop.5.6.1, [SGA] SGA1, [GG] Lemma 5 182-20) *Let X be a quasi-compact and geometrically irreducible and connected scheme over a field k . Fix an algebraic closure*

$\bar{k}$ of k and let k_s the separable closure of k in $\bar{k}$. Let $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}_s$, $\bar{x}$ a geometric point of $\bar{X}$ with values in $\bar{k}$. The sequence of profinite groups

$$1 \rightarrow \pi_1(\bar{X}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(k_s/k) \rightarrow 1$$

is exact.

Proposition 6 *Let k be an algebraically closed field of characteristic 0, $k(x)$ and $k(y)$ extension fields of k . Suppose $k(x) \otimes_k k(y) \rightarrow k(x, y)$ is injective. Then*

$$\pi_1(\text{Speck}(x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y}))$$

is an isomorphism. Furthermore we have an isomorphism:

$$\pi_1(\text{Speck}(x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x}) \times \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y})$$

Proof 4 *For an inclusion $k(x) \otimes_k k(y) \subset k(x, y)$ there exists a canonical dominant map: $\text{Speck}(x, y) \rightarrow \text{Speck}(x) \otimes_k k(y)$ and a group homomorphism: $\pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y}))$. By universality of product there exists a homomorphism of groups $\pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x}) \times \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y})$ since we have $\pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x})$ and $\pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y})$.*

We have the following commutative diagram of three exact sequences.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(x, y), (\bar{x}, \bar{y})) & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(x) \otimes_k k(y), (\bar{x}, \bar{y})) & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(x), \bar{x}) \times \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y}) & \longrightarrow & \pi_1(\text{Speck}(y), \bar{y}) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Four arrows of both sides of exact sequence are isomorphisms. There are two arrows among profinite groups in the center of exact sequences. Hence they are isomorphisms.

Proposition 7 ([Mch]) *Let L be a sub- p -adic field and a function field. The absolute Galois group Γ_L is center-free.*

Proposition 8 *Let $\bar{K}$ be an algebraically closed field of characteristic 0 and L a function field. The absolute Galois group Γ_L is center-free.*

Proof 5 Let $\bar{K}$ be an algebraically closed field. It is known by Douady that the absolute Galois group of the function field of $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ is a free profinite group. Every open subgroup of a free profinite group is also free ([FJ]). A free profinite group is center-free. Let X be a variety associated to L . X is considered to be a fibre space over a projective space P with a general fibre a curve. Let M be the absolute Galois group of the function field of P . Note that the absolute Galois group M is center-free since a projective space is birationally equivalent to a product of projective lines. A natural group homomorphism $h : L \rightarrow M$ is surjective. The image of the center of L by h is contained in the center of M , which is an identity. Hence it is contained in $\ker h$, which is the absolute Galois group of the general generic fibre of X/P . An absolute Galois group of a curve is open subgroup of the absolute Galois group of the function field of a projective line, which is center-free. Thus $\ker h$ is center-free. Therefore L is center-free.

Let p be a prime number. Let K be a subfield of a finitely generated field extension of $\mathbb{Q}_p$. It is called a sub- p -adic field. Note that there exists an isomorphism $\iota : \bar{K} \cong \mathbf{C}$ when K is uncountable.

Let $X_{\bar{\eta}}$ be the geometric generic fibre of X/S . Then there exists a variety F_{K_0} and a finitely generated extension field K_0 of $\mathbf{Q}$ such that $F_{K_0} \times_{K_0} \mathbf{C} \cong X_{\bar{\eta}}$.

Note that $\text{Bir}_{\mathbf{C}}(X_{\bar{\eta}}) = \text{Bir}_{\overline{\mathbf{Q}_p}}(F_{K_0} \otimes_{K_0} \overline{\mathbf{Q}_p})$.

Let $\pi : \Gamma_{F_K} \rightarrow \Gamma_K$ denote the structure map associated to $\text{Spec } K(F_K) \rightarrow F_K \rightarrow \text{Spec}(K)$, which is a surjection since K is algebraically closed in the rational function field of F . Let $Z(\Gamma_{F_K})$ denote the centre of Γ_{F_K} . Then π induces $\pi : Z(\Gamma_{F_K}) \rightarrow Z(\Gamma_K)$.

Lemma 2 Let K be a field of characteristic 0. Let A be an algebraic space in group locally of finite type over K (i.e. with at most countable components) and let $\rho : \Gamma_{S_K} \rightarrow A$ be a continuous homomorphism as topological groups. Then

1. The image of this homomorphism ρ is a finite group.
2. Let $P = \Gamma_{S_K}$. There exist a variety S'_K which is generically finite over S_K and an injective homomorphism $P' \rightarrow P$ with $(P' : P) < \infty$ such that the representation $\rho' : P' \rightarrow A$ is trivial. Here P' denotes the absolute Galois group $\Gamma_{S'_K} = \text{Gal}(\overline{K(S'_K)}/K(S'_K))$.

Proof 6 An algebraic space in group A is locally of finite type over K . The representation $\rho : P \rightarrow A$ induces $\bar{\rho} : P \rightarrow A/A^0$, where A^0 denotes the neutral component of A . Note that there is no countable profinite group. Since A/A^0 is a countable set, $\bar{\rho}(P)$ is a finite group. Replace by P the kernel of $\bar{\rho}$. We have $\rho : P \rightarrow A^0$. We have an isomorphism

$$H^1(\overline{K(S_K)}/K(S_K), A^0(\overline{K(S_K)})) \cong H^1(P, A^0) \cong \text{Hom}_{\text{Topological group}}^{\text{Continuous}}(P, A^0)$$

$$H_{\acute{e}t}^1(\mathrm{Spec} K(S_K), A^0) \cong \mathrm{TORS}(\mathrm{Spec} K(S_K), A^0).$$

Let Q be an A^0 -torsor over $\mathrm{Spec} K(S_K)$ associated to $\rho : P \rightarrow A^0$. A^0 is algebraic (quasi-compact, faithfully flat and of finite type) over $\mathrm{Spec} K(S_K)$. There exists an isomorphism $A^0 \times Q \rightarrow Q \times Q$ over $\mathrm{Spec} K(S_K)$. Thus along $\mathrm{Spec} K(Q) \rightarrow Q \rightarrow \mathrm{Spec} K(S_K)$, the pullback of A^0 -torsor Q becomes trivial. Namely, the A^0 -torsor Q is trivial over $\mathrm{Spec} K(S'_K)$. Hence the induced homomorphism $\mathrm{Gal}(\overline{K(Q)}/K(Q)) \rightarrow A^0$ is trivial. Let $S'_K \rightarrow S_K$ be dominant and S'_K the subvariety of Q of the same dimension as S_K . Then $\Gamma_Q \rightarrow \Gamma_{S'_K}$ is a surjective homomorphism. We have

$$\Gamma_Q \rightarrow \Gamma_{S'_K} \subset \Gamma_{S_K} \rightarrow A^0 \rightarrow A.$$

Since $\Gamma_Q \rightarrow A^0$ is trivial, i.e., $\Gamma_Q \rightarrow 1$, $\Gamma_{S'_K} \rightarrow A$ is trivial. It is obvious that $(\Gamma_{S'_K} : \Gamma_{S_K}) < \infty$. Hence $\mathrm{im}(\rho)$ is a finite group.

Note that a quotient of a scheme by a finite group is in the category of algebraic spaces.

Proposition 9 *Let X/S be a fibre space. Let $1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow 1$ be an extension of a profinite group P by a profinite group G associated to a fibre space $X \rightarrow S$. Namely G , E and P are profinite groups which are the absolute Galois groups associated to the rational function fields of the generic geometric fibre $X_{\bar{\eta}}$, X and S , respectively.*

Proof 7 *Let X/S be a fibre space with the generic geometric fibre $X_{\bar{\eta}}$. To a fibre space the epimorphism $\Gamma_{R(X)} \rightarrow \Gamma_{R(S)}$ is associated. Consider a morphism $\mathrm{Spec}(R(X)) \rightarrow \mathrm{Spec}(R(S))$ with the generic geometric fibre $\mathrm{Spec} R(X_{\bar{\eta}})$. Grothendieck's algebraic π_1 in $SGA1([SGA])$ gives the exact sequence: $1 \rightarrow \pi_1(\mathrm{Spec} R(X_{\bar{\eta}})) \rightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}(R(X))) \rightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}(R(S))) \rightarrow 1$. Here $\pi_1(\mathrm{Spec} R(X_{\bar{\eta}}))$, $\pi_1(\mathrm{Spec}(R(X)))$ and $\pi_1(\mathrm{Spec}(R(S)))$ are the absolute Galois groups G , E and P themselves, respectively. See the diagram:*

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & \mathrm{Spec} k(\bar{\eta}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_{R(X)} & \longleftarrow & \Gamma_{R(X_{\bar{\eta}})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{R(S)} & \longleftarrow & 1 = \Gamma_{k(\bar{\eta})} \end{array}$$

Thus to a fibre space X/S the extension of a profinite groups $1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow 1$ is associated.

We make use of theory of Schreier's classification of group extensions, Grothendieck-Giraud's classification of topos extensions or Breen's classification of 2-gerbes and 2-stacks.([AM], [Gir], [Breen1], [Breen2]) Here we take the notion of Breen's.

Definition 5 *An extension of groups $1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow 1$ is said to be neutral if it has a section which is a group homomorphism $\sigma : P \rightarrow E$.*

An extension of groups $1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow 1$ is said to be central if G is contained in the center of E .

E is said to be a semi-direct product of G and P if G is a normal subgroup of E and if the multiplication $(x, y), (u, v) \in G \times P$ is defined by (xu^y, yv) , where $u^y = \sigma(y)u\sigma(y)^{-1}$. E is denoted by $G \rtimes P$.

$\text{Inn}(G)$ denotes the inner automorphism group of G . $E \rightarrow \text{Aut}(G)$ denotes the natural homomorphism $x \in E \mapsto (g \mapsto g^x) \in \text{Aut}(G)$. $\text{Out}(G)$ is defined to be $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$. This induces a homomorphism $E/G \rightarrow \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$, i.e., $P \rightarrow \text{Out}(G)$.

We call left crossed module a homomorphism of groups $\delta : G \rightarrow H$, equipped with a left action of H onto G $(h, g) \mapsto {}^h g$ ([Breen1]):

1. $\delta({}^h g) = h\delta(g)h^{-1}$
2. $\delta(g')g = g'gg'^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & H \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Aut}(G) \end{array}$$

$i : G \rightarrow \text{Aut}(G)$, where $g \mapsto i_g(x \mapsto gxg^{-1})$, and the natural action $\text{Aut}(G)$ onto G defines a crossed module, which denotes $G \rightarrow \text{Aut}(G)$.

To an exact sequence $1 \rightarrow \text{Inn}G \rightarrow \text{Aut}G \rightarrow \text{Out}G \rightarrow 1$, we have an exact sequence

$$H^1(P, \text{Inn}G) \rightarrow H^1(P, \text{Aut}G) \rightarrow H^1(P, \text{Out}G),$$

i.e.,

$$\text{Hom}(P, \text{Inn}G) \rightarrow \text{Hom}(P, \text{Aut}G) \rightarrow \text{Hom}(P, \text{Out}G).$$

Here $\text{Out}G$ denotes the outer automorphism group of G . Let $G \rightarrow \text{Aut}G$ denote the crossed module. The set of the extensions of a profinite group P by a profinite group G denotes $\text{Ext}(P, G)$. A group extension can be defined to be as an element of $H^1(P, (G \rightarrow \text{Aut}G))$. There exists an exact sequence $1 \rightarrow Z(G)[1] \rightarrow (G \rightarrow \text{Aut}(G)) \rightarrow \text{Out}G \rightarrow 1$ ([Breen2]). We have the exact sequence of cohomologies ([Breen2]):

$$0 \rightarrow H^2(P, Z(G)) \rightarrow H^1(P, (G \rightarrow \text{Aut}G)) \rightarrow H^1(P, \text{Out}G).$$

Here $Z(G)$ denotes the center of G . There exists another sequence $Aut(G) \rightarrow (G \rightarrow Aut(G)) \rightarrow G[1]$ in the homotopy category. See the next commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(P, Inn(G)) & \longrightarrow & H^1(P, Aut(G)) & \longrightarrow & H^2(P, Z(G)) \\
& \searrow & & & \downarrow \\
& & H^1(P, Aut(G)) & \longrightarrow & H^1(P, G \rightarrow Aut(G)) \\
& & \searrow & & \downarrow \\
& & & & H^1(P, Out(G)) \\
& & & & \downarrow \\
& & & & H^3(P, Z(G))
\end{array}$$

This vertical sequence is nothing but the following exact sequence

$$Ext(P, Z(G)) \rightarrow Ext(P, G) \rightarrow Hom(P, Out(G)) \rightarrow H^3(P, Z(G))$$

When $Z(G) = 0$, an extension $1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow 1$ is determined uniquely by a continuous group homomorphism $\varphi : P \rightarrow Out(G)$ pulling back the exact sequence $1 \rightarrow G \rightarrow Aut(G) \rightarrow Out(G) \rightarrow 1$ (cf. 2.2 Th.4.8([AM])). Hence

$$H^1(P, G \rightarrow Aut(G)) \cong H^1(P, Out(G)) \cong Hom(P, G)$$

In general we refer to the following theorem.

Theorem 6 ([Gir], [Breen1], [Breen2], [Rou],[AM]) *There are equivalent expressions of extensions of Γ_{S_K} by G .*

1.

$$BiTors(G) \cong Eq(G[1]) \cong (G \rightarrow Aut(G))$$

as monoidal categories.

2.

$$H^1(\Gamma_{S_K}, BiTors(G)) \cong H^1(\Gamma_{S_K}, Eq(G[1])) \cong H^1(\Gamma_{S_K}, (G \rightarrow Aut(G)))$$

as pointed sets

3.

$$Mon(\Gamma_{S_K}, BiTors(G)) \cong Mon(\Gamma_{S_K}, Eq(G[1])) \cong Mon(\Gamma_{S_K}, (G \rightarrow Aut(G)))$$

as morphisms of monoidal categories.

Proposition 10 *Let K be a field of characteristic 0. Let $K(x)$ and $K(y)$ be function fields over K . Assume $K(x) \otimes_K K(y) \rightarrow K(x, y)$ is an inclusion of K -algebras. Then $\pi_1(K(x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \rightarrow \pi_1(K(x), \bar{x}) \times_{\pi_1(K, \bar{K})} \pi_1(K(y), \bar{y})$ is isomorphic.*

Proof 8 *Let $\bar{K}$ be an algebraic closure in an algebraically closed field which is an extension of K . Let $G = \pi_1(\bar{K}(x), \bar{x})$, $\Gamma_K = \pi_1(K, \bar{K})$. The following diagram in two vertical extensions in the right-side is a base-change of extensions:*

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & & 1 & & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G & \longleftarrow & G & \longleftarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 ?? & \longleftarrow & \pi_1(K(x, y), (\bar{x}, \bar{y})) & \longleftarrow & \pi_1(\bar{K}(x), \bar{x}) \times \pi_1(\bar{K}(y), \bar{y}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(K, \bar{K}) & \longleftarrow & \pi_1(K(y), \bar{y}) & \longleftarrow & \pi_1(\bar{K}(y), \bar{y}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

There exists an exact sequence: $1 \rightarrow \pi_1(\bar{K}(y), \bar{y}) \rightarrow \pi_1(K(y), \bar{y}) \rightarrow \pi_1(K, \bar{K}) \rightarrow 1$. Consider the following exact sequence of extensions and an element ξ associated to the central vertical extension in the diagram above:

$$1 \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_K, \text{Eq}(G[1])) \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_K}(\pi_1(K(y), \bar{y}), \text{Eq}(G[1])) \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\pi_1(\bar{K}(y), \bar{y}), \text{Eq}(G[1]))$$

The image of ξ in $\text{Mon}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\pi_1(\bar{K}(y), \bar{y}), \text{Eq}(G[1]))$ is a trivial. Hence there exists an extension ξ_0 in $\text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_K, \text{Eq}(G[1]))$ whose image is ξ in $\text{Mon}_{\Gamma_K}(\pi_1(K(y), \bar{y}), \text{Eq}(G[1]))$. ξ_0 corresponds to a vertical extension in the left-side. Thus $??$ is $\pi_1(K(x), \bar{x})$. Therefore

$$\pi_1(K(x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \cong \pi_1(K(x), \bar{x}) \times_{\pi_1(K, \bar{K})} \pi_1(K(y), \bar{y})$$

From here in several steps we shall prove that when there exists an S -dominant rational map $Y \rightarrow X$ and when $\text{var}(Y/S) = 0$, then $\text{var}(X/S) = 0$ if the general generic fibre of X/S is of Kodaira dimension ≥ 0 .

Proposition 11 ([EGA]) *Let S be a scheme, $(X_\lambda, v_{\lambda\mu})$ a filtered projective system of S -schemes; assume that there exists α such that $v_{\alpha\lambda}$ is an affine morphism for every $\lambda \geq \alpha$, so that the projective limit $X = \varprojlim X_\lambda$ exists in the category of S -schemes. Let Y be an S -scheme and for*

every $\lambda \geq \alpha$ let $e_\lambda : \text{Hom}_S(X_\lambda, Y) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y)$ the map which gives $f = f_\lambda \circ v_\lambda$ to each S -morphism $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y$, where $v_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ is the canonical morphism. The family (e_λ) is an inductive system of maps, which defines the canonical map

$$\varinjlim \text{Hom}_S(X_\lambda, Y) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y).$$

Suppose that X_α is quasi-compact and quasi-separated and that the structure morphism $Y \rightarrow S$ is locally of finite presentation (resp. locally of finite type). Then the map above is bijective (resp. injective). Furthermore, suppose that $\varprojlim Y_\rho$, where $(Y_\rho, t_{\rho\sigma})$ is a filtered projective system of S -schemes such that the structure morphism is locally of finite presentation for every ρ . One has a canonical bijection

$$\text{Hom}_S(X, Y) \cong \varprojlim_{\rho} (\varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_S(X_\lambda, Y_\rho)).$$

Proposition 12 *Let K be a sub- p -adic field and X/S a fibre space of varieties over K . Let S_λ be a filtered projective system of K -varieties such that*

1. $K(S_\lambda)/K(S)$ is a normal extension for every λ
2. the structure homomorphism $\Gamma_{K(S_\lambda)} \rightarrow \Gamma_K$ is surjective.

Let $\Gamma_{\bar{S}} = \ker(\Gamma_S \rightarrow \Gamma_K)$ and $\Gamma_{\bar{X}} = \ker(\Gamma_X \rightarrow \Gamma_K)$. Suppose that there exists a sectional homomorphism $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \Gamma_{\bar{X}} \subset \Gamma_X$ so that one has a homomorphism $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_X)$ and $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_\lambda})$.

Let $B(\bar{S}) = \text{im}(\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \varprojlim_{\mu} (\varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu}))$. One has a canonical Mochizuki bijection:

$$\varprojlim_{\mu} (\varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu}) \cong \varprojlim_{\mu} (\varinjlim_{\lambda} \text{Mor}_K^{\text{dom}}(\text{Spec}(K(X_\lambda)), \text{Spec}(K(X_\mu)))).$$

By the precedent proposition, one obtains

$$\varprojlim_{\mu} (\varinjlim_{\lambda} \text{Mor}_K^{\text{dom}}(\text{Spec}(K(X_\lambda)), \text{Spec}(K(X_\mu)))) \subset \text{Mor}_K(\varinjlim_{\lambda} \text{Spec } K(X_\lambda), \varprojlim_{\mu} \text{Spec } K(X_\mu)).$$

One also gets canonical homomorphisms of topological groups:

$$\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow B(\bar{S}) \subset \text{Aut}_K(\varinjlim_{\lambda} \text{Spec } K(X_\lambda)) \subset \text{Bir}_{\bar{K}}(X_{\bar{\eta}}).$$

In the other way, one obtains a canonical homomorphism

$$\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow B(\bar{S}) \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\varinjlim_{\lambda} \Gamma_{X_\lambda}, \varprojlim_{\mu} \Gamma_{X_\mu}) / \varprojlim_{\mu} \Gamma_{\bar{X}_\mu} \rightarrow \text{Out}(\Gamma_{X_{\bar{K}}}).$$

In particular, if $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Bir}_{\bar{K}}(\bar{K}(X_{\bar{\eta}}))$ is a trivial homomorphism, then so is $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Out}(\Gamma_{X_{\bar{K}}})$.

Proof 9 Since S_λ be a filtered projective system of K -varieties such that

1. $K(S_\lambda)/K(S)$ is a normal extension for every λ
2. for every $\mu \geq \lambda$ $K(S_\mu)/K(S_\lambda)$ is a normal extension
3. the structure homomorphism $\Gamma_{K(S_\lambda)} \rightarrow \Gamma_K$ is surjective,

and by assumption there exists a sectional homomorphism $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \Gamma_{\bar{X}} \subset \Gamma_X$, one has a homomorphism $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_X)$ and $\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_\lambda})$. By Mochizuki's theorem, one has

$$\lim_{\overrightarrow{\lambda}} \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu} \cong \lim_{\overrightarrow{\lambda}} \text{Mor}_K^{\text{dom}}(\text{Spec}(K(X_\lambda)), \text{Spec}(K(X_\mu))).$$

Hence

$$\lim_{\overleftarrow{\mu}} (\lim_{\overrightarrow{\lambda}} \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu}) \cong \lim_{\overleftarrow{\mu}} (\lim_{\overrightarrow{\lambda}} \text{Mor}_K^{\text{dom}}(\text{Spec}(K(X_\lambda)), \text{Spec}(K(X_\mu))))$$

Owing to Mochizuki's bijection and the precedent proposition in EGA,

$$\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \lim_{\overleftarrow{\mu}} (\lim_{\overrightarrow{\lambda}} \text{Mor}_K^{\text{dom}}(\text{Spec}(K(X_\lambda)), \text{Spec}(K(X_\mu)))) \subset \text{Mor}_K(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \text{Spec } K(X_\lambda), \lim_{\overleftarrow{\mu}} \text{Spec } K(X_\mu))$$

Therefore one gets non trivial canonical homomorphisms of topological groups:

$$\Gamma_{\bar{S}} \rightarrow \text{Aut}_K(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \text{Spec } K(X_\lambda)).$$

Note that

$$\text{Aut}_K(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \text{Spec } K(X_\lambda)) \subset \text{Aut}_{\bar{K}}(\text{Spec } \bar{K}(X_{\bar{\eta}})) = \text{Bir}_{\bar{K}}(X_{\bar{\eta}})$$

Secondly, we show that there exists a canonical homomorphism

$$\text{Aut}_{\Gamma_K}(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \Gamma_{X_\lambda}, \lim_{\overleftarrow{\mu}} \Gamma_{X_\mu}) / \lim_{\overleftarrow{\mu}} \Gamma_{\bar{X}_\mu} \rightarrow \text{Out}(\Gamma_{X_{\bar{K}}}).$$

Since $\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \Gamma_{X_\lambda} \rightarrow \Gamma_{X_\mu}$, one has a canonical map

$$\text{Hom}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_K}(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}).$$

It follows that

$$\lim_{\overleftarrow{\mu}} (\lim_{\overrightarrow{\lambda}} \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu}) \rightarrow \lim_{\overleftarrow{\mu}} (\text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu})$$

and from the definition of the projective limit

$$\lim_{\overleftarrow{\mu}} (\text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \Gamma_{X_\lambda}, \Gamma_{X_\mu}) / \Gamma_{\bar{X}_\mu}) \cong \text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\lim_{\overleftarrow{\lambda}} \Gamma_{X_\lambda}, \lim_{\overleftarrow{\mu}} \Gamma_{X_\mu}) / \lim_{\overleftarrow{\mu}} \Gamma_{\bar{X}_\mu}$$

Since

$$\varprojlim_{\mu} \Gamma_{X_{\mu}} \longleftarrow \Gamma_{X_{\bar{K}}}$$

one has a canonical map

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_K}^{\mathrm{open}}(\varprojlim_{\lambda} \Gamma_{X_{\lambda}}, \varprojlim_{\mu} \Gamma_{X_{\mu}}) / \varprojlim_{\mu} \Gamma_{\bar{X}_{\mu}} \rightarrow \mathrm{Out}(\Gamma_{X_{\bar{K}}})$$

and a canonical homomorphism

$$\mathrm{Aut}_{\Gamma_K}(\varprojlim_{\lambda} \Gamma_{X_{\lambda}}, \varprojlim_{\mu} \Gamma_{X_{\mu}}) / \varprojlim_{\mu} \Gamma_{\bar{X}_{\mu}} \rightarrow \mathrm{Out}(\Gamma_{X_{\bar{K}}}).$$

We consider the following diagrams:

$$\begin{array}{ccccc} Y_K \times_K S_K & \longrightarrow & X_K & \longrightarrow & S_K \\ \downarrow & & \searrow & & \\ \mathrm{Spec} K & & & & \\ \\ \Gamma_{Y_K} \times_{\Gamma_K} \Gamma_{S_K} & \longrightarrow & \Gamma_{X_K} & \longrightarrow & \Gamma_{S_K} \\ \downarrow & & \searrow & & \\ \Gamma_K & & & & \end{array}$$

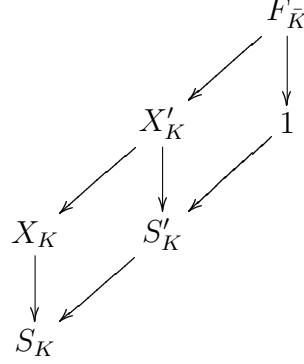
Proposition 13 *Let K be a sub- p -adic field and X_K/S_K a fibre space over K . Let Γ_{X_K} , Γ_{S_K} and Γ_K be the absolute Galois groups of the sub- p -adic fields $K(X_K)$, $K(S_K)$ and K , respectively. To a fibre space X_K/S_K up to birational equivalence, i.e., algebraically closed extension $K(S_K) \subset K(X_K)$, there corresponds an exact sequence:*

$$1 \rightarrow \Gamma_{X_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{X_K} \rightarrow \Gamma_{S_K} \rightarrow 1$$

1. The extension of profinite groups above is expressed by an element of the pointed set $H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}}))$.
2. The following is bijection $H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \cong H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \mathrm{Out}(\Gamma_{F_{\bar{K}}}))$
- 3.

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \mathrm{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) & \longrightarrow & H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \mathrm{Out}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \end{array}$$

4. Let $S'_K \rightarrow S_K$ be a dominant K -rational map and X'_K/S'_K a pull-back of X_K/S_K .



$$\lim_{\rightarrow S'_K} \text{Aut}_{\Gamma_{S'_K}}(\Gamma_{X'_K})/\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})/\Gamma_{F_{\bar{K}}} \quad (1)$$

Proof 10 1. There exist a natural restrictions $\text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_{X_{\bar{K}}})$.

2. Let $p : \Gamma_{X_K} \rightarrow \Gamma_K$ be the structure map. Let u be a Γ_K -automorphism Γ_{X_K} and $x \in \Gamma_{X_{\bar{K}}}$. $p(u(x)) = p(x) = 1 \in \Gamma_K$. Hence $u(x) \in \Gamma_{X_{\bar{K}}}$.

Lemma 3 Assume there exists a dominant S_K -rational map $Y_K \times_K S_K \rightarrow X_K$. Then there exists a continuous homomorphism $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K})$, which is an element of $H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K}))$. In other word, we have $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_K(K(X_K))$. The following square is commutative.

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K})) & \longrightarrow & H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \text{Out}(\Gamma_{F_{\bar{K}}}))
 \end{array}$$

Proof 11 Since there exists a dominant S_K -rational map $Y_K \times_K S_K \rightarrow X_K$, Mochzuki's correspondence implies the commutative diagram of open homomorphisms

$$\begin{array}{ccccc}
 \Gamma_{Y_K} \times_{\Gamma_K} \Gamma_{S_K} & \longrightarrow & \Gamma_{X_K} & \longrightarrow & \Gamma_{S_K} \\
 \downarrow & & & \swarrow & \\
 & & \Gamma_K & &
 \end{array}$$

There exists an open homomorphism $\Gamma_{Y_{\bar{K}}} \times_{\Gamma_{\bar{K}}} \Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{X_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{S_{\bar{K}}}$. Hence there exists a sectional homomorphism $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{X_{\bar{K}}} \subset \Gamma_{X_K}$. By the sectional homomorphism $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{X_K}$, we have a continuous homomorphism $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K})$ by inner automorphisms. Since $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow 1 \subset \Gamma_K$, we have $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K})$.

Note that letting $K(S_K)$ and $X_K \rightarrow S_K$ be such a finite extension in a sub-p-adic fields and its pull-back that $\kappa(S_K) = \dim S_K$, then $\kappa(X_K) \geq \kappa(F_{\bar{K}}) + \dim(S_K)$.

Lemma 4 *Let K be a sub-p-adic field. Assume that $\text{Bir}(F_{\bar{K}})$ is an algebraic space in group locally of finite type and that there exist a dominant S_K -rational map $Y_K \times_K S_K \rightarrow X_K$. Then there exists a generically finite morphism $S'_K \rightarrow S_K$ such that the natural map $H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \rightarrow H^1(\Gamma_{S'_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_{F_{\bar{K}}}))$ sends the extension class to the trivial extension class, i.e., a distinguished element.*

Proof 12 *Since there exist a dominant S_K -rational map $Y_K \times_K S_K \rightarrow X_K$, there exist a section $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{X_K}$ and a $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Inn}(\Gamma_{X_K}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_{X_K})$. Choose a K -dominant map $S'_K \rightarrow S_K$ such that $\Gamma_{S_K} \supset \Gamma_{S'_K}$ is normal and of finite index. Hence it induces $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X'_K})$. Let $\text{Aut}^{\text{equ}, \text{nor}}(\Gamma_{X_K}) \subset \text{Aut}(\Gamma_{X_K})$ be a subgroup such that each automorphism is equivariant with natural maps $\Gamma_{X_K} \rightarrow \Gamma_{S_K} \rightarrow \Gamma_K$ and keeps invariant normal subgroups.*

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma_{X_K} & \longleftarrow & \Gamma_{X'_K} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \lim_{\leftarrow} \Gamma_{X''_K} \longleftarrow \Gamma_{F_{\bar{K}}} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\Gamma_{S_K} & \longleftarrow & \Gamma_{S'_K} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \lim_{\leftarrow} \Gamma_{S''_K} \longleftarrow \Gamma_{\overline{K(K)}} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\Gamma_K & & \Gamma_K & & \cdots & & \Gamma_K \\
& & & & & & \Gamma_{\bar{K}} = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Aut}_{\Gamma_K}^{\text{equ}, \text{nor}}(\Gamma_{X_K})/\Gamma_{X_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \text{Aut}_{\Gamma_K}^{\text{equ}, \text{nor}}(\Gamma_{X'_K})/\Gamma_{X'_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow} & \text{Aut}_{\Gamma_K}^{\text{equ}, \text{nor}}(\Gamma_{X''_K})/\Gamma_{X''_{\bar{K}}} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
\text{Bir}_K(K(X_K))^{\text{equi}, \text{nor}} & \longrightarrow & \text{Bir}_K(K(X'_K))^{\text{equi}, \text{nor}} & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow} & \text{Bir}_K(K(X''_K))^{\text{equi}, \text{nor}} \\
& & & & & \\
\text{Aut}_{\Gamma_K}^{\text{equ}, \text{nor}}(\Gamma_{X'_K})/\Gamma_{X'_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow} & \text{Aut}_{\Gamma_K}^{\text{equ}, \text{nor}}(\Gamma_{X''_K})/\Gamma_{X''_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{F_K})/\Gamma_{\bar{K}} \\
\downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Bir}_K(K(X'_K))^{\text{equi}, \text{nor}} & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow} & \text{Bir}_K(K(X''_K))^{\text{equi}, \text{nor}} & \longrightarrow & \text{Bir}_K(K(F_K))
\end{array}$$

Thus by the precedent proposition the image of $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow B(S_{\bar{K}}) \subset \text{Bir}(X_{\bar{K}})$ is finite and there exists a homomorphism $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow B(S_{\bar{K}}) \rightarrow \text{Out}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})$. Thus one can obtain there exists a generically

finite morphism $S'_K \rightarrow S_K$ such that the natural map $H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \text{Out}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \rightarrow H^1(\Gamma_{S'_K}, \text{Out}(\Gamma_{F_{\bar{K}}}))$ sends the extension class to the trivial extension class, i.e., a distinguished element.

Proposition 14 *We have the following results.*

1.

$$\text{Hom}^{\text{open}, \text{epi}}(\Gamma_{X_K}, \Gamma_{S_K}) / \Gamma_{S_{\bar{K}}} \cong \text{Mor}_K^{\text{alg. closed}}(\text{Spec } K(X_K), \text{Spec } K(S_K))$$

, where *epi* and *alg.closed* mean epimorphisms and $K(X_K)/K(S_K)$ algebraically closed extensions, respectively.

2. (1) is equivalent to a category of fibre spaces between projective varieties

$$\begin{array}{c} X_K \\ \downarrow \\ S_K \\ \downarrow \\ \text{Spec } K \end{array}$$

up to birational equivalence.

3. there exists a restriction map

$$\text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{X_K}, \Gamma_{S_K}) / \Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_{\bar{K}}}^{\text{open}}(\Gamma_{X_{\bar{K}}}, \Gamma_{S_{\bar{K}}}) / \Gamma_{S_{\bar{K}}}$$

, where $\Gamma_{\bar{K}} = 1$.

4. the following map is pulling back extensions or "base change".

$$\text{Ext}(\Gamma_{S_K}, \Gamma_{F_{\bar{K}}}) \rightarrow \text{Ext}(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \Gamma_{F_{\bar{K}}})$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{F_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \Gamma_{F_{\bar{K}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{X_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \Gamma_{X_K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{S_{\bar{K}}} & \longrightarrow & \Gamma_{S_K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

5. the following is an exact sequence.

$$1 \rightarrow \Gamma_{X_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{X_K} \rightarrow \Gamma_K \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_K}(\Gamma_K, \Gamma_{S_K}) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_K}(\Gamma_{X_K}, \Gamma_{S_K}) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\Gamma_{X_{\bar{K}}}, \Gamma_{S_{\bar{K}}})$$

6.

$$1 \rightarrow \Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{S_K} \rightarrow \Gamma_K \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_K, \text{Eq}(G[1])) \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_{S_K}, \text{Eq}(G[1])) \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \text{Eq}(G[1]))$$

7.

$$\text{Hom}_{\Gamma_K}^{\text{open}}(\Gamma_{F_K}, \Gamma_K)/\Gamma_K \cong \text{Mor}_K(\text{Spec } K(F_K), \text{Spec } K)$$

Proof 13 1. Applying Mochizuki theory we have (1) and (2) since a fibre space has connected fibres.

2. (3) is obtained by restricting homomorphisms to homomorphisms over $1 = \Gamma_{\bar{K}} \rightarrow \Gamma_K$.

3. (7) is Mochizuki correspondence.

4. (4) and (6) are pulling back extensions by base change $\Gamma_{S_{\bar{K}}} \rightarrow \Gamma_{S_K}$.

5. (5) Applying a left-exact functor Hom_{Γ_K} we have an exact sequence.

6. The contravariant functor $\text{Hom}_{\Gamma_K}(-, \Gamma_{S_K})$ is a left-exact. Note that $\text{Hom}_{\Gamma_K}(-, \Gamma_{S_K}) = \text{Hom}_{\Gamma_{\bar{K}}}(-, \Gamma_{S_{\bar{K}}})$.

7. The contravariant functor $\text{Mon}_{\Gamma_K}(-, \text{Eq}(G[1]))$ is left-exact. Note that $\text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_{S_K}, \text{Eq}(G[1])) = \text{Mon}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, \text{Eq}(G[1]))$

Proposition 15 Let K be a sub- p -adic field. Assume that $\text{Bir}(F_{\bar{K}})$ is an algebraic space in group locally of finite type and that there exist a dominant S_K -rational map $Y_K \times_K S_K \rightarrow X_K$ Then there exists a generically finite morphism $S'_K \rightarrow S_K$ such that there exists a birational equivalence over S'_K

$$X_K \times_{S_K} S'_K \cong F_K \times_K S'_K$$

, i.e., X_K/S_K is birationally isotrivial.

Proof 14 Let K be a sub- p -adic field. Assume that $\text{Bir}(F_{\bar{K}})$ is an algebraic space in group locally of finite type and that there exist a dominant S_K -rational map $Y_K \times_K S_K \rightarrow X_K$. Then there exists a generically finite morphism $S'_K \rightarrow S_K$ such that the natural map $H^1(\Gamma_{S_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{F_{\bar{K}}})) \rightarrow H^1(\Gamma_{S'_{\bar{K}}}, (\Gamma_{F_{\bar{K}}} \rightarrow \text{Aut}_{\Gamma_K}(\Gamma_{F_{\bar{K}}}))$ sends the extension class to the trivial extension class, i.e., a distinguished element. Let $G = \Gamma_{F_{\bar{K}}}$. One has the following exact sequence:

$$1 \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_K, \text{Eq}(G[1])) \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_{S'_K}, \text{Eq}(G[1])) \rightarrow \text{Mon}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\Gamma_{S'_{\bar{K}}}, \text{Eq}(G[1]))$$

The element of $X_K \times_{S_K} S'_K$ in $\text{Mon}_{\Gamma_K}(\Gamma_{S'_K}, \text{Eq}(G[1]))$ maps to 1 in $\text{Mon}_{\Gamma_{\bar{K}}}(\Gamma_{S'_{\bar{K}}}, \text{Eq}(G[1]))$. Hence choosing a variety F_K one obtains $X_K \times_{S_K} S'_K = F_K \times_K S'_K$ birationally by pull-back and Mochizuki correspondence. We make use of the following proposition for existence of a variety F_K .

Proposition 16 Assume the assumption of the proposition above. Let $\mathbf{P}_S^n$ be a projective space such that $X_S \rightarrow \mathbf{P}_S^n$ is defined over a function field $K(S)$. Let $\mathbf{P}_K^n$ be the pull-back of $\mathbf{P}_S^n$ by base-change $\mathbf{Spec}(K(S)) \rightarrow \mathbf{Spec}(K)$. Then the closed inclusion of the absolute Galois groups $\Gamma_{X_S} \subset \Gamma_{P_S^n}$ induces the closed inclusion $\Gamma_{F_K} \subset \Gamma_{P_K^n}$.

Proof 15 We have the following diagram.

$$\begin{array}{ccccccc}
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_{F_{\bar{K}}} & \xrightarrow{id} & \Gamma_{X_{\bar{S}}} & \xrightarrow{inc} & \Gamma_{P_{\bar{S}}^n} & \xrightarrow{id} & \Gamma_{P_{\bar{K}}^n} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_{F_K} & \xleftarrow{\quad} & \Gamma_{X_S} & \xrightarrow{inc} & \Gamma_{P_S^n} & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{P_K^n} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & \text{inc} & & & & \\
\Gamma_K & \xleftarrow{\quad} & \Gamma_S & \xrightarrow{id} & \Gamma_S & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_K \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Here all vertical sequences are exact. Two middle vertical sequences are pull-backs from both outer side sequences via $\Gamma_S \rightarrow \Gamma_K$, respectively. The homomorphism $\Gamma_{F_K} \rightarrow \Gamma_{P_K^n}$ which we will show the existence of in the proposition follows from the fact that $\ker(\Gamma_{X_S} \rightarrow \Gamma_{F_K})$ is contained in $\ker(\Gamma_{P_S^n} \rightarrow \Gamma_{P_K^n})$. The given closed inclusion homomorphism $\Gamma_{X_S} \subset \Gamma_{P_S^n}$ is obtained by base change from $\Gamma_{F_K} \rightarrow \Gamma_{P_K^n}$ via $\Gamma_S \rightarrow \Gamma_K$. Hence the inclusion $\Gamma_{F_K} \rightarrow \Gamma_{P_K^n}$ is closed. From the ordinary Galois theory and $[K(F) : K(P_K^n)] = [K(S)(X_S) : K(S)(\mathbf{P}_S^n)]$, one obtains a function field $K(F)$ associated to Γ_{F_K} , which is the absolute Galois group of $K(F)$.

References

- [AM] Adem, A. and Milgram, R., *Cohomology of finite groups.*, Grundlehren math. Wiss. 309, p. 317 (1991).
- [BBD] Beilinson A.A., Bernstein I.N., Deligne P., *Faisceaux pervers.*, Analyse et Topologie sur les espaces singuliers(I), Conférence de Luminy, juillet 1981, Astérisque 100(1982).
- [Berth] Berthelot, P., *Altérations de variétés algébriques d'après A.J. DE JONG*, Séminaire Bourbaki 48, n° 815, pp.273-311(1997).
- [BJ] Borceux, F. and Janelidze, G. *Galois Theories.*, cambridge studies in advanced math. 72 pp.341 ISBN 0 521 80309 8 2001
- [AC5] Bourbaki, N., *XXX ELEMENTS DE METHEMATIQUE, Algebre Commutative, Ch.5 Entiers*, Hermann PARIS, pp.207, (1964).
- [Breen1] Breen, L., *Théorie de Schreier supérieure.*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 25, pp. 465-514(1992).
- [Breen2] Breen, L., *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, 225 Astérisque Société Mathématique p. 160 (1994).
- [Brz] Brzezinski, T., Wisbauer, R., *Corings and Comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, Cambridge University Press, 2003.
- [Cohn] Cohn, P.M., *Skew Fields*, Theory of general division rings, Encyclopedia of mathematics and applications 57.
- [Cisinski] Cisinski, D-C., *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque 308, Société math. France, 2006.
- [FJ] Fried, M.D., Jardan, M., *Field Arithmetic*, newblock Third Edition, Vol.11, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge A series of Modern Surveys in Mathematics, 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [Fuj] Fujita, T., *On Kähler fibre spaces over curves.*, J. Math.Soc. Japan 30, pp. 779-794(1978).
- [Gir] Giraud, J., *Cohomologie non abélienne.*, Grundlehren math. Wiss., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 467,(1971).

- [EGA] Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Elements de Geometrie Algebrique I-IV*, Publications Mathematiques de IHES 4(1960),8(1961),11(1961),17(1963),20(1964),24(1965),28(1966),32(1967).
- [SGA] Grothendieck, A. et al., *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, SGA1, SGA4 I,II,III, SGA4I/2, SGA5, SGA7 I,II, Lecture Notes in Mat., vols. 224,269-270-305,569,589,288-340, Springer-Verlag, New York, 1971-1977.
- [GG] Grothendieck, A., *Fondaments de la géométrie algébrique.*, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curis, Paris 5e, p. 236 (1962).
- [Dix] Grothendieck A., Giraud J., Kleiman S., Raynaud M., Tate J., *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, Paris, 1968, pp.386.
- [HS] Hirshowits, A. and Simpson, C., *Descente pour les n-champs.*, arXiv:math. AG/9807049v3 13 Mar 2001
- [I] Iitaka, S., *Introduction to birational geometry.*, Graduate Textbook in Mathematics, Springer-Verlag, p. 357 (1976).
- [Laum] Laumon, G., Moret-Bailly, L., *Champs algébriques.*, Université de Paris-sud Mathématiques, p. 94 (1992).
- [Kato] Kato, K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory., The Johns-Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, pp. 191-224(1989).
- [Kaw] Kawamata, Y., *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fibre spaces.*, J. Reine Angew. Math. 363, pp. 1-46 (1985).
- [KKMS] Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B., *Troidal embeddings I.*, Springer Lecture Notes, 339(1973).
- [Ko0] Kollár, J., *Subadditivity of the Kodaira dimension; Fibres of general type.*, Proc.Sympos. Alg. Geom. Sendai 1985.(Adv. Stud. Pure Math., Vol. 10, pp.361-398). North-Holland 1987.
- [Ko1] Kollár, J., *Shafarevich maps and automorphic forms.*, Princeton university press, Princeton, New Jersey pp.201 1995.
- [Ko2] Kollár, J., *Rational curves on algebraic varieties.*, Springer, Berlin-Heidelberg-Newyork-Tokyo, (1995)

- [Kon] Kontsevich, M., Rosenberg A. *Noncommutative smooth spaces.*, arXiv:math.AG/9812158v1 30Dec 1998.
- [Km1] Maehara, K., *Diophantine problems of algebraic varieties and Hodge theory in International Symposium Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and related Topics in Honor of Professor Shoshichi Kobayashi on his 60th birthday.*, R.I.M.S., Kyoto University October 26-30, Organizer: Junjiro Noguchi(T.I.T.), pp. 167-187 (1992).
- [Km2] Maehara, K., *Algebraic champs and Kummer coverings.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.18, No.1, pp.1-9(1995).
- [Km3] Maehara, K., *Conjectures on birational geometry.*, A.C.Rep. T.I.P. Vol.24, No.1, pp.1-10(2001).
- [Malt] Maltsiniotis, G. *La theorie de l'homotopie de Grothendieck*, Asterisque 301, Soci et e math. France, 2005.
- [Mats] Matsuki, K., Introduction to the Mori Program., Universitext p. 468 Springer 2000
- [Mat] Matsumura, H., On algebraic groups of birational transformations., Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie VIII,34, 151-155 (1963).
- [MO] Matsumura, H.and Oort, F., Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes, Inventiones Mathematicae, 1967 - Springer.
- [MP] Miyaoka, Y., Peternel T., Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties., DMV Seminar Band 26 Birkhäuser p. 213 1997
- [Mch] Mochizuki, S., The local Pro- p Anabelian Geometry of Curves., Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University RIMS-1097(1996).
- [Mori] Mori,S., Classification of higher-dimensional varieties. Algebraic Geometry Bowdoin 1985. Proc. Symp. Pure Math. 46, 269-231(1987).
- [Mum] Mumford D., Selected Papers: On the classification of varieties and moduli spaces., Springer p. 795 2003
- [Nak] Nakayama, N., Invariance of the plurigeners of algebraic varieties under minimal model conjectures., Topology 25(1986) 237-251.
- [Ro] Rosenlicht, M., Some basic theorems on algebraic groups., xxxxx pp.401-443

- [Rou] Rousseau, A., Bicatégories monoidales et extensions de gr-categories, Homology, Homotopy and Applications, vol.5(1), 2003, pp.437-547.
- [RBZL] Ribes, L., Zalesskii, P., Profinite Groups., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge Vol.40 Springer(1991).
- [Ws] Schmid, W., *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping.*, Inventiones math., 22., pp. 211-319(1973).
- [TAM] SZAMUERY, T., *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics 117(2009).
- [Se] J-P. Serre. Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics. , **5** 4th Ed. 1973.
- [S1] Simpson, C., *Algebraic (geometric) n-stacks.*, arXiv:math. AG/9609014
- [S2] Simpson, C., *A closed model structure for n-categories, internal Hom, n-stacks and generalized Seifer-Van Kampen.*, arXiv:math: AG/9704006 v2 17 Mar 2000
- [Shatz] Shatz, S., *Profinite groups, arithmetic, and geometry.*, Annals of Math. studies, N. 67, Princeton Uni. Press, p. 252,(1972).
- [Vieh] Viehweg, E. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge.Band 30, p. 320 (1991).
- [Vieh2] Viehweg, E., *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces.* Algebraic Varieties and Analytic varieties. (Adv.Stud. Pure Math., Vol.39, pp.329-353). North-Holland 1983.
- [Vieh3] Viehweg, E., *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension II; The local Torelli map.* Classification of Algebraic and Analytic Manifolds.(Progress in Math., Vol.39, pp.567-589). Boston: Birkhaeuser 1983.
- [Vieh4] Viehweg, E., *Weak positivity and the stability of certain Hilbert points.I,II,III*, Invent.Math.96,639-667(1989),Invent.Math.101, 191-223(1990),Invent. Math. 101, 521-543(1990).
- [Zuo] Zuo, K., Representations of fundamental groups of algebraic varieties., Lecture Notes in Math. 1708, Springer, ISBN 3-540-66312-6.

LOCALLY FINITE ITERATIVE HIGHER DERIVATIONS ON $k[x, y]$

HIDEO KOJIMA

ABSTRACT. We classify the locally finite iterative higher derivations on the polynomial ring in two variables over a field of positive characteristic.

1. INTRODUCTION

Let k be a field of characteristic $p \geq 0$. For a positive integer n , we denote the polynomial ring in n variables over k by $k^{[n]}$.

Let A be a k -domain. A set $D = \{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ of k -linear endomorphisms of A is said to be a *higher derivation* on A if the following conditions are satisfied:

- (1) D_0 is the identity map of A ;
- (2) For all $a, b \in A$ and for all $n \geq 0$, $D_n(ab) = \sum_{i+j=n} D_i(a)D_j(b)$.

For a higher derivation $D = \{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ on A , we define the *kernel* A^D of D by the k -subalgebra $\{a \in A \mid D_n(a) = 0 \text{ for every } n \geq 1\} = \cap_{n \geq 1} \text{Ker } D_n$. A higher derivation $D = \{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ on A is said to be *locally finite* (resp. *iterative*) if the following additional condition (3) (resp. (4)) is satisfied:

- (3) For all $a \in A$, there exists an integer $n \geq 0$ such that $D_m(a) = 0$ for all $m \geq n$;
- (4) For all $i, j \geq 0$, $D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$.

A locally finite, iterative, higher derivatoin is abbreviated as *lhhd*. We notice that, if $p = 0$ and $D = \{D_n\}_{n \geq 0}$ is an lhhd on A , then the condition (4) implies that $D_n = \frac{1}{n!} D_1^n$ for all $n \geq 1$. So D_1 is a locally nilpotent derivation on A and $A^D = \text{Ker } D_1$.

It is well-known that studying $\mathbb{G}_a$ -actions on an affine variety X defined over an algebraically closed field is equivalent to studying lfhd on the coordinate ring of X . When $p = 0$, locally nilpotent derivations and their kernels have been studied by many mathematicians (see [5], [1], [7], etc.). On the other hand, much less is known when $p > 0$. See [11, Chapter 1], [14], [3], [4] and their references for some results on lfhd and their kernels in positive characteristic.

2000

Primary 14R20; Secondary 13N15.

locally finite iterative higher derivation, additive group scheme action.

The author is supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 23740008) from JSPS.

In [12], Rentschler classified the locally nilpotent derivations on $k^{[2]}$ when $p = 0$. In particular, he classified the $\mathbb{G}_a$ -actions on the affine plane over an algebraically closed field of characteristic zero. Later on, Miyanishi [9] classified the $\mathbb{G}_a$ -actions on the affine plane over an algebraically closed field of positive characteristic (see Corollary 1.2). In [9], he uses some results from algebraic geometry (Zariski's Main Theorem, etc.). In this short note, we classify the lfhd's on $k^{[2]}$ by using purely algebraic method. To state the results of this note, we give some definitions. Let $D = \{D_n\}_{n \geq 0}$ be a higher derivation on a k -domain A . Then we can define a k -algebra homomorphism $\varphi_D : A \rightarrow A[[t]]$ by $\varphi_D(a) = \sum_{n \geq 0} D_n(a)t^n$. We call φ_D the *homomorphism associated to D* . We note that, for an element $a \in A$, $a \in A^D$ if and only if $\varphi_D(a) = a$ and that $\text{Im} \varphi_D \subset A[t]$ (the polynomial ring in one variable over A) provided D is locally finite. If $A = k[a_1, \dots, a_n]$ is finitely generated over k , then, for every element $f(a_1, \dots, a_n) \in A$ and for every integer $n \geq 0$, $D_n(f(a_1, \dots, a_n))$ is the coefficient of t^n in $\varphi_D(f(a_1, \dots, a_n)) = f(\varphi_D(a_1), \dots, \varphi_D(a_n))$. Suppose that D is an lfhd. Using the homomorphism φ_D , we can define the D -degree of an element a of A by $\deg_D(a) = \deg_t(\varphi_D(a))$, where we set $\deg_t(0) = -\infty$. An element s of A is said to be a *local slice* of D if it satisfies the following conditions:

- (i) $s \notin A^D$.
- (ii) $\deg_D(s) = \min\{\deg_D(f) \mid f \in A \setminus A^D\}$.

The main result of this note is stated as follows.

Theorem 1.1. *Let k be a field of characteristic $p > 0$ and $D = \{D_n\}_{n=0}^\infty$ a higher derivation on $A = k^{[2]}$. Then D is an lfhd if and only if there exists a system of variables $\{x, y\}$ for A such that $\varphi_D(x) = x$ and $\varphi_D(y) = y + f_0(x)t + f_1(x)t^p + \dots + f_r(x)t^{p^r}$, where φ_D is the homomorphism associated to D , $r \geq 0$ and $f_0(x), \dots, f_r(x) \in k[x]$.*

As a direct consequence of Theorem 1.1, we obtain the following corollary, which was first proved by Miyanishi [9].

Corollary 1.2. *Let k be a field of characteristic $p > 0$. Then every $\mathbb{G}_a$ -action on the affine plane $\mathbb{A}_k^2$ is equivalent to an action of the form*

$$t \cdot (x, y) = (x, y + tf_0(x) + t^p f_1(x) + \dots + t^{p^r} f_r(x)),$$

where (x, y) is a coordinate system of $\mathbb{A}_k^2$, $t \in \mathbb{G}_a(k)$ and $f_0(x), \dots, f_r(x) \in k[x]$.

Moreover, we obtain the following result, which was firstly obtained by Miyanishi [10, Corollary 5].

Corollary 1.3. *Let k be an algebraically closed field of characteristic p and $D = \{D_n\}_{n \geq 0}$ a non-trivial lfhd on $A = k^{[2]}$. Then the following conditions are equivalent to each other.*

- (1) *The $\mathbb{G}_a$ -action on $\mathbb{A}_k^2$ corresponding D has no fixed points.*
- (2) *There exists a local slice $s \in A$ of D such that $\gcd\{D_{p^t}(s) \mid t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = 1$.*

2. PROOFS

Let $A = k^{[n]}$ be the polynomial ring in n variables over a field k of characteristic $p > 0$, $D = \{D_n\}_{n \geq 0}$ an lfhd on A and φ_D the homomorphism associated to D .

Lemma 2.1. *Let $s \in A$ be a local slice of D . Then the following assertions hold true.*

- (1) *Let c be the leading coefficient of $\varphi_D(s)$. Then $A[c^{-1}] = A^D[c^{-1}][s]$ and s is indeterminate over A^D .*
- (2) *$\varphi_D(s)$ can be expressed as follows:*

$$\varphi_D(s) = s + c_0 t + c_1 t^p + \cdots + c_r t^{p^r},$$

where $r \geq 0$ and $c_0, \dots, c_r \in A^D$.

Proof. The assertion (1) is well-known (see, e.g., [11, 1.5 (p. 20)]). The assertion (2) follows from [11, 1.5.3 (pp. 22~23)]. $\square$

We define the rank of D which is a word-for-word translation of that of a derivation.

Definition 2.2. With the same notations as above, we define the *rank* of D to be the minimal integer r such that there exists a part of a system of variables $\{x_1, \dots, x_{n-r}\}$ for A contained in A^D . We denote the rank of D by $\text{rank} D$.

It is clear that $\text{rank} D = 0$ if and only if D is trivial. We prove the following result, which is given in [6] when $p = 0$ (see [6, Corollary to Proposition 1]).

Lemma 2.3. *Assume that $\text{rank} D = 1$. Then there exists a system of variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ for A such that $A^D = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ and*

$$\varphi_D(x_n) = x_n + f_0 t + f_1 t^p + \cdots + f_r t^{p^r},$$

where $r \geq 0$ and $f_0, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Proof. Since $\text{rank} D = 1$, there exists a system of variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ for A such that $x_1, \dots, x_{n-1} \in A^D$.

Claim. With the same notations and assumptions as above, we have:

- (1) $A^D = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$.
- (2) x_n is a local slice of D .

Proof. Since D is non-trivial, $x_n \notin A^D$. Let $f = f(x_1, \dots, x_n) \in A \setminus \{0\}$ be any non-zero polynomial. We put $m = \deg_{x_n} f(x_1, \dots, x_n)$ and write as

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 x_n^m + a_1 x_n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x_n + a_m$$

with $a_0, \dots, a_m \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Since φ_D is a k -algebra homomorphism and $a_0, \dots, a_m \in A^D$, we have

$$\varphi_D(f) = a_0 \varphi_D(x_n)^m + a_1 \varphi_D(x_n)^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \varphi_D(x_n) + a_0.$$

It is then clear that $f \in A^D$ if and only if $m = 0$, i.e., $f \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Moreover, $\deg_D(f) = m \deg_D(x_n) \geq \deg_D(x_n)$ provided $f \notin A^D$. So x_n is a local slice of D . $\square$

The lemma follows from the above claim and (2) of Lemma 2.1. $\square$

Lemma 2.4. *Assume that k is algebraically closed and $\text{rank} D = 1$. Then the following conditions are equivalent to each other.*

- (1) *The $\mathbb{G}_a$ -action on $\mathbb{A}_k^n$ corresponding D has no fixed points.*
- (2) *There exists a local slice $s \in A$ of D such that the ideal generated by $\{D_{p^t}(s) | t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ equals $(1) = A$.*

Proof. We prove the part “(1) $\implies$ (2)”. Lemma 2.3 implies that the $\mathbb{G}_a$ -action is equivalent to an action of the form

$$t \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + t f_0 + t^p f_1 + \dots + t^{p^r} f_r),$$

where $(x_1, \dots, x_n)$ is a coordinate system of $\mathbb{A}_k^n$, $t \in \mathbb{G}_a(k)$ and $f_0, \dots, f_r \in A^D$. Here we may assume that $A = k[x_1, \dots, x_n]$ and $A^D = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. It follows from Claim in the proof of Lemma 2.3 that x_n is a local slice of D . We can easily see that the $\mathbb{G}_a$ -action corresponding to D has no fixed points if and only if $f_0, \dots, f_r$ have no common zeros in $\mathbb{A}_k^{n-1}$. Hence, this is equivalent to $A = (1) = (f_0, \dots, f_r) = (D_1(x_n), D_p(x_n), \dots, D_{p^r}(x_n))$, which implies (2).

We prove the part “(2) $\implies$ (1)”. Since $\text{rank} D = 1$, there exists a system of variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ for A such that $A^D = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ and $x_n \notin A^D$. Then x_n is a local slice of D by Claim in the proof of Lemma 2.3. Let s be the one in (2). As seen from the proof of Lemma 2.3, we know that s can be expressed as $s = ax_n + b$ with $a, b \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ and $a \neq 0$. Then $\{D_{p^t}(s) | t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{a D_{p^t}(x_n) | t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. So $a \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]^\times = k^\times$ and hence $(\{D_{p^t}(x_n) | t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}) = (D_1(x_n), D_p(x_n), \dots, D_{p^r}(x_n)) = (1) = A$, which implies (1). $\square$

We prove the results stated in the previous section. The outline of the proof of Theorem 1.1 below is almost the same as that of Rentschler’s theorem [12] in Daigle–Freudentburg [2, Section 2].

Proof of Theorem 1.1. The if part is clear. We prove the only if part. The assertion is clear if $A^D = A$. So we assume that $A^D \neq A$. Put $S = A^D \setminus \{0\}$. It follows from [11, p. 39] (or [8, Corollary 1.2]) that $A^D = k^{[1]} = k[x]$ for some $x \in A^D \setminus k$. Let s be a local slice of D . Lemma 2.1 then implies that $S^{-1}A = k(x)^{[1]} = k(x)[s]$ and $\varphi_D(s) = s + g_0 t + g_1 t^p + \dots + g_r t^{p^r}$, where $r \geq 0$ and $g_0, \dots, g_r \in A^D = k[x]$.

Here we use some results in [?, ?, RS79, §2] where we consider L , S and $k = K = L[F]$ as k , $(S =) A^D \setminus \{0\}$ and A^D , respectively. Then all the hypothesis (i)~(iii) in [13, Theorem 2.4.2] are satisfied because $S^{-1}(A) = k(x)^{[1]}$, $k(x) \cap A = Q(A^D) \cap A = k[x]$ (see, e.g., [8, Lemma 2.3]) and A is a polynomial ring over k , it is geometrically factorial over k , i.e., $K \otimes_k A$ is a UFD for any algebraic extension field K of k . So it follows from the proof

of [13, Theorem 2.4.2] that all the hypothesis (i)~(iii) in [13, Theorem 2.3.1] are satisfied. In particular, A^D is S -inert in A , which is the hypothesis (iii) in [13, Theorem 2.3.1]. So the modification lemma [13, 2.2] implies that there exist $a \in A^D$ and $b \in S$ such that $y := (s - a)/b \in A$ and $A = (A^D)^{[1]} = A^D[y] = k[x, y]$. Since $x \in A^D$ and φ_D is a k -algebra homomorphism, we have $\varphi_D(x) = x$ and

$$\begin{aligned}\varphi_D(y) &= \frac{\varphi_D(s) - a}{b} \\ &= \frac{s + g_0t + g_1t^p + \cdots + g_rt^{p^r} - a}{b} \\ &\in A[t].\end{aligned}$$

Hence $\varphi_D(y)$ can be expressed as

$$\varphi_D(y) = y + f_0t + f_1t^p + \cdots + f_rt^{p^r},$$

where $f_i = g_i/b \in A^D = k[x]$ for $i = 0, \dots, r$. This proves Theorem 1.1. $\square$

Corollary 1.2 is an easy consequence of Theorem 1.1. Corollary 1.3 follows from Lemma 2.4 and Corollary 1.2 because $\text{rank} D = 1$ by Theorem 1.1.

REFERENCES

- [1] D. Daigle, Locally nilpotent derivations, Lecture Notes for the 26th Autumn School of Algebraic Geometry, Łukęcin, Poland, September 2003.
- [2] D. Daigle and G. Freudenburg, Locally nilpotent derivations over a UFD and an application to rank two locally nilpotent derivations of $k[X_1, \dots, X_n]$, J. Algebra, 204 (1998), 353–371.
- [3] H. Derksen and G. Kemper, Computing invariants of algebraic groups in arbitrary characteristic, Adv. Math., 217 (2008), 2089–2129.
- [4] E. Dufresne and A. Maurischat, On the finite generation of additive group invariants in positive characteristic, J. Algebra, 324 (2010), 1952–1963.
- [5] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [6] G. Freudenburg, Triangulability criteria for additive group actions on affine space, J. Pure Appl. Algebra, 105 (1995), 267–275.
- [7] G. Freudenburg, Algebraic theory of locally nilpotent derivations, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 136, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [8] H. Kojima and N. Wada, Kernels of higher derivations in $R[x, y]$, Comm. Algebra, 39 (2011), 1577–1582.
- [9] M. Miyanishi, $\mathbb{G}_a$ -action of the affine plane, Nagoya Math. J., 41 (1971), 97–100.
- [10] M. Miyanishi, Some remarks on polynomial rings, Osaka J. Math., 10 (1973), 617–624.
- [11] M. Miyanishi, Lectures on curves on rational and unirational surfaces, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 60, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [12] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine, C. R. Acad. Sci. Paris, 267 (1968), 384–387.
- [13] P. Russell and A. Sathaye, On finding and cancelling variables in $k[X, Y, Z]$, J. Algebra, 57 (1979), 151–166.

HIDEO KOJIMA

- [14] R. Tanimoto, An algorithm for computing the kernel of a locally finite iterative higher derivation, J. Pure Appl. Algebra, 212 (2008), 2284–2297.

MATHEMATICS DIVISION, DEPARTMENT OF INFORMATION ENGINEERING, FACULTY OF
ENGINEERING, NIIGATA UNIVERSITY, 8050 IKARASHININOCHO, NISHI-KU, NIIGATA 950-
2181, JAPAN

- : kojima@ie.niigata-u.ac.jp

UFD 上の多項式環の整閉多項式について

加藤雅也 小島秀雄

1. 序

本報告は「津山代数幾何シンポジウム 2012」で第一著者が報告した内容を元になっている。

多項式環の部分環や多項式環の自己同型群はアフィン代数幾何学 (アフィン代数多様体に関する研究) において中心的な研究対象である。近年, 多項式環の部分環に関する研究, 特にその有限生成性に関する研究が進展してきている。また, 多項式環の自己同型群についても, Jacobian 予想に関する研究や多項式環の自己同型の野生性・順性に関する研究が劇的に進展している。これらの研究については, [5] や [6] 等に最近までの話題が詳細に書かれている。また, 黒田茂氏による多項式環の自己同型に関する概説が雑誌「数学」に掲載される予定である。

多項式環の部分環や自己同型群を研究する際, 多項式環の微分 (derivation) は非常に大事になってきている。例えば, 永田氏が最初に反例を与えた Hilbert の第 14 問題の反例が多項式環上の微分の核として沢山構成されている。

本報告では, 体上の多項式環における, 整閉多項式, 超越次数 1 の整閉部分環, および微分の核に関する何名かの数学者による結果の一部を UFD 上の多項式環の場合に一般化することを目標とする。第 2 節では, 主結果を述べるために必要となる用語を定義し, 先行結果 (体上の多項式環の場合の結果) を紹介する。第 3 節では主結果を紹介し, 主結果の完全な証明も紹介する。

「津山代数幾何シンポジウム 2012」で発表の機会を与えて下さった松田修先生に感謝致します。

2. 用語の定義と先行結果

R を整域とし, R 上の n 変数多項式環 $R[x_1, \dots, x_n]$ を $R^{[n]}$ で表す。後半では, R が体の場合を扱うので, そのときは R の代わりに K を用いる。

定義 2.1. (1) $R^{[n]}$ の定数多項式でない 1 個の多項式で生成される $R^{[n]}$ の R 部分環のなす集合を $M(R, n)$ と表す。つまり,

$$M(R, n) = \{R[f] \mid f \in R^{[n]} \setminus R\}$$

である。

(2) $f \in R^{[n]} \setminus R$ が**整閉多項式**であるとは, $R[f]$ が $R^{[n]}$ で整閉であるときをいう。

定義 2.2. $R^{[n]}$ から $R^{[n]}$ への写像 $d: R^{[n]} \rightarrow R^{[n]}$ が **R 微分**であるとは, 次の条件 (1), (2) をみたすときにいう。

- (1) d は R 線形写像である.
- (2) 任意の $f, g \in R^{[n]}$ に対して, $d(fg) = d(f)g + fd(g)$ が成り立つ.

上の定義により, $R^{[n]}$ 上の R 微分 d に対して, d の核 $\text{Ker} d$ は $R^{[n]}$ の R 部分環になることが分かる. 勿論, R 微分は一般の R 多元環においても定義できる.

以下, この節では, $R = K$ が体の場合を扱う. 体 K 上の多項式環 $K^{[n]}$ における, 整閉多項式, 超越次数 1 の整閉整域, K 微分の核の関係について何名かの数学者により研究されてきた. Nowicki-永田 [8] では, K の標数がゼロで $n = 2$ の場合について, 整閉多項式と R 微分の核の関係が明らかにされた. 筆者の知るところではこの論文がそのような研究の最初のものである. Nowicki-永田の結果については, 馬場 [3] によって一部一般化された後, Nowicki [7] により, K の標数がゼロの場合は不定元の個数に依らない形で一般化された. 更に, 整閉多項式に関して, Ayad [2] や Arzhantsev-Petravchuk [1] による研究があり, そこでは, K の標数が正となる場合の結果も得られている.

上記の研究成果について, 今回の我々の主結果と密接に関係があるものを紹介する.

定理 2.3. ([8]) $f \in K^{[n]} \setminus K$ に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $K[f]$ は $M(R, n)$ の包含関係に関する極大元である.
- (2) f は整閉多項式である.

定理 2.3 において, [8] では K の標数がゼロであることを仮定しているが, これは [8] の他の結果ではそのように仮定する必要があるというだけで, [8] における定理 2.3 の結果の証明は正標数の場合もそのまま成り立つ.

次に整閉多項式と K 微分の核の関係に関する結果を紹介する.

定理 2.4. ([7]) K の標数はゼロであると仮定する. B を $A := K^{[n]}$ の K 部分環とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) B は A で整閉であり, $Q(B) \cap A = B$ が成り立つ. ここで, $Q(B)$ は B の商体である.
- (2) $B = \text{Ker} d$ となる A 上の K 微分 d が存在する.

定理 2.4 について補足すると, A は多項式環である必要はなく, K 上有限生成な整域であれば良いことが [7] より分かる. また, 定理 2.4 (1) で, $Q(B) \cap A = B$ という条件は必要である. つまり, A の整閉 K 部分環 B で K 微分の核として表わすことができない例が存在する. 例えば, $A = K^{[2]} = K[x, y]$ (不定元を x, y とした) で, $B = K[x, xy]$ とすると, B は A で整閉であるが (証明は容易である), $Q(B) \cap A = A \neq B$ となる. このとき, $B = \text{Ker} d$ となる A 上の K 微分 d は存在しない. 実際, $B = \text{Ker} d$ となる K 微分 d が存在すると, $d(x) = d(xy) = 0$ となるが, $0 = d(xy) = d(x)y + xd(y) = xd(y)$ より $d(y) = 0$ となるので, $\text{Ker} d = A$ となり, 矛盾が生じる.

さて, 上記の定理 2.3 と定理 2.4 を合わせることで, 次の結果が成り立つ.

系 2.5. (cf. [1, Theorem 1]) K の標数はゼロであるとする. このとき, $f \in K^{[n]} \setminus K$ に対して, 次の (1)~(3) は互いに同値である.

- (1) $K[f]$ は $M(R, n)$ の包含関係に関する極大元である.
- (2) f は整閉多項式である.
- (3) $\text{Ker } d = K[f]$ となる $K^{[n]}$ 上の K 微分 d が存在する.

系 2.5 については, $n = 2$ のときは [8] において証明されている. その後, 上記の定理 2.4 を用いることにより, $n \geq 3$ の場合にも成立することが分かった. 尚, [7] では系 2.5 は得られていないが, [7] の結果が系 2.5 の証明で本質的な役割を果たす. 系 2.5 の主張自体は [1, Theorem 1] にあるが, その結果の内, (ii), (iii), (vi) が同値であることが系 2.5 になっている. ちなみに, [1, Theorem 1] の (vi) は系 2.5 での (3) と少し強くすることができることが, [7] の結果により分かる.

定理 2.3 と定理 2.4 を用いて系 2.5 を証明する. (1) と (2) が同値であることは定理 2.3 の特殊な場合である. (3) $\implies$ (2) は定理 2.4 より分かる. (2) $\implies$ (3) については, (2) を仮定すると $K[f]$ は $K^{[n]}$ の整閉 K 部分環になる. また, $Q(K[f]) \cap K^{[n]} = K[f]$ となることも分かる. (ユークリッドの互除法を用いると証明できる.) よって, 定理 2.4 により, (3) が成り立つことが分かる.

3. 主結果とその証明

第 2 節にある結果は全て体 K 上の多項式環についてであった. 整閉多項式や微分概念は少なくとも整域上の多項式環の場合には定義できる. 第 2 節にある結果の体の部分をより一般の整域上の場合に拡張できないかと考えるのは自然であると思われる. 一般の整域上で結果を確立することは難しいが, 少なくとも UFD 上の多項式環の場合には確立できるのではないかと考え, 考察してみた. 第 2 節の結果の全てを UFD 上の多項式環の場合に拡張できたという訳ではないが, 現在までのところ分かった結果を紹介する.

以下, R を UFD とし, $A = R^{[n]} = R[x_1, \dots, x_n]$ を R 上の n 変数多項式環とする. 定義 2.1 と定義 2.2 は整域上の多項式環において定義されているので, そこにある用語と記号をそのまま用いる. 以下の結果では, 一部 R が UFD でない場合でも成立するものがあるが, 全て UFD 上の多項式環の場合で考えることにする.

本報告での主結果を述べる.

定理 3.1. $f \in A \setminus R$ に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $R[f]$ は $M(R, n)$ の包含関係に関する極大元である.
- (2) f は整閉多項式であり, かつ $Q(R)[f] \cap A = R[f]$ となる.

定理 3.2. R の標数はゼロであり, $A = R^{[2]} = R[x, y]$ は 2 変数多項式環であると仮定する. このとき, $f \in A \setminus R$ に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $R[f]$ は $M(R, 2)$ の包含関係に関する極大元である.
- (2) $\text{Ker } d = R[f]$ となる A 上の R 微分 d が存在する.

以上の結果について少しコメントをすると、定理 3.1 は定理 2.3 の一般化であり、定理 3.1 と定理 3.2 を合わせると、系 2.5 の $n = 2$ の場合の一般化ができる。定理 3.2 は $n \geq 3$ の場合も成り立つと思われるが、まだ証明できていない。(後述するように、定理 3.2 において、 $(2) \implies (1)$ は $n \geq 3$ の場合も成り立つことが分かる.)

尚、定理 3.1 (2) で $Q(R)[f] \cap A = R[f]$ という条件は必要である。例えば、 $R = K^{[1]} = K[x]$ を体 K 上の 1 変数多項式環、 $A = R^{[1]} = K[x, y]$ を K 上の 2 変数多項式環とし、 $f = xy$ とすると、定理 2.4 の次の段落にある例より f は整閉多項式であることが分かるが、 $R[f] \subsetneq R[y]$ となるので、 $R[f]$ は $M(R, 1)$ の極大元にならない。この場合、 $Q(R)[f] \cap A = A \neq R[f]$ となる。

以下、定理 3.1 と定理 3.2 を証明する。

次の結果は明らかなので、証明は省略する。

補題 3.3. 任意の $M(R, n)$ の元 $R[f]$ において、 $f \in A \setminus R$ の定数項はゼロであるとして良い。

以後、 $M(R, n)$ の元 $R[f]$ における f の定数項はゼロとなるように表すことにする。

補題 3.4. $R[f], R[g] \in M(R, n)$ に対して、 $R[f] \subseteq R[g]$ ならば、 $g|f$ となる。特に、 $\deg(f) \geq \deg(g)$ となる。

証明. f と g の定数項はともにゼロであることに注意せよ。 $R[f] \subseteq R[g]$ より $f \in R[g]$ となる。よって、 $f = c_0 g^n + c_1 g^{n-1} + \cdots + c_{n-1} g$, $c_0 \neq 0$ となる $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \dots, c_{n-1} \in R$ が存在する。従って、 $g|f$ となり、 $\deg(f) \geq \deg(g)$ が成り立つ。□

補題 3.5. 任意の $M(R, n)$ の元 $R[f]$ に対して、 $R[f]$ を含む $M(R, n)$ の極大元が存在する。

証明. f の各項の係数の最大公約元を c とし、 $\tilde{f} = c^{-1}f$ とおく。 $R[\tilde{f}] \in M(R, n)$ で $R[f] \subseteq R[\tilde{f}]$ となり、 c が R の単元でないならば $R[f] \neq R[\tilde{f}]$ となる。従って、以下の議論において、 f の各項の係数の最大公約元は 1 であると仮定して良い。

$R[f]$ が $M(R, n)$ の極大元でないならば $R[f] \subsetneq R[g]$ ($R[f]$ は $R[g]$ の真部分集合) となる $R[g] \in M(R, n)$ が存在する。ここで、 g の定数項はゼロであるとして良い。更に、 g の各項の係数の最大公約元は 1 であるとして良い。ここで、 $\deg(f) = \deg(g)$ であると仮定すると、 $f = \tilde{c}g$ となる $\tilde{c} \in R$ が存在する。 f と g の各項の係数の最大公約元は 1 であることから、 c は R の単元になるので、 $R[f] = R[g]$ となる。これは $R[f] \neq R[g]$ に反する。よって、 $\deg(f) > \deg(g)$ となる。

この操作を繰り返すことにより、多項式の次数は必ず減っていくので、有限回の操作で $R[f]$ を含む $M(R, n)$ の極大元を得ることができる。□

補題 3.6. $M(R, n)$ の元 $R[f]$ は極大元であると仮定する。このとき、 f は整閉多項式で、 $Q(R)[f] \cap A = R[f]$ となる。

証明. $R[f]$ が $M(R, n)$ の極大元であると仮定し, E を $R[f]$ の A での整閉包とする. A は UFD であるので, A は正規環である. よって E 上整となる $Q(E)$ の元は A の元であり, 従って E の元となる. 特に, E は正規環である. 整閉包をとっても超越次数は変わらないので $\text{tr.deg}_R E = \text{tr.deg}_R R[f] = 1$ となる. (注意. R 上の E の超越次数 $\text{tr.deg}_R E$ は $Q(E)$ の $Q(R)$ 上の超越次数として定義する.)

ここで, El Kahoui の結果 [4, Theorem 3.1] より, $Q(E) \cap A = R[h]$ となる $h \in A$ が存在する. よって, $R[f] \subset E \subset Q(E) \cap A = R[h]$ となるので, $R[f]$ の極大性により $R[f] = R[h] = E$ となる. 従って, f は整閉多項式である.

また, $Q(R[f]) \cap A = R[f]$ となることが上の議論により分かる. $Q(R)[f] \subset Q(R[f])$ であるので, $R[f] \subseteq Q(R)[f] \cap A \subseteq Q(R[f]) \cap A = R[f]$ となる. 従って, $Q(R)[f] \cap A = R[f]$ となる. $\square$

補題 3.6 の逆を証明する.

補題 3.7. $M(R, n)$ の元 $R[f]$ において, f は整閉多項式であり, かつ, $Q(R)[f] \cap A = R[f]$ が成り立つと仮定する. このとき, $R[f]$ は $M(R, n)$ の極大元である.

証明. まず, $Q(R)[f]$ が $Q(R)[x_1, \dots, x_n]$ で整閉であることを示す. $S = R \setminus \{0\}$ とおくと, $Q(R)[f] = S^{-1}R[f]$, $Q(R)[x_1, \dots, x_n] = S^{-1}R[x_1, \dots, x_n] = S^{-1}A$ と表せる. $R[f]$ は A において整閉であり, S は $R[f]$ の積閉集合なので, $S^{-1}R[f]$ は $S^{-1}A$ において整閉である. よって, $Q(R)[f]$ は $Q(R)[x_1, \dots, x_n]$ で整閉である.

$R[g]$ を $R[f]$ を含む $M(R, n)$ の極大元とする. 補題 3.5 によりそのような $M(R, n)$ の元 $R[g]$ が存在する. このとき $Q(R)[f] \subset Q(R)[g]$ である. ここで, $Q(R)$ は体であり, $Q(R)[f]$ は $Q(R)[x_1, \dots, x_n]$ で整閉であるので, 定理 2.3 より, $Q(R)[f]$ は $M(Q(R), n) = \{Q(R)[h] \mid h \in Q(R)[x_1, \dots, x_n] \setminus Q(R)\}$ の極大元である. よって, $Q(R)[f] = Q(R)[g]$ となる. $R[g]$ は $M(R, n)$ の極大元であるので, 補題 3.6 より $Q(R)[g] \cap A = R[g]$ となる. 従って, $R[f] = Q(R)[f] \cap A = Q(R)[g] \cap A = R[g]$ となる. 以上より, $R[f]$ は $M(R, n)$ の極大元である. $\square$

補題 3.5 と補題 3.6 より定理 3.1 が従う.

次に, 定理 3.2 を証明する. 以下では特に, 標数ゼロの UFD R 上の 2 変数多項式環 $A = R^{[2]} = R[x, y]$ において考える.

補題 3.8. $A \setminus R$ の元 f に対して, $\text{Ker } d = R[f] (\neq R)$ となる R 微分 d が存在すると仮定する. このとき, $R[f]$ は $M(R, 2)$ の極大元である.

証明. 仮定より $d(f) = 0$. $R[f] \subset R[g]$ となる $R[g] \in M(R, 2)$ を任意にとる. ここで, f, g の定数項はゼロであるとして良い. このとき, $f \in R[g]$ となるので, $f = c_0 g^n + c_1 g^{n-1} + \dots + c_{n-1} g$, $c_0 \neq 0$ となる $n \in \mathbb{N}$,

$c_0, \dots, c_{n-1} \in R$ が存在する. このとき,

$$\begin{aligned}
 0 &= d(f) \\
 &= d(c_0g^n + c_1g^{n-1} + \dots + c_{n-1}g) \\
 &= d(c_0g^n) + d(c_1g^{n-1}) + \dots + d(c_{n-1}g) \\
 &= nc_0d(g)g^{n-1} + (n-1)c_1d(g)g^{n-2} + \dots + c_{n-1}d(g) \\
 &= (nc_0g^{n-1} + (n-1)c_1g^{n-2} + \dots + c_{n-1})d(g)
 \end{aligned}$$

となる. $nc_0g^{n-1} + (n-1)c_1g^{n-2} + \dots + c_{n-1} = 0$ とすると $g^{n-1} + \frac{(n-1)c_1}{nc_0}g^{n-2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{nc_0} = 0$ となり, $nc_0 \in R \setminus \{0\}$ であることから g は $Q(R)$ 上代数的である. ここで, $n \geq 2$ とすると $g \in A \setminus R = R^{[2]} \setminus R$ であることに反するので, $n = 1$ となる. このとき $f = c_0g$ となり, $0 = d(f) = d(c_0g) = c_0d(g)$ となる. $c_0 \neq 0$ であるので, $d(g) = 0$ となり, $g \in \text{Ker } d$ となる. 従って, $R[g] \subset \text{Ker } d = R[f]$ となるので, $R[f] = R[g]$ となる. 以上により, $R[f]$ は $M(R, 2)$ の極大元である. $\square$

補題 3.8 により, 定理 3.2 の (2) $\implies$ (1) が示された. 補題 3.8 の証明から分かるように, 補題 3.8 は 3 変数以上の多項式環の場合でも成り立つ.

最後に, 定理 3.2 の (1) $\implies$ (2) を示す.

補題 3.9. $M(R, 2)$ の元 $R[f]$ は極大元であると仮定する. このとき, $R[f] = \text{Ker } d$ となる A 上の R 微分 d が存在する.

証明. $A = R[x, y]$ と表されているとする. A の元 g に対して, その x に関する偏微分, y に関する偏微分をそれぞれ g_x, g_y と表す.

$f \in A \setminus R$ であるので, $f_x \neq 0$ または $f_y \neq 0$ となる. ここで, A 上の R 微分 d を次式で定義する.

$$d = -f_y \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial y}.$$

ここで, $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ はそれぞれ多項式の x, y に関する偏微分である. 明らかに d は A 上の R 微分であり, またゼロ写像でない. $d(f) = 0$ となるので, $R[f] \subset \text{Ker } d$ となる.

ここで, El Kahoui の結果 [4, Corollary 3.2] により, $\text{Ker } d = R[h]$ となる $h \in A$ が存在する. $\text{Ker } d \neq R$ より, $h \in A \setminus R$ である. 従って, $R[h] \in M(R, 2)$ で $R[f] \subset R[h]$ となるが, 仮定より, $R[f] = R[h]$ となる. 従って, $R[f] = \text{Ker } d$ となる. $\square$

以上により, 定理 3.2 が証明された.

REFERENCES

- [1] I. V. Arzhantsev and A. P. Petravchuk, Closed polynomials and saturated subalgebras of polynomial algebras, *Ukrainian Math. J.*, **59** (2007), 1783–1790.
- [2] M. Ayad, Sur les plynômes tels que $K[f]$ est intégralement fermé dans $K[X, Y]$, *Acta Arith.*, **105** (2002), 9–28.
- [3] K. Baba, A note on subrings of constants of an affine domain, *Math. J. Toyama Univ.*, **16** (1993), 91–96.
- [4] M. El Kahoui, Constants of derivations in polynomial rings over unique factorization domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132** (2004), 2537–2541.

- [5] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Math., vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [6] G. Freudenburg, Algebraic theory of locally nilpotent derivations, Encyclopedia of Mathematical Sciences vol. 136, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VII, Springer-Verlag, 2006.
- [7] A. Nowicki, Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero, J. Pure Appl. Alg., **96** (1994), 47–55.
- [8] A. Nowicki and M. Nagata, Rings of constants for k -derivations in $k[x_1, \dots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ., **28** (1988), 111–118.

〒 950-2181 新潟市五十嵐 2 の町 8050 新潟大学工学部情報工学科
 E-mail : kojima@ie.niigata-u.ac.jp (小島秀雄)

偏極多様体の断面種数による分類^{*†‡}

福間 慶明 (高知大学理学部)

1 Introduction

(X, L) を複素数体上定義された n 次元非特異偏極多様体とする. この偏極多様体の古典的不変量として知られているものに, 次数 L^n や断面種数 $g(X, L)$ がある. 特にここでは断面種数に関することについて考える. 今現在, 断面種数について知られていることとして次があげられる.

- (1) $g(X, L)$ は非負整数である ([3], [13]).
- (2) $g(X, L)$ の値の小さい場合の (X, L) の分類 ([3], [13], [4]).

また, 藤田隆夫氏により次のことが予想されている.

Conjecture 1.1 ([5]. [1, Question 7.2.11] も参照のこと) 任意の偏極多様体 (X, L) に対して不等式 $g(X, L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ が成立する.

L が基点自由のときは, この予想は正しいことが知られている ([1, Theorem 7.2.10] などを参照のこと). しかし L が一般の豊富な因子の場合には $n = 2$ のときでさえこの予想が正しいかはわかっていない.

そこでもし $g(X, L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ が成立する場合に $g(X, L) - h^1(\mathcal{O}_X)$ の値による分類がどのようなかを考えることは興味深い問題である.

まず **L が基点自由の場合** には $g(X, L) - h^1(\mathcal{O}_X) = 0, 1, 2$ なる (X, L) の分類が知られている ([6], [7], [8] を参照). しかし $g(X, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \geq 3$ の場合に分類をすることは今のところ技術的に困難である. そこでこの場合には **L が非常に豊富であると仮定すること** で分類がえられるのではないかと考え, 実際 $3 \leq g(X, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \leq 5$ の場合に分類ができたのでそれを報告する.

この内容は 2012 年に津山高専で行われた津山代数幾何学シンポジウムで発表させていただいたことをもとにして原稿化したものである. 発表の貴重な機会をいただいた津山高専の松田修先生に感謝します. また今年度をもってご退職されます学習院大学の飯高茂先生と埼玉大学の酒井文雄先生に謹んでお祝いを申しあげ、お二人のご健康とますますのご活躍をお祈りいたします.

^{*}Key words and phrases. Ample line bundle, polarized manifold, sectional genus, irregularity.

[†]2010 Mathematics Subject Classification. Primary 14C20; Secondary 14J30, 14J35, 14J40.

[‡]This research was partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No.24540043), Japan Society for the Promotion of Science, Japan.

2 Preliminaries

まず随伴束の理論より次のことが言える.

Definition 2.1 (1) Let X (resp. Y) be an n -dimensional projective manifold, and let L (resp. H) be an ample line bundle on X (resp. Y). Then (X, L) is called a *simple blowing up of (Y, H)* if there exists a birational morphism $\pi : X \rightarrow Y$ such that π is a blowing up at a point of Y and $L = \pi^*(H) - E$, where E is the π -exceptional reduced divisor.

(2) Let X (resp. M) be an n -dimensional projective manifold, and let L (resp. A) be an ample line bundle on X (resp. M). Then we say that (M, A) is a *reduction of (X, L)* if (X, L) is obtained by a composite of simple blowing ups of (M, A) , and (M, A) is not obtained by a simple blowing up of any polarized manifold. The morphism $\mu : X \rightarrow M$ is called the *reduction map*.

Remark 2.1 Let (X, L) be a polarized manifold of dimension n and (M, A) a reduction of (X, L) . Then we obtain $g(X, L) = g(M, A)$.

Definition 2.2 Let (X, L) be a polarized manifold of dimension n . We say that (X, L) is a *scroll* (resp. *quadric fibration*, *Del Pezzo fibration*) *over a normal variety Y of dimension m* if there exists a surjective morphism with connected fibers $f : X \rightarrow Y$ such that $K_X + (n - m + 1)L = f^*A$ (resp. $K_X + (n - m)L = f^*A$, $K_X + (n - m - 1)L = f^*A$) for some ample line bundle A on Y .

Theorem 2.1 *Let (X, L) be a polarized manifold of dimension $n \geq 3$. Then (X, L) is one of the following types.*

- (1) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.
- (2) $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$.
- (3) *A scroll over a smooth curve.*
- (4) $K_X \sim -(n - 1)L$, *that is, (X, L) is a Del Pezzo manifold.*
- (5) *A quadric fibration over a smooth curve.*
- (6) *A scroll over a smooth surface S . In this case, there exists an ample vector bundle $\mathcal{E}$ on S such that $X = \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ and $L = H(\mathcal{E})$.*
- (7) *Let (M, A) be a reduction of (X, L) .*
 - (7.1) $n = 4$, $(M, A) = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$.
 - (7.2) $n = 3$, $(M, A) = (\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(2))$.
 - (7.3) $n = 3$, $(M, A) = (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$.

(7.4) $n = 3$, M is a $\mathbb{P}^2$ -bundle over a smooth curve C such that $(F, A|_F) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ for any fiber F of it.

(7.5) $K_M + (n - 2)A$ is nef.

Proof. See [1, Proposition 7.2.2, Theorem 7.2.4, Theorem 7.3.2, Theorem 7.3.4, and Theorem 7.5.3]. See also [5, Chapter II, (11.2), (11.7), and (11.8)], or [13, Section 1, Theorem]. $\square$

Remark 2.2 Let (X, L) be a polarized manifold of dimension $n \geq 3$. If (X, L) is one of the types from (1) to (6) in Theorem 2.1, then (X, L) is a reduction of itself.

Remark 2.3 Let (X, L) be a polarized manifold of dimension $n \geq 3$. Then $\kappa(K_X + (n - 2)L) = -\infty$ if and only if (X, L) is one of the types from (1) to (7.4) in Theorem 2.1.

次の結果が主結果を証明する際に重要となる。Theorem 2.2 は以前私が断面種数の研究を重点的に行っていた際に証明した結果である

Theorem 2.2 Let (X, L) be a polarized manifold with $\dim X = n \geq 3$. Assume that $\dim \text{Bs}|L| \leq 0$, $h^0(L) \geq n + m$, and $m \geq 1$, where $m = g(X, L) - q(X)$. Let (M, A) be a reduction of (X, L) . Then (X, L) is one of the following types:

- (1) (X, L) is a Del Pezzo manifold.
- (2) (X, L) is a hyperquadric fibration over a smooth curve with

$$q(X) \leq \frac{1}{2} + \frac{2m + 1}{2n}.$$

- (3) (X, L) is a scroll over a smooth surface S with $\kappa(S) = -\infty$.
If $q(X) > 0$ and S is relatively minimal, then

$$q(X) \leq 1 + \frac{2m - n + 1}{n^2 - 3n + 4}.$$

If $q(X) > 0$ and S is not relatively minimal, then

$$q(X) \leq 1 + \frac{4m - 4n + 3}{8n^2 - 20n + 16}.$$

- (4) $(M, A) = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2))$.
- (5) $(M, A) = (\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}(2))$.
- (6) $(M, A) = (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(3))$.

- (7) M is a $\mathbb{P}^2$ -bundle over a smooth curve C with $(F, A_F) = (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ for any fiber F of it.

Proof. [9] を参照のこと. □

さらに上記の Theorem 2.2 と同様の方法で次の Theorem ??を示すことができる. Theorem 2.2 では $\dim \text{Bs}|L| \leq 0$ を仮定しているのに対して, Theorem ??では $\text{Bs}|L| = \emptyset$ を仮定していることに注意せよ.

Theorem 2.3 *Let (X, L) be a polarized manifold with $\dim X = n \geq 3$. Assume that $\text{Bs}|L| = \emptyset$, $h^0(L) = n + m - 1$, where $m = g(X, L) - q(X)$. Let (M, A) be a reduction of (X, L) . Then (X, L) is one of the following types:*

- (1) (X, L) is a hyperquadric fibration over a smooth projective curve with

$$q(X) \leq \frac{3}{2} + \frac{2m-1}{2n}.$$

- (2) (X, L) is a classical scroll over a smooth projective surface Y with $\kappa(Y) = -\infty$. If $q(X) > 0$ and Y is relatively minimal, then

$$q(X) \leq 1 + \frac{2m-n+1}{n^2-3n+4}.$$

If $q(X) > 0$ and Y is not relatively minimal, then

$$q(X) \leq 1 + \frac{4m-1}{8n^2-20n+16}.$$

- (3) $(M, A) = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$ and (X, L) is obtained by 7 times simple blowing ups of (M, A) .
- (4) $(M, A) = (\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(2))$ and (X, L) is obtained by 7 times simple blowing ups of (M, A) .
- (5) $(M, A) = (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$ and (X, L) is obtained by 8 times simple blowing ups of (M, A) .
- (6) M is a $\mathbb{P}^2$ -bundle over $\mathbb{P}^1$ with $(F, A|_F) = (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ for any fiber F of it, and (X, L) is obtained by 7 times simple blowing ups of (M, A) .
- (7) (X, L) is a Mukai manifold with $L^n = 2m - 2$ and $\Delta(X, L) = m - 1$.

Proof. [10] を参照のこと. □

3 Main results

いよいよ主結果を述べる.

Theorem 3.1 *Let (X, L) be a polarized manifold with $\dim X = n \geq 3$. Assume that L is very ample and $g(X, L) - q(X) = 3$. Then (X, L) is one of the following types:*

- (1) *A hyperquadric fibration over $\mathbb{P}^1$. Then e , b and L^n are the following*

L^n	7	8	9	10	11	12
e	2	3	4	5	6	7
b	3	2	1	0	-1	-2

- (2) *A classical scroll over $\mathbb{P}^2$. In this case, there exists an ample vector bundle $\mathcal{E}$ on $\mathbb{P}^2$ such that $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E})$ and $L = H(\mathcal{E})$. Then $\mathcal{E}$ is one of the following types.*

(2.1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 4}$.

(2.2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$.

(2.3) $T_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$.

(2.4) $\text{rank} \mathcal{E} = 2$ and $\mathcal{E}$ has type $(1,3)$ or $(2,2)$.

- (3) *X is a quartic hypersurface in $\mathbb{P}^{n+1}$ and $L = \mathcal{O}_X(1)$.*

Theorem 3.2 *Let (X, L) be a polarized manifold with $\dim X = n \geq 3$. Assume that L is very ample and $g(X, L) - q(X) = 4$. Then (X, L) is one of the following types:*

- (1) *A hyperquadric fibration over a smooth curve C and one of the following two types is satisfied.*

(1.1) $g(C) = 1$, $e = 8$, $b = -4$ and $n = 3$.

(1.2) $g(C) = 0$ and e , b and L^n are the following

L^n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
e	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

- (2) *A classical scroll over a smooth surface S . In this case, there exists an ample vector bundle $\mathcal{E}$ on S such that $X = \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ and $L = H(\mathcal{E})$. Moreover $(S, \mathcal{E})$ satisfies one of the following three types.*

(2.1) S is a quadric surface in $\mathbb{P}^3$ and $c_1(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_S(3)$.

(2.2) S is a cubic surface in $\mathbb{P}^3$ and $c_1(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_S(2)$.

(2.3) $S = \mathbb{P}_C(\mathcal{F})$ and $c_1(\mathcal{E}) = 2H(\mathcal{F}) + p^*(B)$, where C is a smooth curve with $g(C) \leq 1$, $\mathcal{F}$ is a vector bundle of rank two on C , $p : \mathbb{P}_C(\mathcal{F}) \rightarrow C$ is the projection and B is a line bundle on C . In this case, the rank of $\mathcal{E}$ is two.

(3) X is a complete intersection of type $(2, 3)$ in $\mathbb{P}^{n+2}$ and $L = \mathcal{O}_X(1)$.

Theorem 3.3 *Let (X, L) be a polarized manifold with $\dim X = n \geq 3$. Assume that L is very ample and $g(X, L) - q(X) = 5$. Let (M, A) be a reduction of (X, L) . Then (X, L) is one of the following types:*

(1) *A hyperquadric fibration over a smooth curve C and one of the following three types is satisfied.*

(1.1) $g(C) = 2$, $e = 8$, $b = -4$ and $n = 3$.

(1.1) $g(C) = 1$ and e , b and L^n are the following.

L^n	12	13	14	15
e	7	8	9	10
b	-2	-3	-4	-5

(1.2) $g(C) = 0$ and e , b and L^n are the following.

L^n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
e	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6

(2) *A classical scroll over a smooth surface S . In this case, there exists an ample vector bundle $\mathcal{E}$ on S such that $X = \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ and $L = H(\mathcal{E})$. Moreover $(S, \mathcal{E})$ satisfies one of the following two types.*

(2.1) $S = F_1$ and $c_1(\mathcal{E})^2 = 21$.

(2.2) $S = \mathbb{P}_C(\mathcal{F})$ and $c_1(\mathcal{E}) = 2H(\mathcal{F}) + p^*(B)$, where C is a smooth curve with $g(C) \leq 1$, $\mathcal{F}$ is a vector bundle of rank two on C , $p : \mathbb{P}_C(\mathcal{F}) \rightarrow C$ is the projection and B is a line bundle on C . In this case, the rank of $\mathcal{E}$ is two.

(3) $(M, A) = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$.

(4) $(M, A) = (\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(2))$.

(5) X is a complete intersection of type $(2, 2, 2)$ in $\mathbb{P}^{n+3}$ and $L = \mathcal{O}_X(1)$.

(6) X is a one point blowing up of the type $(2, 2, 2)$ complete intersection Y in $\mathbb{P}^{n+3}$ and $L = \pi^*(\mathcal{O}_Y(1)) - E$, where $\pi : X \rightarrow Y$ is the birational morphism and E is the exceptional divisor.

Proof. 上記の3つの定理は基本的に証明方法が同じであるので Theorem 3.3 の証明の流れを述べることにする¹.

まず, L は非常に豊富な因子であるので $h^0(L) \geq n+1$ が成り立つことに注意する.

(a) $h^0(L) \geq n+4$ のとき, Theorem 2.2 と Theorem ?? を用いると (X, L) のタイプは特別なものになることがわかる. あとは個別に詳しく調べる.

(b) $h^0(L) = n+3$ のとき, X は L による埋め込みで $\mathbb{P}^{n+2}$ 内の余次元2の部分多様体となる. いま $n \geq 3$ なので Barth-Lasén の定理 ([15, Theorem 3.2.1]) より $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ となることがわかる. したがって $g(X, L) = h^1(\mathcal{O}_X) + 5 = 5$ となることがわかる. ここで $\kappa(K_X + (n-2)L)$ の値により場合分けを行う.

(b.1) もし $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 0$ なら

$$5 = g(X, L) = 1 + \frac{1}{2}(K_X + (n-1)L)L^{n-1} \geq 1 + \frac{1}{2}L^n$$

なので $L^n \leq 8$ がいえる. L は非常に豊富な因子よりこのような (X, L) には分類表がある ([11], [12], [14]). それを用いて分類を得ることができる.

(b.2) もし $\kappa(K_X + (n-2)L) = -\infty$ なら, 随伴束の理論より (X, L) は特別な場合となる (Theorem 2.1 を参照せよ) ので個別に調べる.

(c) $h^0(L) = n+2$ のとき, X は L による埋め込みで $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の余次元1の部分多様体, つまり $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面となる. ここで $d = L^n$ とおくと $g(X, L) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ となることがわかる. $g(X, L) = 5$ より $10 = (d-1)(d-2)$ がいえる. しかしこれを満たす整数 d は存在しない.

(d) $h^0(L) = n+1$ のとき, (X, L) は $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ と同型となる. しかしこのときは $g(X, L) = 0$ となり, 仮定に反する. $\square$

References

- [1] M. C. Beltrametti and A. J. Sommese, *The adjunction theory of complex projective varieties*, de Gruyter Expositions in Math. 16, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (1995).
- [2] T. Fujita, *On hyperelliptic polarized varieties*, Tôhoku Math. J. 35 (1983), 1–44.
- [3] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, in Algebraic Geometry Sendai 1985, pp.167–178, Adv. Stud. Pure Math. 10, Kinokuniya, 1987.

¹ これら主結果に関する論文を作成予定であるが, 完成時期は未定である.

- [4] T. Fujita, *Classification of polarized manifolds of sectional genus two*, the Proceedings of “Algebraic Geometry and Commutative Algebra” in Honor of Masayoshi Nagata (1987), 73–98.
- [5] T. Fujita, *Classification Theories of Polarized Varieties*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 155, Cambridge University Press, (1990).
- [6] Y. Fukuma, *On polarized 3-folds (X, L) with $g(L) = q(X) + 1$ and $h^0(L) \geq 4$* , Ark. Mat. 35 (1997), 299–311.
- [7] Y. Fukuma, *On sectional genus of quasi-polarized 3-folds*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 363–377.
- [8] Y. Fukuma, *On complex manifolds polarized by an ample line bundle of sectional genus $q(X) + 2$* , Math. Z. 234 (2000), 573–604.
- [9] Y. Fukuma, *On complex n -folds polarized by an ample line bundle L with $\dim \text{Bs}|L| \leq 0$, $g(L) = q(X) + m$, and $h^0(L) \geq n + m$* , Special issue in honor of Robin Hartshorne. Comm. Algebra 28 (2000), 5769–5782.
- [10] Y. Fukuma, *On complex n -folds polarized by an ample line bundle L with $\text{Bs}|L| = \emptyset$, $g(X, L) = q(X) + m$ and $h^0(L) = n + m - 1$* . preprint.
- [11] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants*, in Proceedings of the Week of Algebraic Geometry, Bucharest 1982, Lecture Notes in Math. 1056 (1984), 142–186.
- [12] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants, II*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 31 (1986), 539–544.
- [13] P. Ionescu, *Generalized adjunction and applications*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 (1986), 457–472.
- [14] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants, III*, in Algebraic Geometry, Proceedings of Conference on Hyperplane Sections, L’Aquila, Italy, 1988 Lecture Notes in Math. 1417 (1990), 138–154.
- [15] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I, II*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 2004.

Department of Mathematics
 Faculty of Science
 Kochi University
 Akebono-cho, Kochi 780-8520
 Japan
 E-mail: fukuma@kochi-u.ac.jp
<http://www.math.kochi-u.ac.jp/fukuma/indexj.html>

ガロワ点と自己同型群 (具体例を中心に)

宇部工業高等専門学校 三浦 敬

今日のタイトルについて

自己同型群 $\text{Aut}(X)$ の中で, ガロワ点でのガロワ群が生成する群 $G(X)$ がどれくらいを占めるのか知りたい!

1

今日の内容

- §1 Introduction (ガロワ点の定義など)
- §2 問題意識
- §3 主結果
- §4 例
- §5 主結果の証明の概略

2

はじめに

k を標数0の代数閉体とし, 基礎体として固定する. K を k 上の代数関数体とする. このとき,

体拡大 K/k を覗き込んでみたい!

特に, どのような中間体がどれくらい存在するの
かを知りたい. これが「ガロワ点の研究」の当初
の目的であった. そこで, 体拡大 K/k の様子を
以下のように幾何の観点から考察することを考え
よう.

3

§1

- k : field, $\text{ch}(k) = 0$, $\bar{k} = k$
- $X \subset \mathbb{P}^n$ を d 次 ($d \geq 3$) 既約超曲面
- $K := k(X)$ を X の関数体
- 空間上の点 $P \in \mathbb{P}^n$ に対し, 点 P を中心とする点射影を考える
 $\Rightarrow \pi_P : X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$: 点 P 中心の射影
- この点射影は関数体の間の体拡大をひき起こす
 $\Rightarrow \pi_P^* : k(\mathbb{P}^{n-1}) \hookrightarrow k(X)$: 関数体の体拡大

4

- この体拡大は点 P によって決まるので, $\pi_P^*(k(\mathbb{P}^{n-1}))$ を K_P で書く
- すなわち, $\pi_P^* : K_P \hookrightarrow K$ または K/K_P
- 拡大次数については $[K : K_P] = d - m_P$ (ただし m_P は X の P における重複度で, もし $P \notin X$ ならば $m_P = 0$ とおく) であることに注意

5

定義と記号

定義 1 (Yoshihara, 1996). 体拡大 K/K_P がガロワ拡大となるとき, 点 $P \in \mathbb{P}^n$ を X に対するガロワ点 (Galois point for X) であるという.

記号を次のように準備する

- L_P : 体拡大 K/K_P のガロワ閉包,
- $\tilde{X}_P : L_P$ を関数体にもつ非特異代数多様体,
- $G_P := \text{Gal}(L_P/K_P)$: 点 P でのガロワ群と呼ぶことにする.

6

定義と記号

定義 2. X に対するガロワ点は $P \in X$ のとき, inner Galois point と呼ばれ, $P \in \mathbb{P}^n \setminus X$ のとき, outer Galois point と呼ばれる. それぞれの個数を表す記号として, 次を定義する.

- $\delta(X) := \#\{P \in X \mid P \text{ is a G.P. for } X\}$
- $\delta'(X) := \#\{P \in \mathbb{P}^n \setminus X \mid P \text{ is a G.P. for } X\}$

7

ダイアグラム

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X}_P & \xlongequal{\quad} & L_P & \xlongequal{\quad} & \{1\} \\
 \widetilde{\pi_P} \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 X & \xlongequal{\quad} & K = k(X) & \xlongequal{\quad} & H \\
 \pi_P \downarrow & & \pi_P^* \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}^{n-1} & \xlongequal{\quad} & K_P = k(\mathbb{P}^{n-1}) & \xlongequal{\quad} & G_P
 \end{array}$$

8

正統派の問題

問題 1. 超曲面 X に対し,

- (i) X に対するガロワ点を探すこと, 特に $\delta(X)$ と $\delta'(X)$ を決定すること.
- (ii) ガロワ群 G_P にはどのような群が現れるか? また, K/K_P の中間体を決定せよ.
- (iii) 関数体 L_P はどのようなものが現れるか? また, $\tilde{X}_P$ の性質を調べよ.
- (iv) 逆に, ガロワ点を用いて X の特徴付け, 定義方程式の決定を行うこと.

9

§2

以後, P は X のガロワ点であると仮定する.

$\Rightarrow \forall \sigma \in G_P$ induces a birational transformation of X (同じ記号 σ で表すことにする)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}^n \supset X & \xlongequal{\quad} & K & \xlongequal{\quad} & \{1\} \\
 \pi_P \downarrow & & \pi_P^* \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}^{n-1} & \xlongequal{\quad} & K_P & \xlongequal{\quad} & G_P
 \end{array}$$

10

ガロワ点に付随する双有理変換

定義 3. この σ をガロワ点 P に付随する双有理変換 (the birational transformation belonging to the Galois point P) とよぶ.

問題 2. 双有理変換 σ の性質を調べよ!!

11

ガロワ点に付随する双有理変換

例えば次のような問題はどうだろう。 P を X に対するガロワ点とする。このとき、どのような場合に次の (i), (ii), (iii) が起きるか判定せよ。

- (i) $G_P \subset \mathrm{PGL}(n, k)$
- (ii) $G_P \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ かつ $G_P \not\subset \mathrm{PGL}(n, k)$
- (iii) neither (i) nor (ii)

一般には非常に難しい。

12

ガロワ点に付随する双有理変換

定理 3 (Yoshihara). X : smooth hypersurface of $\deg X = d \geq 4$

$\Rightarrow G_P \ni \forall \sigma$ can be extended to a projective transformation, i.e., $\exists \tilde{\sigma} \in \mathrm{PGL}(n, k)$ s.t. $\tilde{\sigma}|_X = \sigma$. Furthermore, $G_P \cong$ cyclic group.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\exists \tilde{\sigma}} & \mathbb{P}^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

13

ガロワ点に付随する双有理変換

『 σ についての考察』

σ が拡張される, されないの判定は結構難しい = おもしろい?

高知集会 2010 の報告集に関連することを書いておきました。ご覧頂ければ幸いです。

keywords:

リサージュ曲線, 飯高先生の L -minimal, Eckardt point

14

本日のメインテーマ

今までは個々のガロワ点 P に対して $\sigma \in G_P$ の性質について調べてきた。

$\Rightarrow$ そこで, 今日は「すべての」 σ の性質を調べることを提起したい。以後, X は非特異超曲面で, 次数は $d \geq 4$ と仮定する^{*1}。この場合, 先ほどの定理 3 が成立することに注意する。

^{*1} 将来的には「非特異」という仮定無しで考えたいが…
15

定義

定義 4. $P_1, P_2, \dots, P_m$ を X の inner, outer 全てのガロワ点とする. このとき, 各ガロワ点でのガロワ群 G_{P_i} で生成される群 (the group generated by the automorphisms belonging to the Galois points for X) を $G(X)$ で定義する. すなわち,

$$G(X) := \langle G_{P_1}, G_{P_2}, \dots, G_{P_m} \rangle \subset \text{Aut}(X).$$

16

注意

注意 1. この定義にある $G(X)$ は, 金沢光則先生, 高橋剛さん, 吉原久夫先生の三氏による論文 (Nihonkai Math. J. 2001) で初めて定義された. 三氏は, X が最大個数の inner ガロワ点を持つ場合, すなわち, (i) 4個のガロワ点を持つ非特異平面4次曲線, (ii) 8個のガロワ点を持つ非特異4次曲面, について $G(X)$ の構造を調べた.

17

注意

注意 2. X がガロワ点を持たない場合は, $G(X) = \{1\}$ とする.

18

メインテーマ

問題 4. 群 $G(X)$ を調べよ!

…もちろん調べ方には多種多様な方法が考えられよう. 例えば, $G(X)$ は $\text{Aut}(X)$ の中でどのような部分群であるか? などは非常に興味深いと思われる. ここでは, 手始めとして $G(X)$ と $\text{Aut}(X)$ の位数の比の値に注目することにする. (第9回代数曲線シンポジウム報告集より)

⇒ ダイレクトに $G(X)$ を調べてみる!

19

§3 主結果

以後, X は非特異平面曲線で, 次数は $d \geq 4$ と仮定する. $X = C$ と書く.

まず, 最初に分かることは,

定理 5. *For general $C \Rightarrow G(C) = \text{Aut}(C)$.*

Proof. general C に対して, $\text{Aut}(C)$ が自明なので. $\square$

20

主結果

$\delta(C) \geq 1$ or $\delta'(C) \geq 1$ のとき,

定理 6. $G(C) \triangleleft \text{Aut}(C)$

定理 7 (主結果).

- (i) *general C に対し, $\text{Aut}(C) = G(C)$*
- (ii) $\text{Aut}(C) \neq G(C)$ のとき, $\text{Aut}(C)/G(C)$ は 5 種類の正多面体群, $\mathbb{Z}/(n)$, D_{2n} , A_4 , S_4 , A_5 に同型である.

21

例: $C_4 : YZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$

$\delta(C) = 4 \Leftrightarrow C \sim C_4$ である. この4個の inner Galois point に付随する自己同型が生成する群 $G(C_4)$ については, 上に述べたように, 三氏による論文に詳しく結果が述べられている. 実は, さらに $\delta'(C_4) = 1$ でもあるので, この5個のガロワ点について $G(C_4)$ を計算してみよう. $\text{Aut}(C_4)$ については, いろいろな先行研究があり $\#\text{Aut}(C_4) = 48$ が知られている. $G(C_4)$ の計算には, 先行研究に outer Galois point の情報を付け加えれば十分であり,

$$\text{Aut}(C_4) = G(C_4)$$

を得る. ただし, 細かい計算が必要.

22

例: $C_d : YZ^{d-1} + X^d + Y^d = 0$

$d = 4$ のときは, 上の例で計算したとおりである.

実は, 深澤さんの論文によれば,

- $d = 4$ のとき, $\delta(C) = 4$ かつ $\delta'(C) = 1 \Leftrightarrow C \sim C_4$
- $d \geq 5$ のとき $\delta(C) = 1$ かつ $\delta'(C) = 1 \Leftrightarrow C \sim C_d$

ここでは $d \geq 5$ の場合を調べてみよう.

$P = (0 : 0 : 1) \in C_d$, $Q = (1 : 0 : 0) \notin C_d$ がガロワ点であり, ガロワ群は $G_P \cong \mathbb{Z}/(d-1)$, $G_Q \cong \mathbb{Z}/(d)$. 生成元を $G_P = \langle \sigma \rangle$, $G_Q = \langle \tau \rangle$ とし, それぞれを行列で表示すると

$$\sigma = \begin{pmatrix} \eta & & \\ & \eta & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \xi^{d-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

23

ここで, η は原始 $(d-1)$ 乗根, ξ は原始 d 乗根である.
 よって求めたい群 $G(C_d)$ は,

$$G(C_d) = \langle \sigma, \tau \rangle = \{ \sigma^i \tau^j \mid i = 1, 2, \dots, d-1, j = 1, 2, \dots, d \}$$

となる. 特に $\sharp G(C_d) = (d-1)d$ である.

一方 $\text{Aut}(C_d)$ については, $\delta(C) = 1$ であることを上手く
 使うことにより自力で計算することが可能である. 特に,
 $\sharp \text{Aut}(C_d) = (d-1)d$ が確かめられる. 結論として,

$$\text{Aut}(C_d) = G(C_d)$$

を得る.

24

が分かる.

$\langle G_Q, G_R \rangle \subset G(C_{d,m})$ に注意して, 次の問いはどうか?

問題 8. このとき, Q, R 以外にガロワ点は存在しないと言
 えるだろうか?

26

例: $C_{d,m} : Y^m Z^{d-m} + X^d + Z^d = 0$

$m \neq d, d-1$ のとき, 特異点を持つ.

- $Q = (1 : 0 : 0) \notin C_{d,m}$ は outer Galois point であり,
 $G_Q \cong \mathbb{Z}/(d)$.
- $R = (0 : 1 : 0) \in C_{d,m}$ は特異点かつガロワ点であり,
 $G_R \cong \mathbb{Z}/(m)$ である.

両者の群は, 行列で表現することができるので, 上の例と同
 様の計算が可能である. 特に, $\sharp \langle G_Q, G_R \rangle = dm$ を得る.
 このとき, Kontogeorgisによれば, $\text{Aut}(k(C_{d,m}))$, すなわ
 ち, $C_{d,m}$ の双有理変換群は, m が d を割り切らなければ
 $\mu(d) \times \mu(m)$ である. 特に,

$$\text{Aut}(k(C_{d,m})) = \langle G_Q, G_R \rangle$$

25

例: フェルマー曲線

$$C = F(d) : X^d + Y^d + Z^d = 0$$

事実として, $\text{Aut}(F(d))$ は

$\mu(d) \times \mu(d) : (X : Y : Z) \mapsto (\xi^i X : \xi^j Y : Z), \xi$ は原
 始 d 乗根

$S_3 : \{X, Y, Z\}$ の置換

のふたつの群によって生成される. 特に, 半直積であり,

$\sharp \text{Aut}(F(d)) = 6d^2$ であることが知られている.

27

また, ガロワ点については, $\delta(F(d)) = 0$, $\delta'(F(d)) = 3$.
 具体的には, $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$,
 $P_3 = (0 : 0 : 1)$ が3つの outer ガロワ点であり, 各点での
 ガロワ群は $G_{P_i} \cong \mathbb{Z}/(d)$ である. ここで, 生成元を
 $G_{P_i} = \langle \sigma_i \rangle$ とし, σ_i を行列で表示すると,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \xi & \\ & & \xi \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} \xi & & \\ & 1 & \\ & & \xi \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} \xi & & \\ & \xi & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

28

よって求めたい群 $G(F(d))$ は,

$$G(F(d)) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \xi^i & \\ & & \xi^j \end{pmatrix}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, d)$$

であり, これは $\mu(d) \times \mu(d)$ に他ならないので,

$$\text{Aut}(F(d))/G(F(d)) \cong S_3$$

を得る.

(注意) このことは, 高次元でも同様に成り立つことが予想
 される

29

例：Hurwitz 曲線

$C = H_d : X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0$
 H_d は total flex をもたない. さらに正確に言うと H_d は 3
 個の $(d-3)$ -flex と, $3(d^2 - 3d + 3)$ 個の 1-flex を持つ.
 このことより, $\delta(H_d) = \delta'(H_d) = 0$ であることが分かる.
 しかし, $\text{Aut}(H_d)$ が自明でないことは, 例えば,
 $(X : Y : Z) \mapsto (Y : Z : X)$ などが自己同型として存在する
 ことから分かる. よって,

$$\#\text{Aut}(H_d) \neq 1, \quad G(H_d) = \{1\}$$

特に, $d = 4$ のとき, H_4 は Klein quartic と呼ばれる有名
 な曲線であり, $\#\text{Aut}(H_4) = 168$ である.

30

例：巡回群の例

$$f_6(X, Y) = (X - Y)(X - \omega Y)(X - \omega^2 Y)$$

$$(X - 2Y)(X - 2\omega Y)(X - 2\omega^2 Y)$$

とおいて, $C : YZ^5 + f_6(X, Y) = 0$ とする. ただし,
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

$\Rightarrow P = (0 : 0 : 1)$ は inner Galois point, $G_P \cong \mathbb{Z}/(5)$.
 さらに,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

ただし, $e^5 = \omega^2$ とすれば, $\varphi \in \text{Aut}(C)$ が分かる.

31

このとき,

$$1 \longrightarrow G(C) \longrightarrow \text{Aut}(C) \xrightarrow{(\pi_P)^*} G' \longrightarrow 1,$$

$$G' := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \right\rangle$$

は split する. 結論として

$$\text{Aut}(C)/G(C) \cong \mathbb{Z}/(3)$$

を得る.

32

例：2面体群の例

$$C : X^{2n} + X^n Y^n + Y^{2n} + Z^{2n} = 0.$$

$\Rightarrow P = (0 : 0 : 1)$ は outer Galois point, $G_P \cong \mathbb{Z}/(2n)$.

さらに, G_P 以外の $\text{Aut}(C)$ として

$$\sigma = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ただし, $\xi^n = 1$ とすれば, $\langle (\pi_P)_* \sigma, (\pi_P)_* \tau \rangle \cong D_{2n}$ が確かめられる. このとき,

$$\text{Aut}(C)/G(C) \cong D_{2n}$$

33

例：正4面体群 A_4 の例

$$C : 2X^{12} - 66X^8 Y^4 - 66X^4 Y^8 + 2Y^{12} + Z^{12} = 0$$

$\Rightarrow P = (0 : 0 : 1)$ は outer Galois point, $G_P \cong \mathbb{Z}/(12)$.

さらに, G_P 以外の自己同型として

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}i} & \frac{i}{\sqrt{2}i} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}i} & \frac{-i}{\sqrt{2}i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ただし, $i^2 = -1$ とすれば, $\sigma, \tau \in \text{Aut}(C)$ かつ

$\langle (\pi_P)_* \sigma, (\pi_P)_* \tau \rangle \cong A_4$ が確かめられる. このとき,

$$\text{Aut}(C)/G(C) \cong A_4$$

34

例：正8面体群 S_4 の例

$$C : X^{24} + 150X^{20}Y^4 + 159X^{16}Y^8 + 3476X^{12}Y^{12} +$$

$$159X^8Y^{16} + 150X^4Y^{20} + Y^{24} + Z^{24} = 0.$$

$\Rightarrow P = (0 : 0 : 1)$ は outer Galois point, $G_P \cong \mathbb{Z}/(24)$.

さらに, G_P 以外の自己同型として

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とすれば, $\sigma, \tau \in \text{Aut}(C)$ かつ $\langle (\pi_P)_* \sigma, (\pi_P)_* \tau \rangle \cong S_4$ が

確かめられる. よって, $\text{Aut}(C)/G(C) \cong S_4$

35

例：正20面体群 A_5 の例

$C : X^5 Y^5 (X^{10} + 11X^5 Y^5 - Y^{10})^5 + Z^{60} = 0$
 $\Rightarrow P = (0 : 0 : 1)$ は outer Galois point, $G_P \cong C_{60}$.
 さらに, 次の $\text{Aut}(C)$ を考える.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\xi - \xi^4}{\sqrt{5}} & \frac{\xi^3 - \xi^2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{\xi^3 - \xi^2}{\sqrt{5}} & \frac{-\xi + \xi^4}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ただし, ξ は1の原始5乗根. このとき,

$$\text{Aut}(C)/G(C) \cong A_5$$

36

§5 証明の概略

$G(C) \triangleleft \text{Aut}(C)$ なること.

Proof. $P_1, \dots, P_l$ を inner Galois point とする (outer の場合も同様). このとき, 任意の $\tau \in \text{Aut}(C)$ に対して $\tau(P_i)$ はまた inner Galois point なので, $\tau(P_i) = P_j$ for some j . すなわち, $\tau G_{P_i} \tau^{-1} = G_{P_j}$ となる. よって, $\tau \langle G_{P_1}, \dots, G_{P_l} \rangle \tau^{-1} = \langle G_{P_1}, \dots, G_{P_l} \rangle$. $\square$

37

以下, 証明の概略.

P が inner Galois point であると仮定する.

$\Rightarrow P = (0 : 0 : 1)$, $C : YZ^{d-1} + f_d(X, Y) = 0$ とできる.

さらに, $f_d(X, Y) \neq X^d + Y^d$ とする. このとき,

$\delta(C) = 1$, $\delta'(C) = 0$ が分かる.

さてこの場合, 任意の $\varphi \in \text{Aut}(C)$ は, ガロワ点を固定するので $\varphi(P) = P$, P は total flex なので,

$\varphi\{Y = 0\} = \{Y = 0\}$ とならねばならない

以上のことより, φ は次のタイプの行列で表わされることが分かる.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

38

$P = (0 : 0 : 1)$ 中心の点射影は

$\pi_P : (X : Y : Z) \mapsto (X : Y)$ であることに注意すると

$$(\pi_P)_* \varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$(\pi_P)_* \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ である. また,

$$\varphi^*(YZ^{d-1} + f_d(X, Y)) = \lambda(YZ^{d-1} + f_d(X, Y)),$$

$$\exists \lambda \in k \setminus \{0\}$$

とならねばならない. 特に, $Z = 0$ 上で考えれば,

$$\varphi^* f_d(X, Y) = \lambda f_d(X, Y), \quad \exists \lambda \in k \setminus \{0\}$$

$f_d(X, Y) = 0$ の根を $(\alpha_1 : \beta_1), \dots, (\alpha_d : \beta_d)$ とし,

$P_i := (\alpha_i : \beta_i)$ とおく.

39

ここで, $(\pi_P)_*\varphi$ の $\{P_1, P_2, \dots, P_d\}$ への作用を考えると

(i) $P_1, P_2, \dots, P_d \in \mathbb{P}^1$ が一般的ならば $(\pi_P)_*\varphi$ は $\{P_1, P_2, \dots, P_d\}$ に作用しない. すなわち, このとき, このような φ は存在せず, $G(C) = \text{Aut}(C)$ となる.

(ii) $(\pi_P)_*\varphi$ が $\{P_1, P_2, \dots, P_d\}$ へ作用するとき, orbit $O_1, O_2, \dots, O_s$ に分解する. ただし, $O_i = \{(\alpha_1^{(i)} : \beta_1^{(i)}), \dots, (\alpha_{s_i}^{(i)} : \beta_{s_i}^{(i)})\}$. このとき, $f_d(X, Y) = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^{s_i} (\alpha_j^{(i)} X - \beta_j^{(i)} Y)$ とすればよい.

すなわち, act するときには次の完全列が存在し, 特に split

することが分かる (半直積となる).

$$1 \longrightarrow G(C) \longrightarrow \text{Aut}(C) \xrightarrow{(\pi_P)^*} G' \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \text{Aut}(C)/G(C) \cong G'$$

(V) 型の特異ファイバーを 3 本持つ種数 2 の 有理ファイバー曲面 I, II

北川真也

1 主結果と背景

平面 3 次曲線の一般のペンシルは 9 個の基点を持ち, 基点を解消すると, 階数 8 のルート格子 E_8 をモデル・ヴェイユ格子とする有理楕円曲面が得られる ([7]). 逆に, 切断をもつ相対極小な有理楕円曲面は 9 回の適当な (-1) 曲線の縮約により, ファイバーの像が平面 3 次曲線のペンシルを成す. 有理曲面 X の相対極小な種数 2 曲線束 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ も同様に, 特別な場合¹を除いて射影平面への双有理射 $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在して, f の各ファイバーの v による像が平面曲線のペンシル Λ を成す. ピカール数 $\rho(X)$ に対して, Λ の基点は無限近傍点も含めて数えると $\rho(X) - 1$ 個である. 基点を解消する事で, Λ に付随する有理写像 $\Phi_{|\Lambda|}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ から元の $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が復元される.

f の切断を X 上の曲線とみなして, 自己交点数が -1 となる切断を (-1) 切断と呼ぶ.

定理 1 ([2], [1], [4], [5]). X を非特異有理曲面, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対極小な種数 2 曲線束とする. ピカール数 $\rho(X)$ について, $11 \leq \rho(X) \leq 14$ である. f の一般ファイバーを F で表す. $\rho(X) \neq 14$ または f のモデル・ヴェイユ群が非自明と仮定すれば, 双有理射 $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在する. さらに, それらの内で F の像の次数が最小となるように双有理射を選ぶと, F の像の特異点の個数と重複度及び最小次数は次の通りである.

- (A) $\rho(X) = 11$ のとき, 5 重点と九つの 4 重点をもつ平面 13 次曲線,
- (B1) $\rho(X) = 12$ かつ f が (-1) 切断をもつとき,
八つの 3 重点と二つの 2 重点をもつ平面 9 次曲線,
- (B2) $\rho(X) = 12$ かつ f が (-1) 切断をもたないとき,
3 重点と十の 2 重点をもつ平面 7 次曲線,
- (C) $\rho(X) = 13$ のとき, 八つの 2 重点をもつ平面 6 次曲線,
- (D) $\rho(X) = 14$ のとき, 2 重点をもつ平面 4 次曲線.

¹有理曲面 X の相対極小な種数 2 曲線束 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ について, $\rho(X) = 14$ かつ f のモデル・ヴェイユ群が自明なとき, かつそのときに限って, X の線織構造は唯一で, 相対極小モデルは $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ または $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$ である. 特に, 双有理射 $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ は存在しない.

1899 年の Franchis [2] の証明は不完全である. 2010 年の Calabri と Ciliberto の共同研究 [1, §10.5. De Franchis' Theorem] により, 証明は概ね修正された. しかし, 未だ不備²が残っている. また, 5 種類 (A)–(D) のペンシルの存在に関して 2010 年の共同研究は [1, Remark 10.11] で触れているが本質的には, 前述の先行研究 [2] に委ねている. [2] では (B1) の一般的な場合と (B2) の少し特殊な場合³のそれぞれの平面曲線のペンシルについては定義方程式を紹介しているが, (A) の 13 次曲線のペンシルの定義方程式までは言及していない.

(A), (B1), (B2), (C) 及び (D) の五つに場合分けすると, [8, 定理 3, 7, 8 及び 9] が適用し易くなり, f のモデル・ヴェイユ群を考察できる. 五つの場合それぞれに対して, 最大階数のモデル・ヴェイユ格子の構造は解明できている. そこで次に, モデル・ヴェイユ群が自明な場合に興味をもたれる. (C) の場合, モデル・ヴェイユ群が自明ならば f は (V) 型の特異ファイバーをもつ. ここで (V) 型とは, 堀川 [3] によって 6 系統へ種数 2 曲線束の特異ファイバーが分類された内の 1 系統である. (B2) の場合, (V) 型の特異ファイバーを 2 本もち, モデル・ヴェイユ群が自明な $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の例が構成できている. $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が (V) 型の特異ファイバーを 3 本もつならば, [3, 定理 2] より $\rho(X) = 11$ が従い, (A) の特殊な場合となるが, 次のように三つのパラメータでペンシルの定義式を書き下す事ができる.

定理 2. $\mathbb{P}^1$ の斉次座標を $(s:t)$, $\mathbb{P}^2$ のそれを $(x:y:z)$ とおく. $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \neq 0$ をみたす複素数の比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ に対して, 3 本の 5 次式 f_0, f_1 及び f_∞ を

$$\begin{aligned} f_0 &= x^2y^2(x-y) - 2\gamma x^2yz^2 - 2\beta xy^2z^2 + \gamma^2xz^4 - \beta^2yz^4, \\ f_1 &= xy^2(x-y)^2 - 2\gamma xy(x-y)z^2 + 2(\alpha+\gamma)y^2(x-y)z^2 + \gamma^2(x-y)z^4 + \alpha^2yz^4, \\ f_\infty &= x^2y(x-y)^2 + 2(\alpha+\beta)x^2(x-y)z^2 - 2\beta xy(x-y)z^2 + \alpha^2xz^4 - \beta^2(x-y)z^4 \end{aligned}$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned} &s(x-y) \left\{ (x-y)f_0 - \alpha(\alpha+2\beta+2\gamma)xyz^4 \right\}^2 \\ &+ ty \left\{ yf_\infty - \gamma(2\alpha+2\beta+\gamma)x(x-y)z^4 \right\}^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

が定める $\mathbb{P}^2$ 上の 13 次曲線のペンシルの基点を解消すると, $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 $(1:0)$, $(1:1)$, $(0:1)$ の上に (V) 型の特異ファイバーをもつ相対極小な種数 2 曲線束を備えた有理曲面を得る. そして, 種数 2 曲線束は他に可約な特異ファイバーをもたない. 実際に, 式 (1.1)

²3 重点及び 4 重点と八つの 5 重点をもつ平面 15 次曲線は, クレモナ変換で次数を下げる事はできず, それら 10 個の特異点を解消すると算術種数が 2 であるが, 一般元が非特異かつ既約であるようなペンシルを成さない. この証明 [1, p. 28] で交点数の計算等に誤りがある. また, 彼らの方針で証明を完結させる事は難しいように思われる. 相対標準写像が導く 2 重被覆の堀川による研究 [3] を用いて, 別証明を与える事ができる.

³ $\rho(X) = 12$ なる非特異有理曲面の相対極小な種数 2 曲線束について随伴因子が成すペンシル $|K_X + F|$ が固定成分をもつか否かで, (B2) か (B1) かに分けられると Franchis [2] は主張しているが, 無数に反例があり, $|K_X + F|$ の固定成分の有無では区別できない. 実は, (B2) の一般の場合は $|K_X + F|$ が固定成分をもたない. また, (B1) の少し特殊な場合には $|K_X + F|$ が固定成分をもつ.

が定める平面 13 次曲線のペンシルは $(s:t) = (1:0), (1:1), (0:1)$ のとき, かつそのときに限って可約である. 特に, $s = t = 1$ のとき式 (1.1) の左辺は

$$(x-y) \{ (x-y)f_0 - \alpha(\alpha+2\beta+2\gamma)xyz^4 \}^2 + y \{ yf_\infty - \gamma(2\alpha+2\beta+\gamma)x(x-y)z^4 \}^2 \\ = x \{ xf_1 + \beta(2\alpha+\beta+2\gamma)y(x-y)z^4 \}^2$$

と因数分解できる.

逆に, $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 $(1:0), (1:1), (0:1)$ の上に (V) 型の特異ファイバーをもつ種数 2 曲線束を備えた有理曲面は, $\mathbb{P}^2$ への適当な双有理射と $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \neq 0$ をみたす複素数の比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ が存在して, ファイバーの像は式 (1.1) が定める平面 13 次曲線のペンシルを成す.

種数 2 曲線束の特異ファイバーの浪川・上野 [6] による分類の中で, 次の六種類が堀川 [3] による分類の (V) 型の特異ファイバーに相当する: [6, p. 13, 1–IV], [6, p. 15, 1–VIII–3], [6, p. 33, 3–IV*–II₀], [6, p. 36, 3–IV*–II₀], 自然数 n を伴って [6, p. 42, 5–III_n*], 自然数 n 及び p を伴って [6, p. 42, 5–II_{n-p}*]. しかし, 有理曲面の種数 2 曲線束が (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つとき, (V) 型の特異ファイバーは [6, p. 15, 1–VIII–3], [6, p. 33, 3–IV*–II₀] 及び $n = p = 1$ を伴って [6, p. 42, 5–II₁₋₁*] のいずれかである事が後述の定理 3 として導かれる. それらの双対グラフは図 1 の通りである. 図 1 の [3–IV*–II₀] 及び [1–VIII–3] において, 成分として 3 重に含まれる (–2) 曲線と (–3) 曲線の交点数は 2 であるが, 異なる 2 点で交わる場合は [3–IV*–II₀] 型, 1 点で 2 重に接する場合は [1–VIII–3] 型と区別される. また, 図 1 の [5–II₁₋₁*] における “ $\odot$ ” は自己交点数が (–1) で算術種数が 1 の曲線を表す. この曲線は尖点を持たないが, 結節点を持つか否かで [6, p. 42, 5–II₁₋₁*] の特異ファイバーを, [5–II₁₋₁(N)] 型と [5–II₁₋₁(S)] 型に呼び分ける事とする.

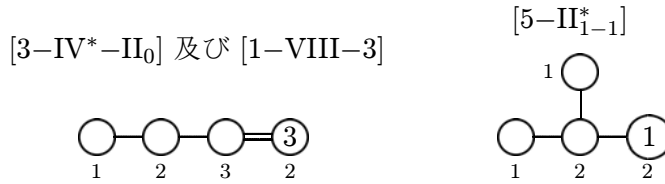


図 1.

定理 3. $(\alpha:\beta:\gamma) \in (\mathbb{P}^2)^*$ に対して, $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, $\lambda_0 = 2\sigma - \alpha$, $\lambda_1 = 2\sigma - \beta$, $\lambda_\infty = 2\sigma - \gamma$, $\nu_0 = \sigma^2 - 4\beta\gamma$, $\nu_1 = \sigma^2 - 4\gamma\alpha$, $\nu_\infty = \sigma^2 - 4\alpha\beta$, $\zeta = \sigma^3 - 4\sigma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 16\alpha\beta\gamma$, $\xi = \sigma^3 - 2\alpha\beta\gamma$ とおく. $(\mathbb{P}^2)^*$ 上の 18 点 $(1:1:\pm 2\sqrt{-1})$, $(2:2:-3)$, $(-9:16:1)$, $(16:-9:1)$, $(4:-1:-1)$, $(\pm 2\sqrt{-1}:1:1)$, $(-3:2:2)$, $(1:-9:16)$, $(1:16:-9)$, $(1:-4:1)$, $(1:\pm 2\sqrt{-1}:1)$, $(2:-3:2)$, $(16:1:-9)$, $(-9:1:16)$, $(1:1:-4)$ が成す部分集合を S で表し, 12 点 $(0:1:\pm 1)$, $(1:0:\pm 1)$, $(1:\pm 1:0)$, $(0:1:-2)$, $(2:$

$(\alpha : \beta : \gamma)$	$(1 : 0)$ 上のファイバー	$(1 : 1)$ 上のファイバー	$(0 : 1)$ 上のファイバー
$(1 : 1 : \pm 2\sqrt{-1})$	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型
$(2 : 2 : -3)$	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型
$(-9 : 16 : 1)$	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型
$(16 : -9 : 1)$	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型
$(4 : -1 : -1)$	$[1-VIII-3]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型
$(\pm 2\sqrt{-1} : 1 : 1)$	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型
$(-3 : 2 : 2)$	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型
$(1 : -9 : 16)$	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型
$(1 : 16 : -9)$	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型
$(1 : -4 : 1)$	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[1-VIII-3]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型
$(1 : \pm 2\sqrt{-1} : 1)$	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型
$(2 : -3 : 2)$	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型
$(16 : 1 : -9)$	$[3-IV^*-II_0]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型
$(-9 : 1 : 16)$	$[5-II_{1-1}^*(N)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[3-IV^*-II_0]$ 型
$(1 : 1 : -4)$	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型	$[1-VIII-3]$ 型

表 1.

$(0 : -1), (1 : -2 : 0), (0 : 2 : -1), (1 : 0 : -2), (2 : -1 : 0)$ が成す部分集合を T とおく. $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は定理 2 のようにして式 (1.1) に対応する有理曲面の種数 2 曲線束とする. 特に, $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 $(1 : 0), (1 : 1), (0 : 1)$ の上に (V) 型の特異ファイバーをもち, f の可約な特異ファイバーはこの 3 本に限る. さらに, 浪川・上野 [6] の分類に照らし合わせると f の特異ファイバーの型について, 次のいずれかが成り立つ:

- $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \setminus \{\alpha\beta\gamma\sigma\lambda_0\lambda_1\lambda_\infty\nu_0\nu_1\nu_\infty\zeta\xi = 0\}$ のとき, f は丁度 5 本の特異ファイバーを持つ. 可約な特異ファイバーはいずれも $[5-II_{1-1}^*(S)]$ 型である. 既約な特異ファイバーは 2 本とも, 特異点として唯一の結節点を有する [6, p. 28, 3-I₁₋₀₋₀] のようなファイバーである.
- $(\alpha : \beta : \gamma) \in S$ のとき, f は既約な特異ファイバーを持たない. つまり, f の特異ファイバーは丁度 3 本である. それらの型は $(\alpha : \beta : \gamma)$ に基づいて表 1 のように変形する.
- $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\lambda_0\lambda_1\lambda_\infty\nu_0\nu_1\nu_\infty\zeta\xi = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, f は丁度 4 本の特異ファイバーを持つ. 4 本の特異ファイバーの型は次の通り:
 - I) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\lambda_0\lambda_1\lambda_\infty\nu_0\nu_1\nu_\infty = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 唯一の既約な特異ファイバーは, 特異点として唯一つの結節点を有する [6, p. 28, 3-I₁₋₀₋₀] のようなファイバーである. 可約な特異ファイバー 3 本の内, 丁度 2 本のフ

ファイバーが $[5-\Pi_{1-1}^*(S)]$ 型である. 残る 1 本の可約な特異ファイバーの型と, 既約な特異ファイバーがのる点については次のいずれかが成り立つ:

- i) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\lambda_0 = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 点 $(1 : 0)$ 上の可約な特異ファイバーが $[3-IV^*-\Pi_0]$ 型であり, 唯一の既約な特異ファイバーは $(\gamma\lambda_\infty^3\nu_\infty^2 : \gamma\lambda_\infty^3\nu_\infty^2 - \beta\lambda_1^3\nu_1^2)$ 上にある.
 - ii) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\lambda_1 = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 点 $(1 : 1)$ 上の可約な特異ファイバーが $[3-IV^*-\Pi_0]$ 型であり, 唯一の既約な特異ファイバーは $(\gamma\lambda_\infty^3\nu_\infty^2 : \alpha\lambda_0^3\nu_0^2)$ 上にある.
 - iii) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\lambda_\infty = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 点 $(0 : 1)$ 上の可約な特異ファイバーが $[3-IV^*-\Pi_0]$ 型であり, 唯一の既約な特異ファイバーは $(\alpha\lambda_0^3\nu_0^2 - \beta\lambda_1^3\nu_1^2 : \alpha\lambda_0^3\nu_0^2)$ 上にある.
 - iv) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\nu_0 = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 点 $(1 : 0)$ 上の可約な特異ファイバーが $[5-\Pi_{1-1}^*(N)]$ 型であり, 唯一の既約な特異ファイバーは $(\gamma\lambda_\infty^3\nu_\infty^2 : \gamma\lambda_\infty^3\nu_\infty^2 - \beta\lambda_1^3\nu_1^2)$ 上にある.
 - v) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\nu_1 = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 点 $(1 : 1)$ 上の可約な特異ファイバーが $[5-\Pi_{1-1}^*(N)]$ 型であり, 唯一の既約な特異ファイバーは $(\gamma\lambda_\infty^3\nu_\infty^2 : \alpha\lambda_0^3\nu_0^2)$ 上にある.
 - vi) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\nu_\infty = 0\} \setminus (S \cup T)$ のとき, 点 $(0 : 1)$ 上の可約な特異ファイバーが $[5-\Pi_{1-1}^*(N)]$ 型であり, 唯一の既約な特異ファイバーは $(\alpha\lambda_0^3\nu_0^2 - \beta\lambda_1^3\nu_1^2 : \alpha\lambda_0^3\nu_0^2)$ 上にある.
- II) $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^* \cap \{\zeta\xi = 0\} \setminus \{(4 : -1 : -1), (1 : -4 : 1), (1 : 1 : -4), (0 : 1 : \pm 1), (1 : 0 : \pm 1), (1 : \pm 1 : 0)\}$ のとき, 唯一つ存在する既約な特異ファイバーは $[6, p. 17, 2-I_0-II-0]$ または $[6, p. 37, 4-I_{1-1-0}]$ のようなファイバーである. 前者のファイバーは特異点として, 唯一つの尖点を有する. 後者のファイバーは特異点として, 二つの結節点を有する. 3 本の可約な特異ファイバーはいずれも $[5-\Pi_{1-1}^*(S)]$ 型である.

以上のように特異ファイバーが変形しても, 次が成り立つ.

定理 4. 有理曲面の種数 2 曲線束は, (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つならばモデル・ヴェイユ群が自明になる.

謝辞. 定理 4 の弱い形は約 5 年ほど前に得られていたのですが, 埼玉大学で酒井文雄先生よりコメントを頂いて一念発起して, 命題 5 と定理 6 を得ました. 津山高専で講演の機会を頂き, 再び酒井文雄先生よりペンシルの定義式を書き下すように勧めて頂いて, 定理 2 を得ました. 最大の原動力は, 今野一宏先生が研究の進捗状況に耳を傾けてくださって, 成果を認めてくださったことです. また, 講演と執筆の機会をくださった世話人の飯高茂先生, 松田修先生に心から厚く御礼申し上げます.

2 諸定理の証明の概略

一般に, 超楕円曲線束を備えた代数曲面の相対標準写像は, 元の曲線束と同じ底曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束への 2 重被覆を導く. 堀川 [3] では 2 重被覆の分岐因子に基づき, 代数曲面の不変量と連動して, 種数 2 曲線束の特異ファイバーが 6 系統に分類されている. 堀川 [3] の諸結果を有理曲面の場合に適用すると, 相対標準写像による像は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である事と分岐因子の線型同値類が分かり, 分岐因子が持ち得る特異点の候補が絞り込める.

X は $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異有理曲面で, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は相対極小な種数 2 曲線束とする. さらに f は (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つと仮定する. 相対標準写像 $\Phi_f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は 2 重被覆で, この分岐因子を B する. 第一成分への射影 $\text{pr}_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーを Γ で表し, 第二成分への射影 pr_2 の一般ファイバーを Δ で表す. [3] より, $B \sim 6\Delta + 8\Gamma$ である. ここで $D \sim D'$ は二つの因子 D と D' が線型同値であることを意味する. $(s:t, u:v)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の斉次座標とする. $sv - tu = 0$ が定義する射影 $\text{pr}_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を O_1 とおき, Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ のそれぞれで $t = 0, t - s = 0$ 及び $s = 0$ が定義する射影 pr_1 のファイバーを表し,

$$sv^2 - 2suv + tu^2 = 0, \quad sv^2 - tu^2 = 0, \quad sv^2 - 2tuv + tu^2 = 0$$

が定義する射影 $\text{pr}_2: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を D_0, D_1, D_∞ とおく. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の点 $(1:0, 1:0), (1:1, 1:1)$ 及び $(0:1, 0:1)$ のそれぞれを p_0, p_1 及び p_∞ とおき, 各点における $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty$ の接方向に対応する無限近傍点を p'_0, p'_1, p'_∞ とおく. $\mathbb{P}^1$ 上の任意の異なる 3 点は, 座標変換によって 3 点 $(1:0), (1:1)$ 及び $(0:1)$ へ写す事ができる. したがって, f の 3 本の (V) 型の特異ファイバーの相対標準写像 Φ_f による像は Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ であると仮定しても一般性を失わない. $B_2 = B - \Gamma_0 - \Gamma_1 - \Gamma_\infty$ とおく. Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ のそれぞれと B_2 は 1 点で 6 重に接して, この 1 点は B_2 の 4 重点である. $\Delta \cdot B_2 = 5$ であるから, B_2 の 3 つの 4 重点はどの 2 つも射影 pr_2 の同一ファイバー上には無い. よって, B_2 は 3 点 p_0, p_1 及び p_∞ で 4 重点をもち, 3 点 p'_0, p'_1, p'_∞ で 2 重点をもつと仮定しても一般性を失わない. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 6 点 $p_0, p_1, p_\infty, p'_0, p'_1$ 及び p'_∞ でのブローアップを $\eta: \Sigma^b \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とおく. η によって p_0, p_1 及び p_∞ のそれぞれへ縮約される (-1) 曲線の Σ^b への狭義逆像を $\check{L}_0, \check{L}_1$ 及び $\check{L}_\infty$ で表し, 全引き戻しを E_0, E_1 及び E_∞ とおき, p'_0, p'_1 及び p'_∞ のそれぞれへ縮約される (-1) 曲線を E'_0, E'_1 及び E'_∞ とおく. したがって, $\check{L}_0 \sim E_0 - E'_0, \check{L}_1 \sim E_1 - E'_1$ 及び $\check{L}_\infty \sim E_\infty - E'_\infty$ である. また, η による $B_2, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty, D_0, D_1, D_\infty$ 及び O_1 のそれぞれの狭義逆像を $\hat{B}_2, \hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_\infty, \hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ とおく. η による Δ, Γ の全引き戻しは, 同じ記号で表す事とする.

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0 &\sim \Gamma - E_0 - E'_0, & \hat{\Gamma}_1 &\sim \Gamma - E_1 - E'_1, & \hat{\Gamma}_\infty &\sim \Gamma - E_\infty - E'_\infty, \\ \hat{O}_1 &\sim \Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty, \\ \hat{B}_2 &\sim 6\Delta + 5\Gamma - 4E_0 - 4E_1 - 4E_\infty - 2E'_0 - 2E'_1 - 2E'_\infty \end{aligned}$$

である. 射影 pr_2 の切断 D_0 は 6 点 $p_0, p_1, p_\infty, p'_0, p'_1$ 及び p'_∞ の内で, p'_0 を除く 5 点を通る. 同様に, D_1 は p'_1 を除く 5 点を通り, D_∞ は p'_∞ を除く 5 点を通る. 以上から,

$$\begin{aligned}\hat{D}_0 &\sim 2\Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E'_1 - E'_\infty \\ \hat{D}_1 &\sim 2\Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E'_0 - E'_\infty \\ \hat{D}_\infty &\sim 2\Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E'_0 - E'_1.\end{aligned}$$

したがって, $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$ 及び $\hat{\Gamma}_\infty$ は Σ^b 上の (-2) 曲線, $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ は (-1) 曲線であり, 異なる添え字 i, j に対して $\hat{\Gamma}_i \cdot \hat{\Gamma}_j = \hat{\Gamma}_i \cdot \hat{D}_j = \hat{D}_i \cdot \hat{D}_j = 0$ が成り立ち, 任意の添え字 k に対して $\hat{\Gamma}_k \cdot \hat{O}_1 = \hat{D}_k \cdot \hat{O}_1 = 0$ かつ $\hat{\Gamma}_k \cdot \hat{D}_k = 1$ が成り立つ. よって, Σ^b 上の 4 つの (-1) 曲線 $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ を縮約した後に, $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$ 及び $\hat{\Gamma}_\infty$ の像が (-1) 曲線であるから, 以上の 7 曲線の縮約で双有理射 $\mu: \Sigma^b \rightarrow \mathbf{P}^2$ を得る. μ により $\hat{D}_0 + \hat{\Gamma}_0, \hat{D}_1 + \hat{\Gamma}_1, \hat{D}_\infty + \hat{\Gamma}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ が縮約された点を q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 とおく.

$\hat{D}_0, \hat{D}_1$ 及び $\hat{D}_\infty$ が μ により縮約された点 q'_0, q'_1 及び q'_∞ はそれぞれ, q_0, q_1 及び q_∞ の無限近傍点である. 異なる添え字 i, j に対して $\check{L}_i \cdot \check{L}_j = \check{L}_i \cdot \hat{D}_j = \check{L}_i \cdot (\hat{D}_j + \hat{\Gamma}_j) = 0$ が成り立ち, 任意の添え字 k に対して

$$\check{L}_k \cdot \hat{D}_k = \check{L}_k \cdot (\hat{D}_k + \hat{\Gamma}_k) = \check{L}_k \cdot \hat{O}_1 = (\hat{D}_k + (\hat{D}_k + \hat{\Gamma}_k) + \hat{O}_1 + \check{L}_k)^2 = 1$$

が成り立つ. よって, $k = 0, 1$ 及び ∞ のそれぞれに対して, 3 点 o_0, q_k, q'_k は同一直線 L_k 上にあり, L_k の μ による狭義逆像が $\check{L}_k$ に他ならない. $v = 0, v - u = 0$ 及び $u = 0$ のそれぞれが定義する射影 $\text{pr}_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を Δ_0, Δ_1 及び Δ_∞ とおき, 各々の η による狭義逆像を $\hat{\Delta}_0, \hat{\Delta}_1$ 及び $\hat{\Delta}_\infty$ で表す. $\hat{\Delta}_0 \sim \Delta - E_0, \hat{\Delta}_1 \sim \Delta - E_1$ 及び $\hat{\Delta}_\infty \sim \Delta - E_\infty$ である. 異なる添え字 i, j に対して $\hat{\Delta}_i \cdot \hat{D}_j = \hat{\Delta}_i \cdot \hat{D}_j = 0$ かつ $\hat{\Delta}_i \cdot (\hat{D}_j + \hat{\Gamma}_j) = 1$ が成り立ち, 任意の添え字 k に対して $\hat{\Delta}_k \cdot \hat{O}_1 = \hat{\Delta}_k \cdot \hat{D}_k = \hat{\Delta}_k \cdot (\hat{D}_k + \hat{\Gamma}_k) = 0$ かつ $(\hat{\Delta}_k)^2 = -1$ が成り立つ. よって, $\hat{\Delta}_0$ の μ による像は, 7 点 $q_0, q_1, q_\infty, q'_0, q'_1, q'_\infty$ 及び o_0 の内の 2 点 q_1 及び q_∞ を通る直線である. 同様に, $\hat{\Delta}_1$ の μ による像は, 7 点の内の 2 点 q_∞ 及び q_0 を通る直線であり, $\hat{\Delta}_\infty$ の μ による像は, 7 点の内の 2 点 q_0 及び q_1 を通る直線である. 特に, 3 直線 L_0, L_1 及び L_∞ は 1 点 o_0 で交わるが, 4 点 q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 の内のどの 3 点も同一直線上には無い. $\mathbf{P}^2$ の斉次座標を $(w_0 : w_1 : w_2)$ とおく. $\mathbf{P}^2$ の任意の異なる 4 点は, どの 3 点も同一直線上に無いならば, 座標変換によって 4 点 $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ 及び $(1 : 1 : 1)$ へ写す事ができる. したがって, $\mathbf{P}^2$ 上の点 q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 のそれぞれを $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ 及び $(1 : 1 : 1)$ と仮定しても一般性を失わない. このとき L_0, L_1 及び L_∞ の定義式はそれぞれ $w_2 - w_1 = 0, w_0 - w_2 = 0$ 及び $w_0 - w_1 = 0$ である. また, q'_0, q'_1 及び q'_∞ は, q_0, q_1 及び q_∞ の各点における L_0, L_1, L_∞ の接方向に対応する.

$\hat{B}_2 \cdot \hat{O}_1 = -1$ より, B_2 は O_1 を成分に含んでいる事が分かる. $B_1 = B_2 - O_1$ とおき, η による B_1 の狭義逆像を $\hat{B}_1$ で表す. したがって, $\hat{B}_1 \sim 5\Delta + 4\Gamma - 3E_0 - 3E_1 -$

$3E_\infty - 2E'_0 - 2E'_1 - 2E'_\infty$ である. B は被約であるから $\hat{B}_1$ は $\hat{O}_1, \hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$ 及び $\hat{\Gamma}_\infty$ のいずれも成分に含まない. $B_2 \cap \Gamma_0 = \{p_0\}$ より, $\hat{B}_1$ は $\hat{D}_0$ を成分に含まない. 同様にして, $\hat{B}_1$ は $\hat{D}_1$ も $\hat{D}_\infty$ も成分に含まない. 更に, $\hat{O}_1 \cdot \hat{B}_1 = 0$ かつ任意の添え字 k に対して $\hat{B}_1 \cdot \hat{D}_k = \hat{B}_1 \cdot \hat{\Gamma}_k = 0$ が成り立つ. 以上と $(\hat{B}_1)^2 = 1$ より, $\hat{B}_1$ の μ による像は q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 を通らない直線である. 実は, $|\hat{B}_1|$ が $\mu: \Sigma^b \rightarrow \mathbf{P}^2$ を引き起こす. さらに, 双有理写像 $\mu \circ \eta^{-1}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ 及び $\eta \circ \mu^{-1}: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を明白に書き下すことができる.

命題 5. $(w_0 : w_1 : w_2)$ を $\mathbf{P}^2$ の斉次座標, $(s : t, u : v)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の斉次座標とする. $w_2 - w_1 = 0, w_0 - w_2 = 0$ 及び $w_0 - w_1 = 0$ のそれぞれが定義する $\mathbf{P}^2$ 上の直線を L_0, L_1 及び L_∞ とおき,

$$w_0w_2 - w_2w_1 + w_1w_0 = 0, \quad w_1w_2 - w_2w_0 + w_0w_1 = 0, \quad w_2w_0 - w_0w_1 + w_1w_2 = 0$$

のそれぞれが定義する 2 次曲線を C_0, C_1, C_∞ とおく. $sv - tu = 0$ が定義する射影 $\text{pr}_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を O_1 とおき, Γ_0, Γ_1 及び Γ_∞ のそれぞれで $t = 0, t - s = 0$ 及び $s = 0$ が定義する射影 pr_1 のファイバーを表し,

$$sv^2 - 2suv + tu^2 = 0, \quad sv^2 - tu^2 = 0, \quad sv^2 - 2tuv + tu^2 = 0$$

が定義する射影 $\text{pr}_2: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断を D_0, D_1, D_∞ とおく. このとき 3 つの双次数 4, 5 の斉次多項式

$$w_0 = s(s-t)v(sv^2 - tu^2)(sv^2 - 2tuv + tu^2), \quad (2.2)$$

$$w_1 = st(u-v)(sv^2 - 2tuv + tu^2)(sv^2 - 2suv + tu^2), \quad (2.3)$$

$$w_2 = t(t-s)u(sv^2 - 2suv + tu^2)(sv^2 - tu^2) \quad (2.4)$$

で定義される有理写像 $\psi: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ は, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus (D_0 \cup D_1 \cup D_\infty \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_\infty \cup O_1)$ 上に制限すると $\mathbf{P}^2 \setminus (C_0 \cup C_1 \cup C_\infty \cup L_0 \cup L_1 \cup L_\infty)$ への同型写像を与える双有理写像である. 次の 2 本の 5 次斉次多項式と 2 本の 4 次斉次多項式

$$s = (w_0 - w_1)(w_2w_0 - w_0w_1 + w_1w_2)^2, \quad t = (w_2 - w_1)(w_0w_2 - w_2w_1 + w_1w_0)^2, \quad (2.5)$$

$$u = w_2(w_0 - w_1)(w_2w_0 - w_0w_1 + w_1w_2), \quad v = w_0(w_2 - w_1)(w_0w_2 - w_2w_1 + w_1w_0) \quad (2.6)$$

で定義される有理写像 $\varphi: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が ψ の逆写像である.

証明. $\mathbf{P}^2$ 上の 2 直線 L_∞, L_0 と 2 次曲線 C_∞ 及び C_0 のそれぞれの定義式へ (2.2), (2.3), (2.4) を代入すると

$$\begin{aligned} w_0 - w_1 &= s(sv^2 - 2tuv + tu^2)^2(sv - tu), & w_2 - w_1 &= t(sv^2 - 2suv + tu^2)^2(sv - tu), \\ w_2w_0 - w_0w_1 + w_1w_2 &= st(s-t)(sv^2 - 2suv + tu^2)^2(sv^2 - tu^2)^2(sv^2 - 2tuv + tu^2), \\ w_0w_2 - w_2w_1 + w_1w_0 &= -st(s-t)(sv^2 - 2suv + tu^2)(sv^2 - tu^2)^2(sv^2 - 2tuv + tu^2)^2. \end{aligned}$$

以上を (2.5) の各等式の右辺へ代入すると, (2.5) の第一式の右辺と第二式の右辺の共通因数は

$$(sv - tu)s^2(s - t)^2t^2(sv^2 - 2suv + tu^2)^4(sv^2 - tu^2)^4(sv^2 - 2tuv + tu^2)^4$$

であり, 比は $(s : t)$ である. 同様に (2.6) の各等式の右辺へ代入すると, 第一式の右辺と第二式の右辺の共通因数は

$$-(sv - tu)s^2(s - t)^2t^2(sv^2 - 2suv + tu^2)^3(sv^2 - tu^2)^3(sv^2 - 2tuv + tu^2)^3$$

であり, 比は $(u : v)$ である. よって, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus (D_0 \cup D_1 \cup D_\infty \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_\infty \cup O_1)$ 上に制限すると $\varphi \circ \psi$ は恒等写像である.

逆に, (2.5) 及び (2.6) のそれぞれで定義される s, t, u, v を (2.2), (2.3), (2.4) の各等式の右辺へ代入する事で, $\mathbf{P}^2 \setminus (C_0 \cup C_1 \cup C_\infty \cup L_0 \cup L_1 \cup L_\infty)$ 上に制限すると $\psi \circ \varphi$ は恒等写像である事が分かる. $\square$

定理 6. X は $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異有理曲面で, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は相対極小な種数 2 曲線束とする. さらに f は (V) 型の特異ファイバーを 3 本持つと仮定する. 相対標準写像 $\Phi_f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から自然に $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆が定まる. この分岐因子 B の定義方程式は, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ へ適当な座標変換を施す事で, 次のように表現できる. $(w_0 : w_1 : w_2)$ を $\mathbf{P}^2$ の斉次座標, $(s : t, u : v)$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の斉次座標, $\psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ を命題 5 の双有理写像とする. このとき $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$ をみたす $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ が存在して, 分岐因子 B は

$$st(t - s)(sv - tu)\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2) = 0 \quad (2.7)$$

で定義される.

逆に, $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$ をみたす任意の $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ に対して, 方程式 (2.7) が定める被約因子に沿って分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の有限 2 重被覆をとり, その特異点を標準的に解消する射の合成を $\varpi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とおけば, $\tilde{X}$ は有理的である. 更に, 第 1 射影 $\text{pr}_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して, 合成 $\text{pr}_1 \circ \varpi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ は種数 2 曲線束である. 相対極小モデルは 3 点 $(1 : 0)$, $(1 : 1)$, $(0 : 1)$ 上に (V) 型の特異ファイバーをもつ.

証明. 分岐因子 B が (2.7) で定義される必要性は, 命題 5 の前に議論した通りである. 有限 2 重被覆の基本的な計算と [3, 定理 3] から, 分岐因子 B が (2.7) で定義される事が, 定理 6 の後半のようにして構成される種数 2 曲線束が 3 点 $(1 : 0)$, $(1 : 1)$, $(0 : 1)$ 上に (V) 型の特異ファイバーをもつ為の十分条件である事が分かる. さらに, Castelnuovo の有理性判定法を用いて $\tilde{X}$ が有理曲面であることを確認できる. $\square$

系 7. $\mathbb{P}^1$ の斉次座標を $(s : t)$, $\mathbf{P}^2$ のそれを $(w_0 : w_1 : w_2)$ とおく. $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$ をみたす任意の $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ に対して,

$$(w_0 - w_1)(w_1 - w_2)(w_2 - w_0)(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2) = 0$$

で定義される四直線に沿って分岐する $\mathbf{P}^2$ の有限 2 重被覆をとり, その特異点を標準的に解消する射の合成を $\pi_2 : S_2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ とおく. $\mathbf{P}^2$ 上の点 $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ 及び $(1:1:1)$ のそれぞれを q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 で表す. o_0 の π_2 による引き戻し $2\bar{O}_2$ は 2 重の (-2) 曲線である.

$$s(w_2 - w_1)(w_0w_2 - w_2w_1 + w_1w_0)^2 - t(w_0 - w_1)(w_2w_0 - w_0w_1 + w_1w_2)^2 \quad (2.8)$$

が定める $\mathbf{P}^2$ 上の 5 次曲線のペンシルを π_2 で引き戻すと, $2\bar{O}_2$ を固定成分とする S_2 上のペンシルを得る. $2\bar{O}_2$ を差し引いたペンシルを Λ_2 とおく. q_0, q_1 及び q_∞ を π_2 で引き戻して得られる 3 点が Λ_2 の基点である. 3 点を中心とする S_2 のブローアップを X , Λ_2 に付随する有理写像の不確定を除去した射を $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ とおけば, 定理 6 のように $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ に対応して構成される有理曲面の相対極小な種数 2 曲線束に他ならない.

定理 2 の証明. $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $(x : y : z)$, $\mathbf{P}^3$ のそれを $(w_0 : w_1 : w_2 : w_3)$ とおく. $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$ をみたす任意の $(\alpha : \beta : \gamma) \in (\mathbf{P}^2)^*$ に対して,

$$w_0 = (x - y)xy - \gamma xz^2 - \beta yz^2, \quad (2.9)$$

$$w_1 = (x - y)xy - \gamma xz^2 + (\alpha + \gamma)yz^2, \quad (2.10)$$

$$w_2 = (x - y)xy + (\alpha + \beta)xz^2 - \beta yz^2, \quad (2.11)$$

$$w_3 = (\alpha + \beta + \gamma)z^3$$

が定める有理写像 $\psi_3 : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ を考察する. このとき

$$\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2 = (\alpha + \beta + \gamma)(x - y)xy,$$

$$w_2 - w_1 = (\alpha + \beta + \gamma)(x - y)z^2,$$

$$w_2 - w_0 = (\alpha + \beta + \gamma)xz^2,$$

$$w_1 - w_0 = (\alpha + \beta + \gamma)yz^2,$$

$$w_3 = (\alpha + \beta + \gamma)z^3$$

であるから $\mathbf{P}^3$ における $\mathbb{P}^2$ の像 S_3 は

$$(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)w_3^2 = (w_0 - w_1)(w_1 - w_2)(w_2 - w_0)$$

で定義される三次超曲面である. 点 $(0:0:0:1) \in S_3$ からの射影 $\mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ を S_3 に制限すると

$$w_3^2 = \frac{(w_0 - w_1)(w_1 - w_2)(w_2 - w_0)}{\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2}$$

をみたすから, $\mathbf{P}^2$ 上の四直線

$$(w_0 - w_1)(w_1 - w_2)(w_2 - w_0)(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2) = 0$$

上で分岐して、四直線の外では分岐しない二重被覆を誘引する．系 7 より、式 (2.8) へ (2.9), (2.10) 及び (2.11) を代入した後に z^2 を除すると、定理 2 のペンシルの定義式 (1.1) を得る． $\square$

命題 5 の前に紹介した μ 及び η と、命題 5 の ψ 及び φ について、 $\psi = \mu \circ \eta^{-1}$ かつ $\varphi = \eta \circ \mu^{-1}$ に他ならない． μ による $L_0, L_1, L_\infty, C_0, C_1$ 及び C_∞ のそれぞれの狭義逆像を $\check{L}_0, \check{L}_1, \check{L}_\infty, \check{C}_0, \check{C}_1$ 及び $\check{C}_\infty$ とおく． $\check{L}_0, \check{L}_1$ 及び $\check{L}_\infty$ は Σ^b 上の (-2) 曲線、 $\check{C}_0, \check{C}_1$ 及び $\check{C}_\infty$ は (-1) 曲線であり、異なる添え字 i, j に対して $\check{L}_i \cdot \check{L}_j = \check{L}_i \cdot \check{C}_j = \check{C}_i \cdot \check{C}_j = 0$ かつ $\check{L}_0 \cdot \check{C}_0 = \check{L}_1 \cdot \check{C}_1 = \check{L}_\infty \cdot \check{C}_\infty = 1$ が成り立つ．特に、 $\check{L}_0, \check{L}_1$ 及び $\check{L}_\infty$ は η で p_0, p_1 及び p_∞ に縮約され、 $\check{C}_0, \check{C}_1$ 及び $\check{C}_\infty$ は p'_0, p'_1 及び p'_∞ に縮約される．実は、 $k = 0, 1, \infty$ に対して $\check{C}_k = E'_k$ である． η による $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty, D_0, D_1, D_\infty$ 及び O_1 のそれぞれの狭義逆像を $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_\infty, \hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ とおく． $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1$ 及び $\hat{\Gamma}_\infty$ は Σ^b 上の (-2) 曲線、 $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ は (-1) 曲線であり、異なる添え字 i, j に対して $\hat{\Gamma}_i \cdot \hat{\Gamma}_j = \hat{\Gamma}_i \cdot \hat{D}_j = \hat{D}_i \cdot \hat{D}_j = 0$ が成り立ち、任意の添え字 k に対して $\hat{\Gamma}_k \cdot \hat{O}_1 = \hat{D}_k \cdot \hat{O}_1 = 0$ かつ $\hat{\Gamma}_k \cdot \hat{D}_k = 1$ が成り立つ．特に、 $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ は μ で q_0, q_1, q_∞ 及び o_0 に縮約され、 $\hat{D}_0, \hat{D}_1$ 及び $\hat{D}_\infty$ は q'_0, q'_1 及び q'_∞ に縮約される．

$\check{L}_0, \check{L}_1$ 及び $\check{L}_\infty$ のそれぞれと $\hat{O}_1$ の交点を p_2, p_3 及び p_4 とおく． $\check{L}_0, \check{L}_1$ 及び $\check{L}_\infty$ のそれぞれと $\hat{B}_1$ の交点を p_{125}, p_{136} 及び p_{147} とおく．6 点 $p_2, p_3, p_4, p_{125}, p_{136}$ 及び p_{147} でのブローアップを $\varsigma: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma^b$ とおく． ς によつて $p_2, p_3, p_4, p_{125}, p_{136}$ 及び p_{147} のそれぞれへ縮約される (-1) 曲線を $E_2, E_3, E_4, E_{125}, E_{136}$ 及び E_{147} とおく．全引き戻しに関しては、引き戻す前と同じ記号を用いることとする．例えば、 $\hat{\Gamma}_0$ は 6 点 $p_2, p_3, p_4, p_{125}, p_{136}$ 及び p_{147} のいずれも通らないので、 ς による $\hat{\Gamma}_0$ の $\tilde{\Sigma}$ への引き戻しも $\tilde{\Gamma}_0$ で表す． $\hat{B}_1$ の ς による狭義逆像 $\widetilde{B}_1$ は (-2) 曲線で、

$$\widetilde{B}_1 \sim 5\Delta + 4\Gamma - 3E_0 - 3E_1 - 3E_\infty - 2E'_0 - 2E'_1 - 2E'_\infty - E_{125} - E_{136} - E_{147}.$$

$\check{L}_0, \check{L}_1, \check{L}_\infty$ 及び $\hat{O}_1$ のそれぞれの ς による狭義逆像 $\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_\infty$ 及び $\widetilde{O}_1$ は (-4) 曲線で、

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_0 &\sim E_0 - E'_0 - E_2 - E_{125}, & \widetilde{L}_1 &\sim E_1 - E'_1 - E_3 - E_{136}, \\ \widetilde{L}_\infty &\sim E_\infty - E'_\infty - E_4 - E_{147}, & \widetilde{O}_1 &\sim \Delta + \Gamma - E_0 - E_1 - E_\infty - E_2 - E_3 - E_4. \end{aligned}$$

$\hat{\Gamma}_0 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_\infty + \widetilde{B}_1 + \widetilde{L}_0 + \widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_\infty + \widetilde{O}_1$ に沿つて分岐する有限 2 重被覆を $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ とおく．8 曲線 $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_\infty, \widetilde{B}_1, \widetilde{L}_0, \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_\infty$ 及び $\widetilde{O}_1$ の内のどの 2 曲線も互いに交わらないから、 $\tilde{X}$ は非特異である．実は、ピカル数 14 の有理曲面である． $\tilde{\pi}^*\hat{\Gamma}_0, \tilde{\pi}^*\hat{\Gamma}_1$ 及び $\tilde{\pi}^*\hat{\Gamma}_\infty$ はいずれも 2 重の (-1) 曲線であり、それぞれを $2e_{11}, 2e_{12}$ 及び $2e_{13}$ とおく． e_{11}, e_{12} 及び e_{13} を縮約する事で、相対極小な種数 2 曲線束 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ を得る．

$\check{C}_0, \check{C}_1$ 及び $\check{C}_\infty$ のそれぞれの ς による狭義逆像を $\widetilde{C}_0, \widetilde{C}_1$ 及び $\widetilde{C}_\infty$ で表す． $\check{C}_0$ が点 p_{125} を通るときは $\widetilde{C}_0 \sim \varsigma^*\check{C}_0 - E_{125}$ 、点 p_{125} を通らないときは $\widetilde{C}_0 = \varsigma^*\check{C}_0$ である．

$(\eta \circ \varsigma)^* \Gamma_0 = \hat{\Gamma}_0 + 2\varsigma^* \check{C}_0 + E_{125} + \widetilde{L}_0 + E_2$ に注意すると, $\check{C}_0$ が点 p_{125} を通らないならば, 点 $(1:0)$ 上の f のファイバーは $[5-\text{II}_{1-1}^*]$ 型である. さらに, このとき $\check{C}_0$ が $\hat{B}_1$ と接するか否かで, $[5-\text{II}_{1-1}^*(N)]$ 型と $[5-\text{II}_{1-1}^*(S)]$ 型に分かれる. 同様に, $\check{C}_k$ と $\hat{B}_1$ の交わり方から, (V) 型の特異ファイバーのより詳細な種類が判別できる. $(\mathbf{P}^2)^*$ における二次曲線 C_k と直線 $\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2 = 0$ の配置から, 条件式 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_\infty, \nu_0, \nu_1$ 及び ν_∞ を得る.

$\psi^*(\alpha w_0 + \beta w_1 + \gamma w_2)/u^5$ の v/u に関する判別式は

$$-256s^{10}(s-t)^{10}t^{10} \times \{\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3t^2 - (\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3 - \beta\nu_1^2\lambda_1^3 + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3)st + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3s^2\}.$$

さらに, $\{\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3t^2 - (\gamma\nu_\infty^2\lambda_\infty^3 - \beta\nu_1^2\lambda_1^3 + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3)st + \alpha\nu_0^2\lambda_0^3s^2\}/s^2$ の t/s に関する判別式は $\sigma\xi^2\zeta^3$ である. $\text{pr}_1 \circ \eta: \Sigma^b \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\hat{B}_1$ へ制限して Reimann-Hurwitz の公式を適用して, 定理 3 のように f の特異ファイバーの本数が分類される.

$(\mathbf{P}^2)^*$ において, 3 次曲線 $\xi = 0$ は直線 $\lambda_0 = 0$ と点 $(4:-1:-1)$ で接して点 $(0:1:-1)$ で横断的に交わる. 3 次曲線 $\zeta = 0$ も直線 $\lambda_0 = 0$ と点 $(4:-1:-1)$ で接して点 $(0:1:-1)$ で横断的に交わる. 2 直線 $\lambda_1 = 0$ 及び $\lambda_\infty = 0$ についても同様である. 以上とベズーの定理から, 3 次曲線 $\xi = 0$ と 3 次曲線 $\zeta = 0$ は 3 点 $(4:-1:-1)$, $(1:-4:1)$, $(1:1:-4)$ で接して, 3 点 $(0:1:-1)$, $(1:0:-1)$, $(1:-1:0)$ で横断的に交わる. 2 次曲線 $\nu_0 = 0$ と 3 次曲線 $\xi = 0$ は 3 点 $(4:-1:-1)$, $(1:0:-1)$, $(1:-1:0)$ で接する. 2 次曲線 $\nu_0 = 0$ と 3 次曲線 $\zeta = 0$ は 2 点 $(4:-1:-1)$, $(0:1:1)$ で接して, 2 点 $(1:0:-1)$, $(1:-1:0)$ で横断的に交わる. 2 次曲線 $\nu_1 = 0$ 及び $\nu_\infty = 0$ についても同様である. また, 直線 $\sigma = 0$ は 3 点 $(1:0:-1)$, $(1:-1:0)$, $(0:1:-1)$ を通る. 以上のような考察から, 定理 3 の II) 及び表 1 を得る.

注釈 8. $\mathbb{P}^2$ 上の点 $(0:0:1)$, $(1:1:0)$, $(0:1:0)$ 及び $(1:0:0)$ のそれぞれを P_1, P_2, P_3 及び P_4 とおく. 直線 $x-y=0$, $x=0$ 及び $y=0$ のそれぞれを ℓ_{125}, ℓ_{136} 及び ℓ_{147} で表す. 点 P_2 における直線 ℓ_{125} の傾きに対応する P_2 の無限近傍点を P_5 とおく. 同様に, P_3 及び P_4 の無限近傍点 P_6 及び P_7 は直線 ℓ_{136} 及び ℓ_{147} の傾きに対応させる. $f_0=0$, $f_1=0$ 及び $f_\infty=0$ のそれぞれが定義する 5 次曲線を Q_0, Q_1 及び Q_∞ で表す. P_5 のある無限近傍点 P_8 において, Q_1 と Q_∞ は 2 重点をもつ. Q_0 も P_8 を通るが, Q_0 は P_8 において非特異である. P_6 のある無限近傍点 P_9 において, Q_∞ と Q_0 は 2 重点をもつ. Q_1 も P_9 を通るが, Q_1 は P_9 において非特異である. P_7 のある無限近傍点 P_{10} において, Q_0 と Q_1 は 2 重点をもつ. Q_∞ も P_{10} を通るが, Q_∞ は P_{10} において非特異である. $(x-y)f_0 - \alpha(\alpha+2\beta+2\gamma)xyz^4 = 0$, $xf_1 + \beta(2\alpha+\beta+2\gamma)y(x-y)z^4 = 0$ 及び $yf_\infty - \gamma(2\alpha+2\beta+\gamma)x(x-y)z^4 = 0$ のそれぞれが定義する 6 次曲線を S_0, S_1 及び S_∞ とおく. S_0 の特異点は, 10 点 $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ の内で P_8 を除く 9 点において 2 重点をもつ. 同様に, S_1 の特異点は 10 点の中で P_9 を除く 9 点において 2 重点をもち, S_∞ のそれは P_{10} を除く 9 点において 2 重点をもつ. 式 (1.1) が定める平面 13 次曲線のペンシルの一般元は, P_1 で 5 重点, 9 点 $P_2, P_3, \dots, P_{10}$ で 4 重点をもち, 他の点においては

非特異である. 3 点 P_2, P_3, P_4 の内から 2 点を選び, この 2 点と P_1 を中心にクレモナ変換 τ を施せば, 式 (1.1) が定めるペンシルの像は再びまた 5 重点と九つの 4 重点をもつ平面 13 次曲線のペンシルを成す. 元のペンシルの基点, 10 点 $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ を中心とするブローアップを $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ で表せば, $\tau \circ v$ も $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の各ファイバーの像が平面 13 次曲線のペンシルとなる双有理射である (cf. 系 10).

注釈 9. $(\alpha: \beta: \gamma) = (4: -1: -1)$ のとき, [1-VIII-3] 型の特異ファイバーに対応して, Q_0 は P_2 において ℓ_{125} と 3 重に接する.

S_0, Q_0, ℓ_{125} の X への狭義引き戻しを $\hat{S}_0, \hat{Q}_0, \hat{\ell}_{125}$ とおく. $\lambda_0 \neq 0$ のとき, $\hat{S}_0$ と $\hat{\ell}_{125}$ は点 $(1: 0)$ 上の (V) 型の特異ファイバーの既約成分である. $\lambda_0 = 0$ のとき, $\hat{S}_0$ は可約であるが, $\hat{S}_0 = \hat{Q}_0 + \hat{\ell}_{125}$ と既約分解され, 点 $(1: 0)$ 上の (V) 型の特異ファイバーの既約成分が $\text{NS}(X)$ において生成する部分群は, λ_0 の値に依存しない. 以上のような議論と, 塩田 [8] によるモデル・ヴェイユ群の基本定理から, 定理 4 が従う.

系 10. X を非特異有理曲面, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を相対極小な種数 2 曲線束とする. f は $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 $(1: 0), (1: 1), (0: 1)$ の上に (V) 型の特異ファイバーをもつと仮定する. 定理 2 の式 (1.1) が定める平面 13 次曲線のペンシルを与える双有理射を $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ とおく. $\mathbb{P}^2$ 上の 10 点 $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ は注釈 8 の通りとする. 3 点 P_1, P_3 及び P_4 を中心とするクレモナ変換を $\tau_2: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{[2]}^2$ で表し, 3 点 P_1, P_2 及び P_4 を中心とするクレモナ変換を $\tau_3: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{[3]}^2$, 同じく 3 点 P_1, P_2 及び P_3 を中心とする其れを $\tau_4: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{[4]}^2$ とおく. このとき, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の各ファイバーの像が平面 13 次曲線のペンシルを成すような X から射影平面への双有理射は, $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ 及び $i = 2, 3, 4$ に対して定まる $\tau_i \circ v: X \rightarrow \mathbb{P}_{[i]}^2$ の丁度 4 種類である.

証明. 定理 1 より, 平面 13 次曲線のペンシルを成すような X から射影平面への双有理射は, 10 本の (-1) 曲線を縮約する. そして, 10 本の内で 9 本の (-1) 曲線は f のファイバーと 4 点で交わり, 対応するペンシルの 9 個の基点で F の像は 4 重点をもつ. $v: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ によって点 P_i へ縮約される (-1) 曲線の X への全引き戻しを e_i で表し, $\mathbb{P}^2$ 上の直線の全引き戻しを ℓ とおく. $F \sim -4K_X + (\ell - e_1)$ であるから, f のファイバーと 4 点で交わる (-1) 曲線は, $|\ell - e_1|$ に付随する線織構造 $\Phi_{|\ell - e_1|}$ の退化ファイバーの既約成分である. 退化ファイバーは $(\ell - e_1 - e_2 - e_5) + (e_2 - e_5) + 2(e_5 - e_8) + 2e_8, (\ell - e_1 - e_3 - e_6) + (e_3 - e_6) + 2(e_6 - e_9) + 2e_9, (\ell - e_1 - e_4 - e_7) + (e_4 - e_7) + 2(e_7 - e_{10}) + 2e_{10}$ の 3 本で, 双対グラフは D_{3+1} 型である ([5, 系 2.3]). 退化ファイバーの既約成分の配置から, 目的の双有理射は 6 本の (-1) 曲線 $e_{10}, e_9, \dots, e_5$ を必ず縮約する. それら 6 本の (-1) 曲線を縮約する双有理射を $v_6: X \rightarrow X_6$ とおく. v_6 による $(\ell - e_1 - e_2) + e_2, (\ell - e_1 - e_3) + e_3, (\ell - e_1 - e_4) + e_4$ の像が $\Phi_{|v_6(\ell - e_1)|}: X_6 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の退化ファイバーを形成する. 目的の双有理射を得る為には更に, 残る各退化ファイバーの 2 つの成分の内で片一方ずつを選んで, 3 本の (-1) 曲線を縮約する必要がある. 以上 9 本の (-1) 曲線を縮約した後は, $\Phi_{|\ell - e_1|}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の相対極小モデル $\Sigma_d = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ が得られる.

Σ_1 に辿り着くような 3 本の適当な (-1) 曲線を見つけない。以降、地道に場合分けして確かめる。

$v_6 : X \rightarrow X_6$ の後に e_2, e_3, e_4 の像は、互いに交わらない 3 本の (-1) 曲線を成す。これら 3 本の (-1) 曲線を縮約すると、 e_1 の像が極小切断である $\Phi_{|\ell-e_1|}$ の相対極小モデル Σ_1 を得る。したがって、 X から射影平面への双有理射は、9 本の (-1) 曲線 $e_{10}, e_9, \dots, e_2$ を縮約するならば、 $v : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ に他ならない。

3 本の (-1) 曲線 e_2, e_3, e_4 の内で丁度 2 本の (-1) 曲線を縮約する場合に着目する。例えば、 e_2 と e_3 を縮約するとき、目的の双有理射を得る為には $\ell - e_1 - e_4 - e_7$ を縮約する事が必要である。このとき f の (-2) 切断 $(O) \sim \ell - e_2 - e_3 - e_4$ 及び e_1 の像が極小切断であるような $\Phi_{|\ell-e_1|}$ の相対極小モデル Σ_0 を得る。 e_3 または e_2 の一方のみを縮約しないときも同様である。したがって、 X から射影平面への双有理射は、3 本の (-1) 曲線 e_2, e_3, e_4 の内で丁度 2 本の (-1) 曲線を縮約する⁴ ならば、 F の像の次数は 14 以上である。

3 本の (-1) 曲線 e_2, e_3, e_4 の内で丁度 1 本の (-1) 曲線を縮約する場合に着目する。例えば、 e_2 を縮約するとき、目的の双有理射を得る為には、 $\ell - e_1 - e_3 - e_6$ と $\ell - e_1 - e_4 - e_7$ を縮約する事が必要である。このとき (O) の像が極小切断であるような $\Phi_{|\ell-e_1|}$ の相対極小モデル Σ_1 を得る。さらに極小切断を縮約する事で、 X から射影平面への双有理射が得られる。この双有理射は v と比較すると、 e_1, e_3 及び e_4 の代わりに $(O), \ell - e_1 - e_3 - e_6$ 及び $\ell - e_1 - e_4 - e_7$ を縮約しているから、 $\tau_2 \circ v : X \rightarrow \mathbf{P}_{[2]}^2$ に他ならない。このとき、 $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の各ファイバーの像が平面 13 次曲線のペンシルを成す事が、交点数の計算から分かる。 e_3 及び e_4 のそれぞれを縮約するときも同様に、双有理射 $\tau_3 \circ v : X \rightarrow \mathbf{P}_{[3]}^2$ 及び $\tau_4 \circ v : X \rightarrow \mathbf{P}_{[4]}^2$ を得て、いずれも $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の各ファイバーの像は平面 13 次曲線のペンシルを成す。

3 本の (-1) 曲線 e_2, e_3, e_4 のいずれも縮約しない場合に着目する。目的の双有理射を得る為には、 $\ell - e_1 - e_2 - e_5, \ell - e_1 - e_3 - e_6, \ell - e_1 - e_4 - e_7$ を縮約する事が必要である。このとき (O) の像が極小切断であるような $\Phi_{|\ell-e_1|}$ の相対極小モデル Σ_2 を得る。したがって、 F の像が平面 13 次曲線となるような X から射影平面への双有理射は、この場合は存在しない。□

参考文献

- [1] A. CALABRI AND C. CILIBERTO, Birational classification of curves on rational surfaces. Nagoya Math. J. **199**, pp. 43–93 (2010)

⁴そのような双有理射は存在しないかも知れない。つまり、3 本の (-1) 曲線の中で少なくとも 2 本の (-1) 曲線を縮約する射影平面への双有理射は、必ず 3 本の (-1) 曲線を縮約するかも知れない。実際に示すのは難しそう。

- [2] M. DE FRANCHIS, Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **13** pp. 1–27 (1899)
- [3] E. HORIKAWA, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2. in *Complex Analysis and Algebraic Geometry, a Volume Dedicated to Kodaira K.*, pp. 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, 1977.
- [4] S. KITAGAWA, Pencils of genus two curves on rational surfaces. preprint (2008)
- [5] S. KITAGAWA, Extremal hyperelliptic fibrations on rational surfaces. preprint (2010)
- [6] Y. NAMIKAWA, K. UENO: The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two, *Manuscripta Math.*, **9**, pp. 143–186 (1973)
- [7] T. SHIODA, On the Mordell-Weil lattices. *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39**, pp. 211–240 (1990)
- [8] T. SHIODA, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve. *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, pp. 359–373, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999

On the non-smoothness of Hilbert schemes of points for monomial plane curves

渡利 正弘 (津山工業高等専門学校)

1 点のヒルベルトスキーム

基礎体 k を標数 0 の代数閉体とする. 次のパラメータ表示で与えられる, 単項曲線 C を考える.

$$x = t^n, \quad y = t^m \quad (\gcd(n, m) = 1). \quad (1)$$

この曲線 C に対して,

$$\mathbf{H}_r := \{I \mid I \text{ は } k[t^n, t^m] \text{ のイデアルで } \dim_k k[t^n, t^m] = r\}$$

を r 点のヒルベルトスキームと呼ぶ. この $\mathbf{H}_r$ の特異点の有無を調べたい. なぜこのようなことを考えるのか、以下で説明する.

X を準代数多様体とする. r 次対称群 S_r に対して

$$X^{(r)} := X^r / \mathbf{S}_r$$

を X の r 重対称積という. またこのような X に対して r 点のヒルベルトスキーム $\mathbf{H}_r$ を定義することができ, $\mathbf{H}_r$ と r 重対称積 $X^{(r)}$ の間にはヒルベルト・チャウ射と呼ばれる射

$$\varphi_r : \mathbf{H}_r \rightarrow X^{(r)}$$

が自然に存在する.

点のヒルベルトスキームと r 重対称積に関して、以下の事実が知られている.

定理 1 (Fogarty, [1]). X を連結な非特異曲面とし, X に付随する r 点のヒルベルトスキーム $\mathbf{H}_r$ は連結で非特異である.

定理 2. (i) X が非特異な曲線な場合, r 重対称積 $X^{(r)}$ は非特異で次元が n の代数多様体である.
(ii) X が非特異で $\dim X \geq 2$ であれば, $X^{(r)}$ は特異点を持つ.

定理 1, 定理 2 の (i) より, 次が成り立つ.

系 3. 非特異曲面 X に対して, ヒルベルト・チャウ射 φ_r は $X^{(r)}$ の特異点解消を与える.

X が特異点を持つ曲線の場合に、“ $\mathbf{H}_r$ が非特異ならば, r 重対称積 $X^{(r)}$ の特異点解消が得られるのではないか?” というのが今回の出発点であった. このことに関して, 津山シンポジウムでは $k[t^2, t^3]$ に付随する $\mathbf{H}_2$ について発表した. その後の研究で, 以下のことを示すことができた.

定理 4. 任意の単項曲線 $X = \operatorname{Spec} k[t^n, t^m]$ に対して, $\mathbf{H}_r$ は特異点を持つ.

証明は Haiman ([2]) による $X = \operatorname{Spec} k[x, y]$ に対しての $\mathbf{H}_r$ が非特異であることの証明と同様の議論を用いる.

参考文献

- [1] J. Fogarty, “Algebraic families on an Algebraic Surface”, Amer. Jour. of Math. **13**, No 2, 511-521, (1968).
- [2] M. Haiman, “ t, q -Catalan numbers and Hilbert scheme”, Discrete Math. **193**, No 2, 201-214, (1998).

線織面 X 上の $\sharp$ 極小曲線 C の分類

松田 修 (津山高専)

1 はじめに

X を不正則数 $q(X) \geq 1$ の極小な線織面で、 C を S 上の既約曲線とする． X は $\mathbf{P}^1$ バンドルの構造を持つ．このとき、 $\mathbf{P}^1$ バンドル $X \rightarrow B$ での底曲線 B の種数 $g(B)$ は $q(X)$ に一致する．また、 $\mathbf{P}^1$ バンドル $X \rightarrow B$ の切断 Γ の中には自交点数 Γ^2 が最小となるものが存在し、それを Γ_∞ で表す．ここで、 $b = -\Gamma_\infty$ を X の次数と呼んで、 $\deg X = b$ と書く． $b \geq -q$ である． X 上の既約曲線 C を考えると、 $C \equiv \sigma\Gamma_\infty + eF_u$ なる数値的關係がある．ここで、 F_u は $\mathbf{P}^1$ バンドル $\Phi: X \rightarrow B$ の一般ファイバーである． (σ, e) を C の次数という． C の次数 (σ, e) と C の特異点の最大重複度 ν_1 を用い、不等式 $\sigma \geq 2\nu_1$ を満たす対 (X, C) を $\sharp$ 極小対と呼び、 $(X_\sharp, C_\sharp)$ と書く [I]．また単に $C_\sharp$ を $\sharp$ 極小曲線という．

$\tilde{b} = 2e - \sigma b$ とおく． C は既約であるので、 $\tilde{b} \geq 0$ である．対 (X, C) と (X_1, C_1) が C 上の点を中心とするいくつかの基本変換によって移りあうとき、 $(X, C) \stackrel{e.t.}{\sim} (X_1, C_1)$ と書く．特に、 $\sharp$ 極小対 $(X_\sharp, C_\sharp)$ の $\tilde{b}$ を $\tilde{b}_\sharp$ とすると、 $\tilde{b}_\sharp = \min\{\tilde{b} \mid (X, C) \stackrel{e.t.}{\sim} (X_\sharp, C_\sharp)\}$ である [Ma2]．

$\sharp$ 極小対 $(X_\sharp, C_\sharp)$ について、 $C_\sharp$ の ν 重点以上の特異点を最短で解消して得られる曲線を D_ν 、曲面を S_ν とすると、対 (S_ν, D_ν) が得られる．ここで、 $P_{m,a}[D_\nu]$ ($m \geq a \geq 1$) を、完備線形系 $|mK_\nu + aD_\nu|$ の次元とする．すなわち、 $P_{m,a}[D_\nu] = \dim|mK_\nu + aD_\nu| + 1$ を定義する． K_ν は S_ν の標準因子である．

ところで、 S を不正則数 $q(X) \geq 1$ の非特異線織面、 D を S 上の非特異代数曲線とすると、 $P_{m,a}[D] = \dim|mK_S + aD| + 1$ は対の双有理不変量である．また、 $\kappa(S, K_S + D)$ も双有理不変量であり、これを $\kappa[D]$ と書く．さらに、アルバネーゼ写像 $\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ から得られる $\alpha: S \rightarrow \alpha(S)$ を考えると、 $B = \alpha(S)$ は $g(B) = q(S)$ を持つ非特異代数曲線であり、 $\alpha: S \rightarrow \alpha(S)$ の一般ファイバー F と D との交点数 $D.F$ を $\sigma(D)$ と置くと、これも双有理不変量である． (S, D) の分類に関しては、 (S, D) が相対的対が重要である．それは、 D と任意の (-1) 曲線 E との交点数 $D.E$ が 2 以上であるものと定義される [I1]．そして、 $\kappa[D] \geq 0$ である相対的対 (S, D) に関して、 $\sigma \geq 2$ である $\sharp$ 極小対 $(X_\sharp, C_\sharp)$ が存在し、 (S, D) は $C_\sharp$ の特異点の最小非特異化から得られる [Ma]．このとき、 $\sigma(D) = \sigma$ でもある．

さて、アティヤー [At] や諏訪 [Sw] の研究結果を使うことで、 $\kappa[D] \leq 1$ の対 (S, D) 構造は詳細に調べられた [Ma]．また、 C の最小非特異化から得られる対 (S, D) が $\kappa[D] = 2$ であるならば $\sigma(D) \geq 3$ である．このとき、 $\sigma(D) = 3$ であることと $P_{2,1}[D] = 0$ は同値である [Ma2]．

本論文では、 $\sigma \geq 4$ である $\sharp$ 極小対 $(X_\sharp, C_\sharp)$ を $P_{m,a}[D_\nu]$ で研究する．主定理は以下のとおりである．

主定理. $\nu \geq 2$ である自然数 ν を固定する. $\sigma \geq 2\nu$ ならば, 以下の (1),(2),(3) が成り立つ.

- (1) $(\nu K_\nu + D_\nu)^2 \geq 0$. 特に, $(\nu K_\nu + D_\nu)^2 \iff \sigma = 2\nu$.
- (2) $\sigma \geq 2\nu + 1$ とする. このとき, $\sigma = 2\nu + 1 \iff P_{\nu+1,1}[D_\nu] = 0$.
- (3) $\sigma \geq 2\nu + 2$ ならば, $P_{\nu,1}[D_\nu] \leq 3P_{\nu+1,1}[D_\nu] - 6\bar{q}$. 等号は $\sigma = 2\nu + 2$ かつ $\nu_1 \leq \nu$ に限る. ここで, $\bar{q} = q(X) - 1$ である.

2 $P_{\nu+1,1}[D_\nu]$ の公式

以下において, $\nu \geq 2$ である自然数 ν を固定し, $\sigma \geq 2\nu$ をつねに仮定する.

命題 1. $|\sigma K_\nu + 2D_\nu| \neq \emptyset$.

[証明] [Ma] において $|\sigma K_S + 2D| \neq \emptyset$ が示されており, それより得られる. (証明終)

命題 2. (S_ν, D_ν) は, S_ν 上の任意の (-1) 曲線 E に対して $D_\nu \cdot E \geq \sigma/2$ となる.

[証明] E を S_ν 上の任意の (-1) 曲線とすると, $E \neq D_\nu$ であるので, $(\sigma K_\nu + 2D_\nu) \cdot E = -\sigma + 2D_\nu \cdot E \geq 0$ である. したがって, $D_\nu \cdot E \geq \sigma/2$. (証明終)

命題 3. $\sigma \geq 2\nu \geq 2n$ をもつ D_ν と自然数 n について, $2n\bar{g}_\nu \geq (n-1)D_\nu^2$ が成り立つ. ここで, $\bar{g}_\nu = (K_\nu + D_\nu) \cdot D_\nu / 2$ である.

[証明] $n = 1$ のときは明らかなので, $n \geq 2$ とする. $|\sigma K_\nu + 2D_\nu| \neq \emptyset$ より, $(\sigma K_\nu + 2D_\nu) \cdot D_\nu \geq 0$ である. したがって, $2\sigma\bar{g}_\nu \geq (\sigma-2)D_\nu^2$. これより,

$$2\bar{g}_\nu \geq \frac{\sigma-2}{\sigma} D_\nu^2 \geq \frac{2n-2}{n} D_\nu^2.$$

したがって, 証明された. (証明終)

命題 4. 命題 3 と同じ仮定のもとで, $nK_\nu + D_\nu$ はネフである.

[証明] $(nK_\nu + D_\nu) \cdot A < 0$ となる既約曲線が存在したと仮定しよう. もし, $A = D_\nu$ であるならば, 命題 2 より, $(nK_\nu + D_\nu) \cdot D_\nu = 2n\bar{g}_\nu - (n-1)D_\nu^2 \geq 0$ であるので, 仮定に矛盾する. $D \neq A$ とする. このとき, $D \cdot A \geq 0$ である. F を $|\sigma K_\nu + 2D_\nu|$ からとる. このとき, $\sigma((n+1)K_\nu + D_\nu) \sim (n+1)F + (\sigma-4)D_\nu$ である. したがって, $A \cdot F < 0$, そして $A^2 < 0$ を得る. $(nK_\nu + D_\nu) \cdot A < 0$ より, $nK_\nu \cdot A < -D_\nu \cdot A \leq 0$ である. よって, A は (-1) 曲線であり, $D_\nu \cdot A \leq n-1$ である. ところが, この結果は命題 2 の不等式 $D_\nu \cdot A \geq \sigma/2 \geq n$ に矛盾する. (証明終)

命題 5. $\nu K_\nu + D_\nu$ がビッグならば

$$P_{\nu+1,1}[D_\nu] = h^0((\nu+1)K_\nu + D_\nu) = \frac{((\nu+1)K_\nu + D_\nu)(\nu K_\nu + D_\nu)}{2} - \bar{q}$$

[証明] $\nu K_\nu + D_\nu$ がネフでビッグであることから, 消滅定理より, $h^1((\nu+1)K_\nu + D_\nu) = h^1(-(\nu K_\nu + D_\nu)) = 0$, $h^2((\nu+1)K_\nu + D_\nu) = h^0(-(\nu K_\nu + D_\nu)) = 0$ である. したがって, リーマン・ロッホの定理より, 命題 5 が成り立つ. (証明終)

$(X_{\sharp}, C_{\sharp})$ を $\sigma \geq 4$ である $\sharp$ 極小対とし, (S_{ν}, D_{ν}) を $C_{\sharp}$ の ν 重点以上の特異点の最短解消 $\mu: S_{\nu} \rightarrow X_{\sharp}$ から得られる対とする. このとき,

$$K_{\nu} \sim \mu^*(K_0) + \sum_{\nu_j \geq \nu} E_j,$$

$$D_{\nu} \sim \mu^*(C_{\sharp}) + \sum_{\nu_j \geq \nu} \nu_j E_j$$

である. ここで, $\sim$ は線形同値を意味し, プルバックの記号はすべて省略した. E_j は (-1) 曲線である. また, K_0 は $X_{\sharp}$ の標準因子であり, $K_0 \equiv -2\Gamma_{\infty} - (b - 2\bar{q})F_u$ である. したがって,

$$\nu K_{\nu} + D_{\nu} \equiv (\sigma - 2\nu)\Gamma_{\infty} + (e - \nu b + 2\nu\bar{q})F_u - \sum_{\nu_j \geq \nu} (\nu_j - \nu)E_j. \quad (2.1)$$

命題 6. $\nu K_{\nu} + D_{\nu}$ がビッグならば,

$$2P_{\nu+1,1}[D_{\nu}] = (\sigma - 2\nu - 1)(\tilde{b}_{\sharp} + (4\nu + 2)\bar{q}) - \sum_{\nu_j \geq \nu} (\nu_j - \nu - 1)(\nu_j - \nu). \quad (2.2)$$

[証明] 命題 5 と (2.1) より示される. (証明終)

命題 7. $\sigma \geq 4$ ならば, 以下の (1),(2),(3) が成り立つ.

- (1) $(2K_2 + D_2)^2 \geq 0$. 特に, $(2K_2 + D_2)^2 \iff \sigma = 4$.
- (2) $\sigma \geq 5$ とする. このとき, $\sigma = 5 \iff P_{3,1}[D_2] = 0$.
- (3) $\sigma \geq 6$ ならば, $P_{2,1}[D_2] \leq 3P_{3,1}[D_2] - 6\bar{q}$. 等号は $\sigma = 6$ かつ $\nu_1 \leq 2$ に限る.

[証明] [Ma3] を見よ. (証明終)

3 主定理の証明

主定理を数学的帰納法で証明しよう. $\nu = 2$ のときは, 命題 7 より成り立つ. $\nu \geq 3$ の場合において, ν まで成立していると仮定する.

まず (1) を示す. $\nu' = \nu + 1$ とする. 帰納法の仮定より, $\sigma \geq 2\nu' = 2\nu + 2$ のとき, $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] > 0$, すなわち, $|\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}| \neq \phi$ である. さらに, 命題 4 より, $\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}$ はネフである. したがって, $(\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'})^2 \geq 0$ である. 一方,

$$\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'} \equiv (\sigma - 2\nu')\Gamma_{\infty} + (e - \nu'b + 2\nu'\bar{q})F_u - \sum_{\nu_j \geq \nu'} (\nu_j - \nu')E_j \quad (3.1)$$

であることから,

$$(\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'})^2 = (\sigma - 2\nu')(\tilde{b}_{\sharp} + 4\nu'\bar{q}) - \sum_{\nu_j \geq \nu'} (\nu_j - \nu')^2 \quad (3.2)$$

が得られる. これより, $\sigma = 2\nu'$ であれば $(\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'})^2 = 0$ である. 逆に, $(\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'})^2 = 0$ を仮定しよう.

$$|(\nu' - 1)(\sigma K_{\nu'} + 2D_{\nu'})| = |(\sigma - 2)(\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}) - (\sigma - 2\nu')(K_{\nu'} + D_{\nu'})| \neq \phi$$

であることと $\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}$ がネフであることから,

$$0 \leq (\nu' - 1)(\sigma K_{\nu'} + 2D_{\nu'}) \cdot (\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}) = -(\sigma - 2\nu')(K_{\nu'} + D_{\nu'}) \cdot (\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}) \leq 0$$

を得る. もし, $(K_{\nu'} + D_{\nu'}) \cdot (\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}) = 0$ であれば, $K_{\nu'} + D_{\nu'}$ はネフかつビッグであるので, ホッジの指数定理より $\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'} \equiv 0$ である. よって, $(\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}) \cdot E_j = (\nu_j - \nu') = 0$ より $\nu_j \leq \nu'$ である. したがって, (3.2) より $\sigma = 2\nu'$ である.

次に (3) を示す. $\sigma \geq 2\nu' + 2$ は $\sigma \geq 2\nu + 4 > 2\nu + 2$ でもあるので, 帰納法の仮定により $\nu'K_{\nu'} + D_{\nu'}$ はネフでビッグである. したがって, 命題 6 より,

$$\begin{aligned} & P_{\nu',1}[D_{\nu'}] + P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] \\ &= (\sigma - 2\nu')(\tilde{b}_{\sharp} + 4\nu'\bar{q}) - 2\bar{q} - \sum_{\nu_j \geq \nu'} (\nu_j - \nu' - 1)^2 \\ &= (\sigma - 2\nu')(\tilde{b}_{\sharp} + (4\nu' + 2)\bar{q}) - 2(\sigma - 2\nu' + 1)\bar{q} - \sum_{\nu_j \geq \nu'} (\nu_j - \nu' - 1)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

再び命題 6 の等式 (2.2) より,

$$\begin{aligned} P_{\nu',1}[D_{\nu'}] &= (\sigma - 2\nu') \left\{ \frac{2P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] + \sum_{\nu_j \geq \nu'} (\nu_j - \nu' - 1)(\nu_j - \nu')}{\sigma - 2\nu' - 1} \right\} \\ &\quad - 2(\sigma - 2\nu' + 1)\bar{q} - \sum_{\nu_j \geq \nu'} (\nu_j - \nu' - 1)^2 \\ &= \left(\frac{\sigma - 2\nu' + 1}{\sigma - 2\nu' - 1} \right) P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] - 2(\sigma - 2\nu' + 1)\bar{q} \\ &\quad - \frac{\sum_{\nu_j \geq \nu'} (\sigma - \nu_j - \nu')(\nu_j - \nu')}{\sigma - 2\nu' - 1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\sigma \geq 2\nu' + 2$ と $\sharp$ -極小条件 $\sigma \geq 2\nu_1$ より

$$P_{\nu',1}[D_{\nu'}] \leq 3P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] - 6\bar{q} \quad (3.5)$$

が示された. 特に (3.4) より, $\sigma = 2\nu' + 2$ かつ $\nu_1 \leq \nu'$ であれば $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] = 3P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] - 6\bar{q}$ である. 逆に, $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] = 3P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] - 6\bar{q}$ を仮定する. このとき, (3.4) より $\nu_j \leq \nu'$ である. もし $\sigma \geq 2\nu' + 3$ であれば, (3.4) より, $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] \leq 2P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] - 8\bar{q}$ であるので, $P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] \leq -2\bar{q}$ となり, $P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] = 0$ を得る. よって, (3.4) より $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] = 0$ であるが, これは $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] > 0$ に反する. したがって $\sigma = 2\nu' + 2$ である. これで (3) が示された.

最後に, (2) を示す. $\sigma \geq 2\nu' + 1$ の場合の帰納法の仮定は, $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] > 0$ であることに注意する. $P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] = 0$ を仮定する. もし, $\sigma > 2\nu' + 1$ であるならば, (3) より $P_{\nu',1}[D] = 0$ となり, 帰納法の仮定 $P_{\nu',1}[D_{\nu'}] > 0$ に反する. したがって $\sigma = 2\nu' + 1$ である. 逆に, $\sigma = 2\nu' + 1$ を仮定すると, $\sharp$ -極小条件 $\sigma \geq 2\nu_1$ より, $\nu_1 \leq \nu'$ であり, 等式 (2.2) より $P_{\nu'+1,1}[D_{\nu'}] = 0$ である. これで (2) は証明された.

参考文献

- [At] Atiyah, M.F., Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc. (3)VII27(1957), 414-452.
- [I1] Iitaka, S., Birational Geometry of Plane Curves, Tokyo J. Math 22 (1999), no 2, 289-321.
- [Ma] Matsuda, O., Birational classification of curves on irrational ruled surfaces, Tokyo Journal of Mathematics vol 25, No 1, pp.139-151 (2002).
- [Ma2] Matsuda, O., 線織面 S 曲線 D の対のある極小性について, 目白セミナー 2010, pp.71-76 (2011).
- [Ma3] Matsuda, O., 線織面 S 上の曲線 D の混合多種数による分類, 射影多様体の幾何とその周辺 2012, (掲載予定) .
- [Sw] Suwa, T., On ruled surfaces of genus 1, J. Math. Soc. Japan, Vol.21, No2, 1969, 291-311.

Present Address:

Osamu Matsuda

Tsuyama National College of Technology

624-1, Numa, Tsuyama-City, Okayama, Japan, 708-8509

e-mail : matsuda@tsuyama-ct.ac.jp

On cyclic coverings of the projective line which are trigonal curves

Nan Wangyu
(Joint work with Fumio Sakai)

Saitama University

December 25, 2012
At Gakushuin University

1 / 36

Definition of Gonality

- Let C be an irreducible curve on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.
- Every nonconstant rational function φ on C associates a holomorphic surjective map $\tilde{\varphi} : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, where $\tilde{C}$ is the normalization of C , and we have $\deg \varphi = \deg \tilde{\varphi}$.
- In this talk, the term "rational function" always means nonconstant rational function.
- The minimum degree of rational functions on C is called the **gonality** of C and is denoted by $\text{Gon}(C)$.
- That is,

$$\text{Gon}(C) := \min\{\deg \varphi \mid \text{rational function } \varphi \text{ on } C\}.$$
- This is a birational invariant of plane curves.

3 / 36

§1 Introduction and Main Result

2 / 36

Some Known Results

- Let d be the degree of C and P be the point on C with the maximal multiplicity ν .
- Considering the projection from P to a line in general position, we have $\text{Gon}(C) \leq d - \nu$.
- M. Namba proved that in the case that C is smooth, then we have $\text{Gon}(C) = d - \nu = d - 1$. Furthermore if $d \geq 3$, then any rational function φ on C with degree $d - 1$ is a projection from a point on C to $\mathbb{P}^1$.
- Coppens and Kato [1990–1991], as well as Ohkouchi and Sakai [2004], gave some sufficient conditions for $\text{Gon}(C) = d - \nu$ for the singular case.
- Let g be the genus of C , then another well-known upper bound of gonality is $\text{Gon}(C) \leq (g + 3)/2$.

4 / 36

Some Known Results

- Today, the following result will be used

Theorem (Namba [1])

If there is a rational function ψ with degree r on C and r is prime, then for any integer n with $n \not\equiv 0 \pmod{r}$ and $(r-1)(n-1) \leq g-1$, there does not exist rational functions with degree n on C . In particular, if $(r-1)(r-2) \leq g-1$, then we have $\text{Gon}(C) = r$.

[1] M. Namba, Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 767, Springer, Berlin, 1979, xii+284 pp.

5 / 36

Cyclic Coverings of $\mathbb{P}^1$ with 3 Branch Points

- Easy to see, by a birational transformation, we can rearrange the order of (a_0, a_1, a_∞) .

- Moreover, for a positive integer k such that $p \nmid k$ we write

$$ka_0 = up + b_0, \quad ka_1 = vp + b_1,$$

for some positive integers u, v, b_0, b_1 .

- Then from the origin curve $y^p = x^{a_0}(x-1)^{a_1}$, we get

$$y^{kp} = x^{ka_0}(x-1)^{ka_1} = x^{up+b_0}(x-1)^{vp+b_1}, \\ = \{x^u(x-1)^v\}^p x^{b_0}(x-1)^{b_1}.$$

- That is, $\left(\frac{y}{x^u(x-1)^v}\right)^p = x^{b_0}(x-1)^{b_1}$.

- Hence, the original curve is birational to

$$Y^p = X^{b_0}(X-1)^{b_1}.$$

7 / 36

Definition of Trigonal Curve

- $\text{Gon}(C) = 1 \Leftrightarrow C$ is a rational curve $\Leftrightarrow g = 0$.
- $\text{Gon}(C) = 2 \Leftrightarrow C$ is elliptic (when $g = 1$) or hyperelliptic (when $g \geq 2$).
- We call C a **trigonal** curve if $\text{Gon}(C) = 3$.
- Today let us consider the following question: for a prime number p , when is a p -cyclic covering of $\mathbb{P}^1$ with 3 branch points trigonal?
- Such a curve can be written as

$$y^p = x^{a_0}(x-1)^{a_1},$$
 where $p \nmid a_0, a_1$ or $a_0 + a_1$.
- And we write $a_\infty = \min\{a > 0 \mid a_0 + a_1 + a \equiv 0 \pmod{p}\}$.

6 / 36

Cyclic Coverings of $\mathbb{P}^1$ with 3 Branch Points

- To sum up, we obtain a sufficient condition for p -cyclic coverings of $\mathbb{P}^1$ with 3 branch points being birational:

Lemma

For a prime number p , the two curves

$$y^p = x^{a_0}(x-1)^{a_1}, \quad (p \nmid a_0, a_1, a_0 + a_1)$$

$$y^p = x^{b_0}(x-1)^{b_1}, \quad (p \nmid b_0, b_1, b_0 + b_1)$$

are birational to each other if there is a positive integer k such that $p \nmid k$ and

$$\{ka_0, ka_1, ka_\infty\} \equiv \{b_0, b_1, b_\infty\} \pmod{p}$$

as non-ordered sets.

- In fact, this condition is also necessary (see Nakajo [2]).

[2] N. Nakajo, On the equivalence problem of cyclic branch coverings of the Riemann sphere, Kyushu J. Math. 53 (1999), no.1, 127–131.

8 / 36

Cyclic Coverings of $\mathbb{P}^1$ with 3 Branch Points

- In particular, any p -cyclic covering of $\mathbb{P}^1$ with 3 branch points is birational to a curve with for

$$y^p = x(x-1)^a, \quad p \geq 2a+1, \quad (\times)$$

which will be denoted as $C_{p;a}$.

9 / 36

Trigonal Case (Main Result)

Main Theorem

For a prime number p , a p -cyclic covering C of $\mathbb{P}^1$ with 3 branch points is trigonal if and only if $p \geq 7$ and C is birational to the curve

$$y^p = x(x-1)^2.$$

That is, if we write C in the form of $(\times)$, then C is trigonal if and only if

- (1) $p = 6q + 1$ for some $q \geq 1$ and $a = 2, 2q$ or $3q - 1$, or
- (2) $p = 6q + 5$ for some $q \geq 1$ and $a = 2, 2q + 1$ or $3q + 1$.

Note that using the lemma above, we can see

$$C_{6q+1;2} \sim C_{6q+1;2q} \sim C_{6q+1;3q-1}, \quad C_{6q+5;2} \sim C_{6q+5;2q+1} \sim C_{6q+5;3q+1},$$

so the parts before and after "that is" in Theorem are indeed equivalent with each other.

11 / 36

Elliptic or Hyperelliptic Case

According to Yoshida [3] we have

Proposition

For a prime number p , a p -cyclic covering C of $\mathbb{P}^1$ with 3 branch points is elliptic or hyperelliptic if and only if $p \geq 3$ and C is birational to the curve

$$y^p = x(x-1).$$

That is, if we write C in the form of $(\times)$, then C is elliptic or hyperelliptic if and only if $p \geq 3$ and $a = 1$ or $(p-1)/2$. Here, the elliptic case only occurs when $p = 3$.

[3] K. Yoshida, Automorphisms with fixed points and Weierstrass points of compact Riemann surfaces, Tsukuba J. Math. 17 (1993), no.1, 221–249.

10 / 36

§2 Proof for Main Theorem

12 / 36

Rational Functions $y^\xi(x-1)^\eta$

- Use the notation $\tilde{C}_{p;a}$ for the normalization of $C_{p;a}$.
- Write P_0 , P_1 and P_∞ for the points on $\tilde{C}_{p;a}$ lying on $(0,0)$, $(1,0)$ and the infinite point of $C_{p;a}$. (Note that p is prime.)
- Then the divisor of rational functions y and $x-1$ can be written as

$$(y) = 1 \cdot P_0 + a \cdot P_1 - (a+1) \cdot P_\infty,$$

$$(x-1) = p \cdot P_1 - p \cdot P_\infty.$$

- Thus, we can compute the degree of $y^\xi(x-1)^\eta$ for any given pair (ξ, η) of integers.
- In what follows, we write $\varphi_{\xi,\eta} := y^\xi(x-1)^\eta$.
- One can check $\deg(\varphi_{1,0}) = 3$ on $\tilde{C}_{p;2}$, so the "if" part of Theorem has been proved.

13 / 36

Review Namba's Theorem

Now applying Namba's Theorem, we obtain that

Corollary from Namba's Theorem

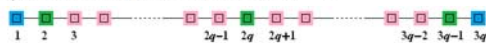
If $C_{6q+1;a}$ is trigonal and ψ is a rational function on it, then

$$\deg(\psi) \leq (3q+1)/2 \Rightarrow 3 \mid \deg(\psi).$$

15 / 36

Proof for $p = 6q + 1$

- The proofs for the cases of $p = 6q + 1$ and $p = 6q + 5$ are similar, so we only introduce the former one.
- Firstly, let us collect the results above:
 - ▷ We need to consider the curves $C_{6q+1;a}$ with $1 \leq a \leq 3q$.
 - ▷ $C_{6q+1;a}$ is elliptic or hyperelliptic if and only if $a = 1$ or $3q$.
 - ▷ $C_{6q+1;a}$ is trigonal if $a = 2, 2q$ or $3q - 1$.



Here, ■: gon= 2, ■: gon= 3, ■: gon. undetermined.

- Therefore, we have only to consider the curves $C_{6q+1;a}$ with $3 \leq a \leq 2q-1$ or $2q+1 \leq a \leq 3q-2$. (1)

14 / 36

Proof for $p = 6q + 1$

- The divisor of the rational function $\varphi_{1,0}$ can be written as $(\varphi_{1,0}) = 1 \cdot P_0 + a \cdot P_1 - (a+1) \cdot P_\infty$.

- Thus, we have

$$\deg(\varphi_{1,0}) = a + 1.$$

- Then by Namba's Theorem we obtain that

$$\text{if } a \leq (3q-1)/2, \text{ then } a \equiv 2 \pmod{3}. \quad (2)$$

- Firstly, suppose that $a \leq 4$, then by (1) and (2) we get $(q, a) = (2, 3)$, which corresponds to the curve $C_{13;3}$.
- We leave it to the last step, and will show it is not trigonal.
- Hence, in what follows we can assume

$$a \geq 5. \quad (3)$$

16 / 36

Two Cases

- We divide the rest part of proof into the following two cases:

$$\begin{cases} \text{Case 1:} & a \leq \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}, \\ \text{Case 2:} & a \geq \frac{3}{2}q. \end{cases}$$

17 / 36

Case 1, Step 1: to show $a \geq q - 2$

- Hence, by Namba's Theorem there does not exist any integer k with $k \equiv 2 \pmod{3}$ such that $s_1 \leq k \leq s_4$.
- In particular, we get $s_4 - s_1 < 3$, and by (3) this implies

$$q < a + \frac{13}{6} + \frac{41}{6(2a-3)} \leq a + \frac{13}{6} + \frac{41}{6(2 \times 5 - 3)} = a + \frac{22}{7}.$$

- That is, we obtain $a \geq q - 3$.
- Suppose $a = q - 3$, then we infer from (3) and the condition $a + 3 = q < a + \frac{13}{6} + \frac{41}{6(2a-3)}$ above that $(q, a) = (8, 5)$.
- However, when $q = 8$ we see $p = 6 \times 8 + 1 = 49$ is not prime, which is out of our consideration.
- Therefore, we obtain that

$$a \geq q - 2. \quad (5)$$

19 / 36

Case 1, Step 1: to show $a \geq q - 2$

- By (2) and (3), the condition of Case 1 implies

$$a \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{and} \quad q \geq 4. \quad (4)$$
- For a positive integer k , we have

$$(\varphi_{k,-1}) = k \cdot P_0 + (ka - 6q - 1) \cdot P_1 + (6q - ak - k + 1) \cdot P_\infty.$$
- Then using the condition (3), one can compute

$$\deg(\varphi_{k,-1}) = \begin{cases} 6q - ka + 1 & \leq (3q + 1)/2 \quad \text{if } s_1 \leq k \leq s_2, \\ k & \leq (3q + 1)/2 \quad \text{if } s_2 \leq k \leq s_3, \\ ak + k - 6q - 1 & \leq (3q + 1)/2 \quad \text{if } s_3 \leq k \leq s_4, \end{cases}$$

$$\text{where } s_1 = \frac{9q+1}{2a}, \quad s_2 = \frac{6q+1}{a+1}, \quad s_3 = \frac{6q+1}{a}, \quad s_4 = \frac{15q+3}{2a+2}.$$

- By (4), when $k \equiv 2 \pmod{3}$, none of the 3 degrees above is divisible by 3.

18 / 36

Case 1, Step 2: to show $a \geq q + 1$

- Suppose $a = q - 2$, then by (3) and (4) we have

$$q \geq 7 \quad \text{and} \quad q \equiv 1 \pmod{3}.$$
- On the other hand we check

$$\deg(\varphi_{6,-1}) = 13 \leq (3q + 1)/2 \quad \text{when } q \geq 8.$$
- Then we only need to consider the case of $q = 7$.
- However, on the corresponding curve $C_{43;5}$ we have

$$\deg(\varphi_{7,-1}) = 8 \leq (3 \times 7 + 1)/2,$$
 so it is not trigonal. Hence, $a \neq q - 2$.
- Using the same discussion we can also prove $a \neq q - 1$.

20 / 36

Case 1, Step 2: to show $a \geq q + 1$

- Suppose $a = q$, then by (3) and (4) we have
 $q \geq 5$ and $q \equiv 2 \pmod{3}$.
- On the other hand we check
 $3 \nmid \deg(\varphi_{7,-1}) = q + 6 \leq (3q + 1)/2$ when $q \geq 11$.
- Since $6 \times 8 + 1$ is not prime, we only need to consider the case of $q = 5$.
- But in the last step we will show that on the corresponding curve $C_{31;5}$ is not trigonal.
- Hence, in the rest part of Case 1 we can assume that

$$a \geq q + 1. \quad (6)$$

21 / 36

Case 1, Step 4: to complete Case 1

- Similarly, by taking $k = 4$ we have $4 \notin [s_1, s_4]$
- But by (7) we can check $s_1 < 4$.
- Then we must have $s_4 < 4$, which implies

$$a \geq \frac{15}{8}q - \frac{5}{8}.$$
- However, this contradicts (4) and the condition of Case 1.

23 / 36

Case 1, Step 3: to show $a \geq (5q - 2)/4$

- Still consider the rational function $\varphi_{k,-1}$:
 $\deg(\varphi_{k,-1}) = ak + k - 6q - 1 \leq (3q + 1)/2$ if $k \in [s_3, s_4]$.
- Take $k = 6$, then we get $6 \notin [s_3, s_4]$.
- By (6) we have

$$s_3 = \frac{6q + 1}{a} \leq \frac{6(a - 1) + 1}{a} < 6.$$
- Thus, we must have $s_4 < 6$, which implies

$$a \geq \frac{5}{4}q - \frac{2}{4}. \quad (7)$$

22 / 36

Case 2

- Review the proof for Case 1,
consider $\{\varphi_{k,-1}\}_{k \geq 1} \Rightarrow$ Case 1.
- Similarly,
consider $\varphi_{2,-1}$ and $\{\varphi_{2k+1,-k}\}_{k \geq 1} \Rightarrow$ Case 2.
- Here, we omit the details.

24 / 36

§3 Proof for Exceptional Curves

25 / 36

A Result on Non-Existence of Small Degrees

Using the notations above, we have

Proposition

Let r be a positive integer such that

$$d^2 - \sum_{i=1}^n m_i^2 > (r+1)^2. \quad (C1)$$

If $r_C(k) \geq r+1$ for all integers k in the interval

$$1 \leq k \leq \frac{r}{d - \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i^2}}, \quad (C2)$$

then there exist no rational function ψ with $\deg(\psi) \leq r$ on C .

Proof is omitted. (Using Serrano's result in [4].)

[4] F. Serrano, Extension of morphisms defined on a divisor, Math. Ann. 277 (1987), no. 3, 395–413.

27 / 36

Exceptional Curves

- In the discussions above, we leave two curves $C_{13;3}$ and $C_{31;5}$ undetermined.
- Now we will show that they are not trigonal either, and for this we need some preparations.
- Let C be a singular irreducible curve on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ of degree d .
- Let $m_1, \dots, m_n \geq 2$ be the multiplicities of singularities of C (infinitely near points are included).
- For a positive integer k , we write

$$s_C(k) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i m_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n a_i^2 = k^2 \right\};$$

$$r_C(k) = dk - s_C(k).$$

26 / 36

The Curve $C_{31;5}$ Is Not Trigonal

- Now, go back to the curve $C = C_{31;5}$, i.e.,

$$y^{31} = x(x-1)^5,$$

and we claim that it is not trigonal.

- Using the notations above, we have $r = 3$, $d = 31$, $n = 11$ and $\{m_i\}_{i=1}^{11} = \{25, 6, 4, 5, 6\}$.

- Then one computes

$$31^2 - (25^2 + 6^2 \times 4 + 5^2 \times 6) = 42 > (3+1)^2,$$

$$\frac{3}{31 - \sqrt{25^2 + 6^2 \times 4 + 5^2 \times 6}} = 4.37 \dots$$

- Hence, it is sufficient to check $r_C(k) \geq 4$, i.e.,

$$s_C(k) \leq 31k - 4$$

for $1 \leq k \leq 4$.

28 / 36

The Curve $C_{31;5}$ Is Not Trigonal

- In order to compute $s_C(k)$, we write $A(k)$ for the collection of (non-ordered) integers $\{a_i \geq 1\}_{i=1}^{n'}$ such that $n' \leq n$ and $\sum_{i=1}^{n'} a_i^2 = k^2$.
- One can check that

$$A(1) = \{\{1\}\}, \quad A(2) = \{\{2\}, \{1_4\}\},$$

$$A(3) = \{\{3\}, \{2_2, 1\}, \{2_2, 1_5\}, \{1_9\}\}$$

$$A(4) = \{\{4\}, \{3, 2, 1_3\}, \{3, 1_7\}, \{2_4\}, \{2_3, 1_4\}, \{2_2, 1_8\}\},$$
- Thus, we obtain

$$s_C(1) = 25 \leq 31 \times 1 - 4, \quad s_C(2) = 50 \leq 31 \times 2 - 4,$$

$$s_C(3) = 79 \leq 31 \times 3 - 4, \quad s_C(4) = 114 \leq 31 \times 4 - 4,$$
- Hence, by the proposition above, $C_{31;5}$ is not trigonal.
- Using the same method, we can show that neither is $C_{13;3}$.

29 / 36

Generalization

- For general cyclic coverings of $\mathbb{P}^1$ (not only prime-) with 3 branch points, when does the gonality equal 2 or 3?
- For p -cyclic coverings of $\mathbb{P}^1$ with more branch points, when does the gonality equal 2 or 3?
- How about the conditions for gonality = 4, 5, 6, ...?

31 / 36

§4 Generalization

30 / 36

For Not-prime Case

Result [WS]

For a positive integer d , the curve

$$y^d = x(x-1)^a, \quad \text{with } d \geq 2a+1$$

is elliptic or hyperelliptic if and only if $d \geq 3$ and

$$\begin{cases} a = 1 \text{ or } c-1 & \text{when } d = 2c, \\ a = 1 \text{ or } c & \text{when } d = 2c+1. \end{cases}$$

The curve above is trigonal if and only if $d \geq 7$ and

$$\begin{cases} a = 2, 2e-1 \text{ or } 2e & \text{when } d = 6e, \\ a = 2, 2e \text{ or } 3e-1 & \text{when } d = 6e+1, \\ a = 2, 2e & \text{when } d = 6e+2, \\ a = 2, 2e, 2e+1 \text{ or } 3e & \text{when } d = 6e+3, \\ a = 2, 2e+1 & \text{when } d = 6e+4, \\ a = 2, 2e+1 \text{ or } 3e+1 & \text{when } d = 6e+5. \end{cases}$$

32 / 36

For More Branched Points Case

Result [WS]

For a prime integer p , a p -cyclic covering of $\mathbb{P}^1$ is elliptic or hyperelliptic if and only if it is birational to one of the following curves

- (1) $y^p = x(x-1)$ for $p \geq 3$,
- (2) $y^p = x(x-1)(x-\lambda)^{p-1}$ for $p \geq 3$,
- (3) $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_3) \cdots (x-\lambda_{m_0})$ for $m_0 \geq 3$ and odd.

33 / 36

For Bigger Gonality Case

- There are only very few results.
- Say, for the curve $C_{d;a} : y^d = x(x-1)^a$, with $d \geq 2a+1$, we can show that $\text{Gon}(C_{d;3}) = 4$ if and only if $d \geq 13$ and $\text{Gon}(C_{d;4}) = 5$ if and only if $d \geq 21$.
- However, we do NOT even know whether $\text{Gon}(C_{d;5}) = 6$ for every sufficiently large d . $\therefore$

35 / 36

For More Branched Points Case

Conjecture

For a prime integer p , a p -cyclic covering of $\mathbb{P}^1$ is trigonal if and only if it is birational to one of the following curves

- (1) $y^p = (x-1)(x-2)^2$ for $p \geq 7$,
- (2) $y^p = (x-1)(x-2)(x-3)$ for $p \geq 5$,
- (3) $y^p = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{p-2}$ for $p \geq 5$,
- (4) $y^p = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^{p-2}$ for $p \geq 3$,
- (5) $y^3 = (x-1) \cdots (x-m')(x-m'+1)^2 \cdots (x-m)^2$, for $m' \leq m$, $m \geq 4$ and $3 \nmid m' + 2(m-m')$.

34 / 36

Thank you very much.

36 / 36

『対称群における置換の転倒数によるあみだくじの簡略化の研究』

塩谷 祈（広尾学園高等学校 2 年）

指導教官：堀内 陽介，内田 広子（広尾学園）

1. はじめに
2. あみだくじと対称群の関係
3. 転倒数と必要最低限の隣接互換の数は等しい
4. まとめ

【要旨】

あみだくじは行き先が決して重ならない．このことは，縦線の本数を決めておくと，無数に横線を引くことができるのにもかかわらず結果は縦線の本数分の階乗通りしかないことを意味している．つまり，ひとつのあみだくじの結果に対し，横線の本数が異なるものがあり，その中で最も横線の本数が少ないものを見つけることができる．この論文ではあみだくじをその最も簡略化された形まで変形する方法を求めるために，具体的に何本省略可能かを知ることを目的とする．

あみだくじは対称群の構造をもつ．あみだくじの各々は置換である．置換は互換の積であり，互換は隣接互換の積である．隣接互換はあみだくじでは横線であるから，最も少ない隣接互換で表されたときが，その置換を表すあみだくじの最も簡略化された形である．このとき，隣接互換による置換への影響として，「転倒」がある．転倒が起こっている回数を転倒数とし，置換を表すのに必要な隣接互換の個数とその置換の転倒数の値は等しい．つまり，転倒数を知ることで最も簡略化された形まで減らせる横線の本数がわかる．

1. はじめに

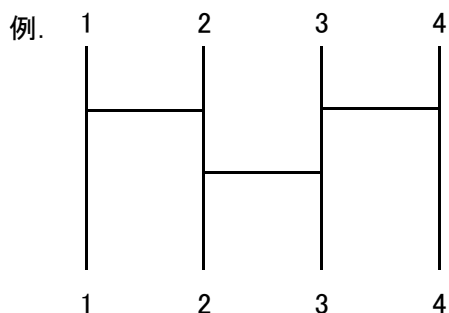
対称群を学んでいるとき、あみだくじを使った例がでてくる．あみだくじを辿ることなく結果を知る方法はないのか？という素朴な疑問から、「あみだくじの簡略化」というアイデアに辿りついた．以下、あみだくじでは縦線の本数は固定して考えるものとする．

あみだくじを辿ると、行き先が重なることはないことに気付く．あみだくじには横線をいくらかでも引くことができることから、このことはあみだくじには横線の本数が異なるが結果が同じになるものが存在することを意味している．あみだくじを同じ結果となる横線の本数がより少ないものへ変形することを「あみだくじの簡略化」ということにする．

この論文では、「あみだくじの簡略化」そのものではなく、辿ることと同じ結果を得るあみだくじの中で、もっとも横線が少ないものの横線は何本なのかについて考察した．結果はよく知られているものであるが、縦線が n 本であるあみだくじの横線の最小本数を、 n 次対称群の「置換の転倒数」を用いて考えている点が注目すべき点であると思われる．

2. あみだくじと対称群の関係

ここで扱うあみだくじを、各縦線の先端と末尾に左から順に自然数を 1 から並べ『縦線の先端をスタートし、横線にあたると必ず横線に進み、縦線にあたると再び縦線を降りる、という動作を縦線の末尾にたどり着くまで行い、着いた地点の数字を結果とする．この動作を各々の縦線で行う』ものとする．また、例えば 1 がこの操作で 3 に辿りついたとき、「1 が 3 になった」と表現することにする．縦線の本数が n 本のあみだくじを「 n 次のあみだくじ」と呼ぶことにする．



この4次のあみだくじを辿ると、1は3に、2は1に、3は4に、4は2になることが分かる。これは、数の並び1234が3142に変換されたと見ることができる。これら1~4の並べ替え一つ一つを4次の置換と呼び、これは4次対称群の元である。また、例の置換を、上段に辿る前、下段にその結果を対応させて $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ と表すことにし、これを置換の行列表記という。この表記からもわかるように、4次のあみだくじの結果はすべて1, 2, 3, 4の順列である。したがって4次のあみだくじは多くとも全部で $4!=24$ 通りしかないと分かる。

次に、 n 次の置換の中で、隣接互換と呼ばれる置換を考える。1と2のみを入れ替え、それ以外の数字はそのままとなるような置換を s_1 、2と3のみを入れ替え、それ以外の数字はそのままであるような置換を s_2 、同様に s_i ($1 \leq i \leq n-1$)を「 i と $i+1$ のみを入れ替え、それ以外はそのままである置換」と定め、これを隣接互換という。4次のあみだくじを例として、 s_1 , s_2 , s_3 はそれぞれ

$$\begin{aligned} s_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ s_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ s_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という置換である。これらはあみだくじの横線に対応する置換である

ここで、 n 次対称群は1~ n までの自然数の置換の集合である。 n 次のあみだくじは n 次の置換を表すが、すべての n 次の置換を n 次のあみだくじは表せるのであろうか？あみだくじは、上から順に「隣同士の数を入れ替え」を繰り返し結果に至る。隣同士の入れ替えのみですべての置換を表すことができれば、すべての置換に対して対応するあみだくじの存在が示される。これについては、本論文では証明は割愛するが、次の定理が知られている。

定理 1

n 次対称群 S_n において、すべての置換は共通文字のない巡回置換の積で表すことができる。

更に、2 つの数字(隣同士とは限らない)のみを入れ替える置換を「互換」と呼び、次も正しい。

定理 2

n 次対称群 S_n において、巡回置換は互換の積で表すことができる。

また、次も直ちに示される。

定理 3

n 次対称群 S_n において、互換は隣接互換の積で表すことができる。

これらの積は対称群の中での積であるから、写像の合成であることに注意されたい。定理 1 ～ 3 より、すべての置換は隣接互換の積で表せることが示される。したがってすべての置換はあみだくじで表現可能である。特に恒等置換を表すあみだくじは横線の一本もないあみだくじに相当するものであり、更に、各あみだくじの上下をひっくり返したものがその置換の逆元を表すあみだくじ、また、置換の合成は、あみだくじを上下に繋げることになる。よって、この意味で n 次のあみだくじ全体の集合は n 次対称群と同型な群をなす。

ここで隣接互換の性質について述べておこう。隣接互換について次のことが成り立つ。写像の合成は右から順に考えるので、あみだくじで表す場合は、一番右があみだくじの一番上の横線である。

定理 4

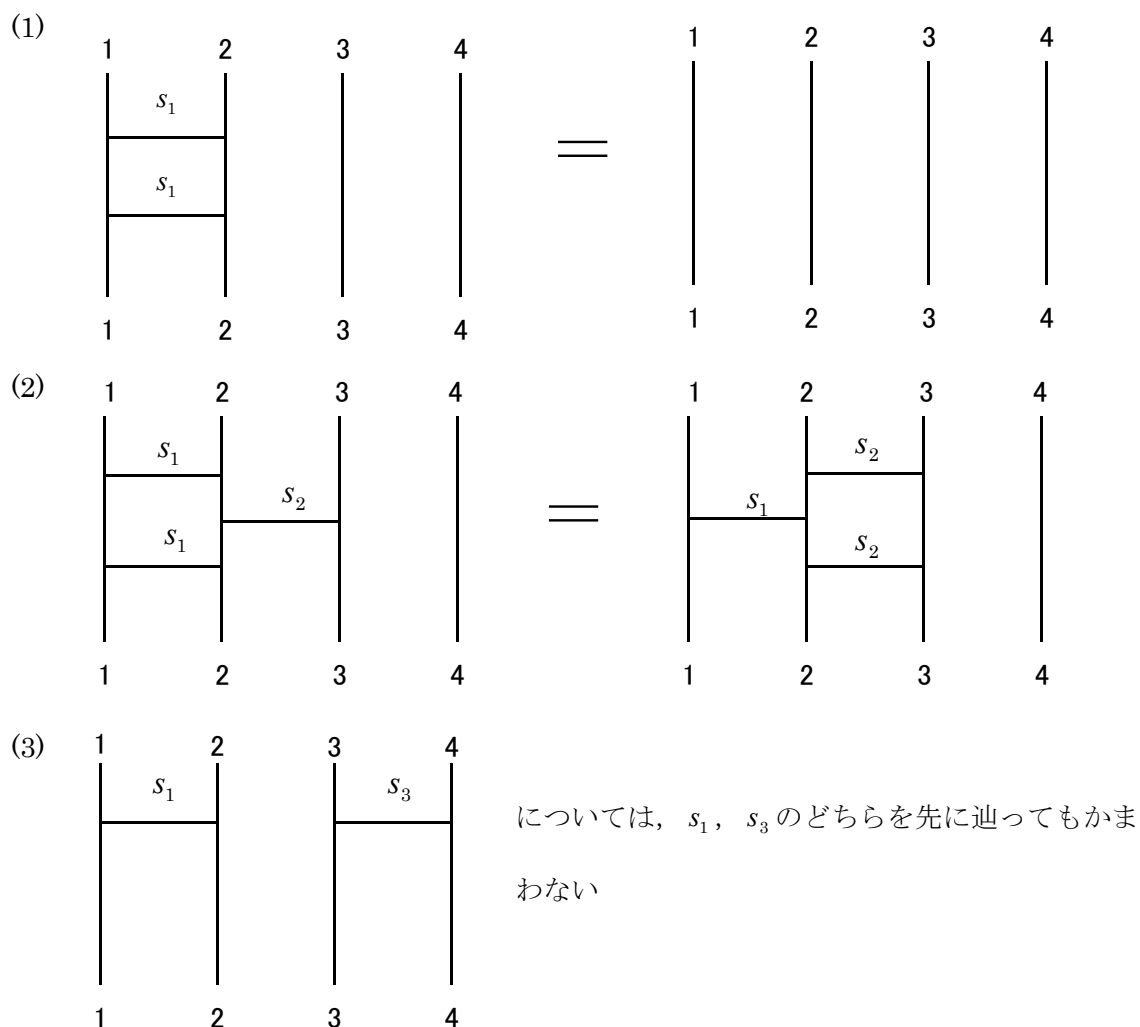
次が成り立つ

$$(1) s_i s_i = e \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1) \quad (e \text{ は恒等置換})$$

$$(2) s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

$$(3) s_i s_j = s_j s_i \quad (|i - j| \geq 2)$$

これらをあみだくじで表現すると以下のようなになる.



これらの性質を用いれば, あみだくじの横線を減らすことができる. これを用いてあみだくじは簡略化できる.

3. 転倒数と必要最低限の隣接互換の数は等しい

ここからが本論文の主題である．ここで「転倒」という概念を導入する．置換に対し，例えば4次対称群の恒等置換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し， s_1 を合成すると $s_1 e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ となる．このとき，横線が一本もないあみだくじに，1と2の間に1本横線を引いたこととなるが，これによって上段では $1 < 2$ であった部分では，変換後 $2 > 1$ と左右の大小関係が変化している．横線(隣接互換)により変化するのは本質的に左右の大小である．この事実に着目し，あみだくじの横線の本数について考察する．

$\sigma \in S_n$ ，に対して次の集合を定め， σ の転倒集合と呼ぶことにする．

$$\text{Inv}(\sigma) = \{(i, j) \mid i < j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

すなわち，変換前と後で大小関係が逆転している自然数の組の集合を $\text{Inv}(\sigma)$ とする．更にこの集合の位数を $\text{inv}(\sigma)$ と表す．すなわち

$$\text{inv}(\sigma) = |\{(i, j) \mid i < j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

とする．この値を σ の転倒数と呼ぶことにする．この値が隣接互換の個数に関わっている．

$\sigma \in S_n$ について $\text{inv}(\sigma)$ には次のほとんど自明な性質が成り立つ．

定理 5

$\sigma \in S_n$ について，

- (1) $\text{inv}(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma = e$
- (2) $\text{inv}(\sigma) = \text{inv}(\sigma^{-1})$
- (3) $\sigma(i) > \sigma(i+1) \Rightarrow \text{inv}(\sigma s_i) = \text{inv}(\sigma) - 1$
- (4) $\sigma(i) < \sigma(i+1) \Rightarrow \text{inv}(\sigma s_i) = \text{inv}(\sigma) + 1$

更に, $\sigma \in S_n$ について, σ を表すのに必要最低限の隣接互換の数を $l(\sigma)$ とする. これが σ を表すあみだくじに必要な十分な横線の本数である. $l(\sigma)$ を σ の長さ(length)という. σ を表す隣接互換の積の表現は, 長さは決定するが, 使われる隣接互換や積の順序などは色々ある.

次の定理が本論文の主張である.

定理 6

$\sigma \in S_n$ について, $l(\sigma) = \text{inv}(\sigma)$ が成り立つ

Proof. $S = \{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ とする. $\text{inv}(\sigma) = t$ とおく.

まず, $l(\sigma) \leq \text{inv}(\sigma)$ を示す. それには, σ が $\text{inv}(\sigma)$ 個の S の元の積で表せることを示せばよい. これについて t についての数学的帰納法で示す.

$\text{inv}(\sigma) = 0$ のとき, 定理 5 (1) より $\sigma = e$ でありこのとき $l(\sigma) = l(e) = 0$ であるから正しい.

$t \geq 1$ として $t-1$ まで正しいとする. このとき $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ となる自然数 i が $1 \leq i \leq n-1$ からとれる. このとき, 定理 5 (3) より $\text{inv}(\sigma s_i) = \text{inv}(\sigma) - 1 = t-1$ である. 帰納法の仮定から, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1} \in S$ で $\sigma s_i = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1}$ となるものがとれる. 両辺に右から s_i をかけて $\sigma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} s_i$ を得る. よって, σ は $\text{inv}(\sigma)$ 個の S の元の積で表せることが示された. したがって

$$l(\sigma) \leq \text{inv}(\sigma) \cdots \textcircled{1}$$

である.

次に, $l(\sigma) \geq \text{inv}(\sigma)$ を示す.

$l(\sigma) = t$, $\sigma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in S$) とする. このとき, 定理 5 (3)(4) より,

$$\begin{aligned} \text{inv}(\sigma) &= \text{inv}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t) = \text{inv}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-1}) \pm 1 = \text{inv}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-2}) \pm 1 \pm 1 = \dots \\ &= \text{inv}(e) \pm 1 \dots \pm 1 \pm 1 \pm 1 = 0 \pm 1 \dots \pm 1 \pm 1 \pm 1 \leq t = l(\sigma) \end{aligned}$$

したがって,

$$l(\sigma) \geq \text{inv}(\sigma) \cdots \textcircled{2}$$

も成り立つ. ①, ②より $l(\sigma) = \text{inv}(\sigma)$ が成り立つ

□

これで, n 次のあみだくじの表すのに必要最低限の横線の本数は, そのあみだくじが表す置換の転倒数に等しいことが示された.

4. まとめ

n 次のあみだくじについて, 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を表すとき転倒数が最大になるので, 必要最低限な横線の本数はこのときが最大である.

この置換 σ について,

$$\text{inv}(\sigma) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

であるから, 任意の n 次のあみだくじは $\frac{n(n+1)}{2}$ 本以下の横線で表すことができることが分

かった. あみだくじについて必要最低限の横線の本数は, そのあみだくじの表す置換の転倒数を数えればわかる. このことから, あと何本横線を消すことができるのか知ることができる. このことは, あみだくじの簡略化を考える上でも大きな前進であると考えられる.

複素ピタゴラス数の構造について

橘 智子 (津山高専,情報工学科 3 年)

1. はじめに

私は昨年度「虚数の整数の研究—偶奇性を使った魅力的応用の創造—」(JSEC2011)において複素ピタゴラス数の研究を始めた. その研究を始めるきっかけとなったのは, 魅力的な行列との出会いである. その行列は小林(2008)[Ko]の本に示されていたピタゴラス変換行列

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

である. このピタゴラス変換行列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ というただ一つのピタゴラス数からすべてのピタゴラス数を生

み出すことができる行列である. この行列 P が発見されたのは 50 年位前であると言われている([Pt]参照). 私はこの行列 P に魅力を感じ, ピタゴラス数の世界にとっても興味を持った.

昨年度の研究では, 自分の知識不足から自然数でのピタゴラス数変換行列 P を用いて複素ピタゴラス数の構造を研究した. しかし, 行列 P は自然数の世界を扱うものであったために複素ピタゴラス数の構造を解明するに至ることができなかった.

今年度の研究では, 複素数の勉強をやりなおし, 複素ピタゴラス数の構造を解明するために自然数でのピタゴラス数変換行列 P に代わる複素ピタゴラス数のための変換行列を研究し, そこから新たに複素ピタゴラス数の構造研究を行おうと考えた. そして, 昨年度とは全く異なる研究に着手することができた.

2. 今年度の研究結果の概要

今年度の私の第一の研究は, 自然数における行列 P に対応する複素ピタゴラス数変換行列 G (generated matrix)を複素ピタゴラス数のパラメータからつくることであった. 複素ピタゴラス数のパラメータについては J.T.Cross(1986)の論文[Cr]に示されていた. この論文から既約な複素ピタゴラス数のパラメータが分かった. この結果を利用して, 複素ピタゴラス数の変換行列

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

を発見することができた.

第二の研究は, 行列 G を用いて自然数における $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対応する複素ピタゴラス数, origin の存在研究

である.

行列 G は行列 P とは少しだけ違いがあるが, 自然数においても $\text{origin} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から全ての自然数のピ

タゴラス数を生み出すことができる.

多くの数値計算を行った結果, 複素ピタゴラス数の origin は自然数のようにただ一つではなかった. 複素ピタゴラス数では origin が多数存在していたのである. この事実から, 複素ピタゴラス数の構造について新たな疑問が生じた. それは, 複素ピタゴラス数の origin 達の特徴はどのようなもので, 複素ピタゴラス数はどこからどのように生まれ, 増えてゆくのか?そしてどのような生態系をしているのか?という疑問である. これらの疑問について研究してみようと思った.

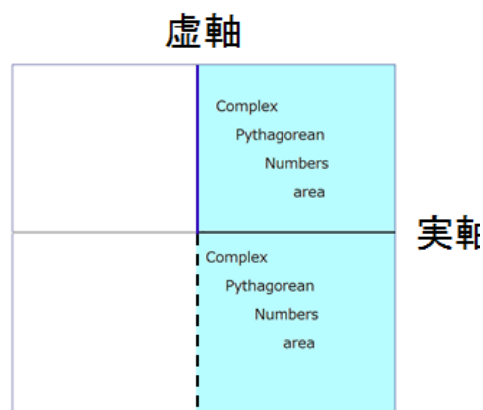
研究の結果, $\text{relatively origins}$ という対と $\text{relatively origins}$ を特徴づける index と gene という量を発見した. この index と gene の発見が今年度の研究の最大の成果と考えている. これらについては 5 節以降で詳細に扱う.

3. 複素ピタゴラス数と研究領域について

複素ピタゴラス数とは, 複素数 a, b, c で

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ を満たす } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ のことである.}$$

複素ピタゴラス数の研究領域は, 数の対称性から, 第一象限と第四象限と虚軸の正の部分を含むものとする (図 1 参照).



(図 1)

4. 自然数のピタゴラス数に関する既知の結果

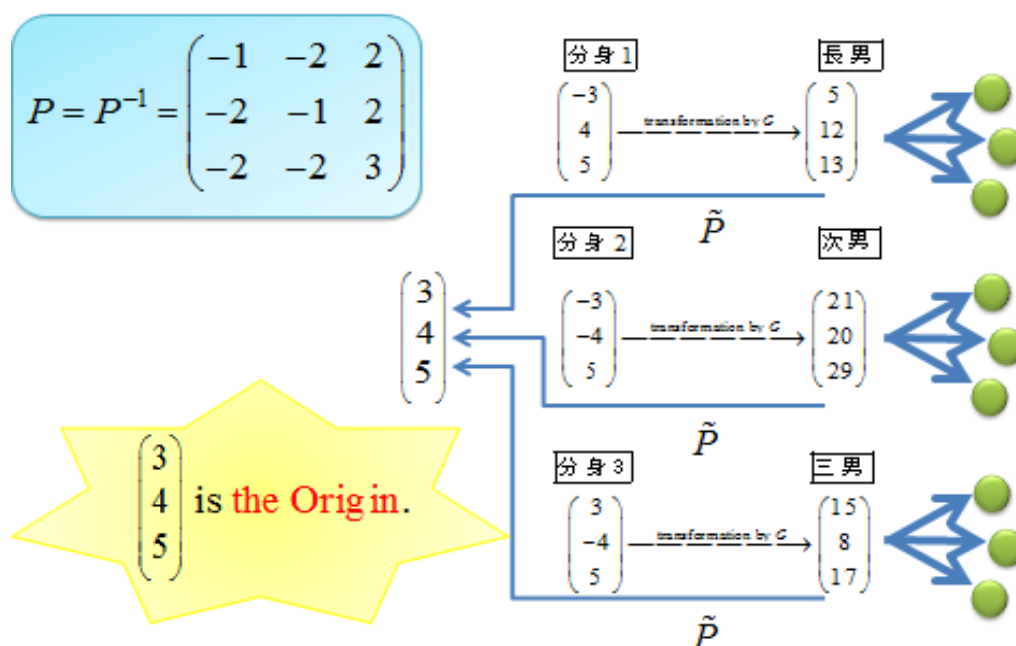
全てのピタゴラス数は行列 P によって $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から生み出されることが知られている (図 2 参照).

最初に $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から 3 つの分身 $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ をつくる. その分身をピタゴラス変換行列 P で変

換すると長男 $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$, 次男 $\begin{pmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}$, 三男 $\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ という 3 つのピタゴラス数が生まれる. また, 行列 P は逆

行列も同じ P であるため、どんなピタゴラス数でも行列 $P (= P^{-1})$ でくりかえし変換することによって、

最終的に $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ というピタゴラス数にたどりつく。私はピタゴラス数 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ を自然数の世界での origin と呼ぶことにした。



(図 2)

5. 複素ピタゴラス変換行列 G について

複素ピタゴラス数の変換行列はパラメータからつくることができる。パラメータは J.T.Cross(1986)の論文[Cr]に示されていた。

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を既約な複素ピタゴラス数とすると、 a, b, c はそれぞれパラメータ v, w により、

$$a = \frac{(v^2 + w^2)}{2}, \quad b = \frac{(v^2 - w^2)}{2i}, \quad c = vw$$

と表される。ただし、 v と w は両方とも奇数かつ互いに素である。ここで、複素数 z が偶数であるとは z が $(1+i)$ の倍数であるときのことであり、奇数であるとは $(1+i)$ の倍数以外の数のことである。

以下に、変換行列 G の構成法の概略を示す。

(ステップ 1) 自然数の場合のパラメータ変換は、 $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ であった。そして、

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ であることに注意する。

(ステップ 2) 次の複素ピタゴラス数のパラメータ変換を考える.

$$\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

ここで, $\begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$ であり, $\det \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix} = -1$ である.

(ステップ 3) $G = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ とおき, さらに

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とする. ここでの $\tilde{G}$ とは G での変換後, さらに出てきた各成分の実数成分を正にする操作を表す.

(ステップ 4) a', b', c' をステップ 2 を使い v, w で表し, さらにステップ 3 を計算することで, 以下の行列が得られる.

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(構成終)

複素ピタゴラス数の変換行列 G は自然数のピタゴラス数変換行列 P と比較すると, 2 列目の符号が変わっただけのものになっている. 行列 P は $P^{-1} = P$ であったが, 行列 G は $G^{-1} \neq G$ であり G^{-1} は

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

である.

6. Relatively origins について

複素ピタゴラス数の変換行列 G を用いた研究の結果, どんな複素ピタゴラス数も操作 $\tilde{G}$ を繰り返す

ことで, 最終的にある複素ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ にたどりつくことがわかった. このとき, (1) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

となるか、(2) $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ であつ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ という 2 つのケースに分かれる。

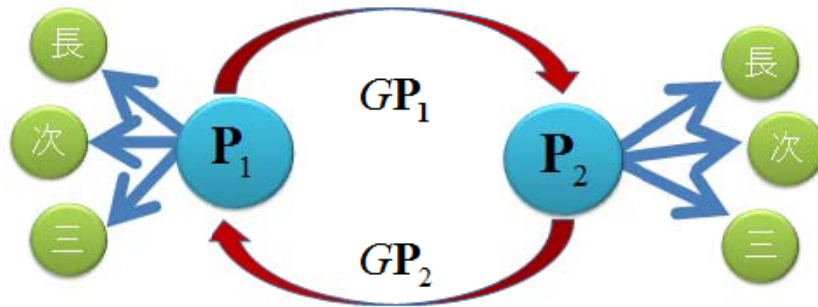
私は、(1)と(2)のような $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ をオリジン (origin), 特に(2)の $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ を相対的オリジン (relatively

origins) と呼ぶことにした。すなわち、複素ピタゴラス数には自然数とは異なる relatively origins が存在することを発見した。

(Relatively origins の説明と図)

Relatively origins とは 2 つの origin が変換行列 G でたがいに移りあうものである。

P_1 と P_2 は両方 origin である。 P_1 を行列 G で変換すると P_2 となり、 P_2 を行列 G で変換すると P_1 になる (図 3 参照)。



(図 3)

Relatively origins でない origin については、実軸上の $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ と、虚軸上の $\begin{pmatrix} 4i \\ 3i \\ 5i \end{pmatrix}$ だけであった。

さらに、relatively origins を高速に見つけるための定理を証明した。

定理 1 (Relatively origins の必要条件)

$\begin{pmatrix} \alpha_r + \alpha_i i \\ \beta_r + \beta_i i \\ \gamma_r + \gamma_i i \end{pmatrix}$ を複素ピタゴラス数とする。このとき $\alpha_j + 2\beta_j - 2\gamma_j > 0, 2\alpha_j + \beta_j - 2\gamma_j > 0,$

$2\alpha_j + 2\beta_j - 3\gamma_j > 0$ ならば、 $\begin{pmatrix} \alpha_r + \alpha_i i \\ \beta_r + \beta_i i \\ \gamma_r + \gamma_i i \end{pmatrix}$ は relatively origins の一つである。

以前は、複素ピタゴラス数を行列 G で繰り返し変換することで relatively origins を見つけていたが、定理 1 によってパラメータから直接 relatively origins を高速に発見することが可能になった。

7. Index について

Relatively origins を発見してから, relatively origins にはなにか特有の特徴があるのではないかと思
い, いろいろ試行錯誤しているうちに驚くべき現象を発見した. それは relatively origins の各成分どう
しを足し合せた値がすべて等しくなるということである. そして以下の定理 2 を証明することができた.

定理 2

複素ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ について $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ が relatively origins である必要十分条件は 2 つ

の複素ピタゴラス数のベクトル和の各成分がすべて等しいことである.

ここで relative origins の各成分どうしを足して得られた唯一つの値を index と呼ぶことにした.
たとえば, 2 つの複素ピタゴラス数

$$\begin{pmatrix} 12+24i \\ 16+3i \\ 16+21i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12-12i \\ 8+9i \\ 8-9i \end{pmatrix}$$

を考える. これらは relatively origins である. これらの複素ピタゴラス数をベクトルと考えて足し合
わせる.

$$\begin{pmatrix} 12+24i \\ 16+3i \\ 16+21i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12-12i \\ 8+9i \\ 8-9i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+12i \\ 24+12i \\ 24+12i \end{pmatrix}$$

そうすると, どの成分の値もすべて同じになる. この値 $24+12i$ が relatively origins の index である.

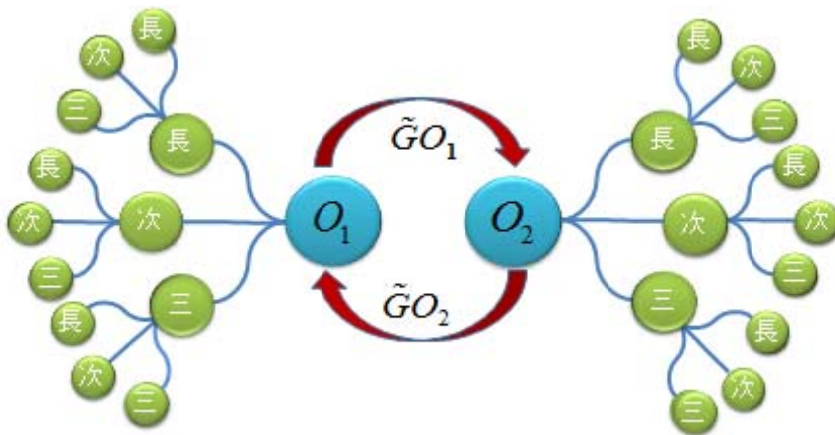
Relatively origins $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ について, それらの家系図は 1 対 1 に対応する. Relatively origins の

家系の構造は図 4 のようなイメージである(図 4 参照). すなわち $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ の子孫 $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ に対して, $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ の子

孫 $\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ が存在する. さらに relatively origins には index が存在したので, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ の値には意味

があると考えられる. そこで, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ を相対的子孫 (relatively offspring) と呼び, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \pm$

$\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ の値を相対的子孫の和 (relatively offspring sum) と呼ぶことにした.



(図 4)

8. Gene について

Relatively origins の index を $\sigma + \delta i$ とする. このとき, 比 $(\sigma : \delta)$ を gene と呼ぶ. ただし, $(\sigma : 0)$ は $(\infty : 0)$ で, $(0 : \delta)$ は $(0 : \infty)$ で表す.

Relatively origins は自然数のピタゴラス数と同様に, それぞれ 3 体の子どもを産む. 本研究では relatively origins の子ども, 孫世代においての複素ピタゴラス数の構造を研究した. 私は, index や gene という量が後の世代に何らかの形で影響を及ぼす, すなわち遺伝していくのではないかと予想している. 以下に調査結果の一例をあげる.

次の relatively origins を考える.

$$\text{origin1} : \begin{pmatrix} 42 + 74i \\ 34 + 357i \\ 42 + 363i \end{pmatrix}, \quad \text{origin2} : \begin{pmatrix} 26 + 62i \\ 34 - 221i \\ 26 - 227i \end{pmatrix}$$

この relatively origins の index は $68 + 136i$ で, gene は $(1 : 2)$ である.

表 1 は origin1 の三兄弟を表したものである.

(表 1)

	α_r	$\alpha_i i$	β_r	$\beta_i i$	γ_r	$\gamma_i i$
origin1	42	74	34	357	42	363
長男	194	1514	202	1231	278	1951
次男	58	86	134	517	142	523
三男	110	1366	34	935	110	1655

表 2 は origin2 の三兄弟を表したものである.

(表 2)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
origin2	26	62	34	-221	26	-227
長男	146	-834	138	-551	198	-999
次男	10	50	70	-109	62	-115
三男	94	-958	34	-799	94	-1247

表 3 は, relatively offspring sum である. たとえば, 長+は origin1 の長男と origin2 の長男を足したものを表し, 長-は origin1 の長男から origin2 の長男を引いたものを表す. (長+)と(次+) と(三+)に特徴がみられる.

(表 3)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
長+	340	680	340	680	476	952
次+	68	136	204	408	204	408
三+	204	408	68	136	204	408
長-	48	2348	64	1782	80	2950
次-	48	36	64	626	80	638
三-	16	2324	0	1734	16	2902

表 4 は表 3 における比 $(\alpha_r:\alpha_i), (\beta_r:\beta_i), (\gamma_r:\gamma_i)$ をそれぞれ計算したものである. この比のことを相対的子孫の比 (relatively offspring ratio) という. 表 4 において, (長+)と(次+) と(三+)はすべての成分で Gene(1:2) を受け継いでいる.

(表 4)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
長+	1	2	1	2	1	2
次+	1	2	1	2	1	2
三+	1	2	1	2	1	2
長-	12	587	32	891	8	295
次-	4	3	32	313	40	319
三-	4	581	0	1	8	1451

以下の表は, さらに孫の世代まで調査した結果である.

表 5 は origin1 と origin2 の長男について, その子どもたち (origin の孫たち) の足し算を行ったものである. たとえば, 長次+とは origin1 と origin2 のそれぞれの長男から生まれた次男同士を足し合わせたものを意味する(以降 relatively offspring sum と呼ぶ).

(表 5)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
長長+	1972	3944	1972	3944	2788	5576
長次+	612	1224	1292	2584	1428	2856
長三+	1292	2584	612	1224	1428	2856
長長-	336	11812	320	12378	464	17110
長次-	80	4684	192	8814	208	9982
長三-	240	7116	128	2986	272	7718

表 6 は表 5 の比をまとめたものである (以降 relatively offspring ratio と呼ぶ). ここでも, (長長+)と(長次+) と(長三+)はすべての成分で gene(1:2) を受け継いでいる.

(表 6)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
長長+	1	2	1	2	1	2
長次+	1	2	1	2	1	2
長三+	1	2	1	2	1	2
長長-	84	2953	160	6189	8	295
長次-	20	1171	32	1469	104	4991
長三-	20	593	64	1493	8	227

表 7 は origin1 と origin2 の次男の子どもたちの relatively offspring sum の結果である。

(表 7)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
次長+	884	1768	748	1496	1156	2312
次次+	80	60	340	680	340	680
次三+	748	1496	476	952	884	1768
次長-	336	2564	320	1974	464	3238
次次-	68	136	192	722	208	734
次三-	240	2492	128	1830	272	3094

表 8 は表 7 の relatively offspring ratio をまとめたものである。ここでは、(次長+)と(次三+)がすべての成分で gene(1:2) を受け継いでいる。

(表 8)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
次長+	1	2	1	2	1	2
次次+	4	3	1	2	1	2
次三+	1	2	1	2	1	2
次長-	84	641	160	987	232	1619
次次-	1	2	96	361	104	367
次三-	60	623	64	915	8	91

表 9 は origin1 と origin2 の三男の子どもたちの relatively offspring sum の結果である。

(表 9)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
三長+	748	1496	884	1768	1156	2312
三次+	476	952	748	1496	884	1768
三三+	340	680	68	136	340	680
三長-	48	11596	64	12186	80	16822
三次-	48	4660	64	8718	80	9886
三三-	16	6948	0	2890	16	7526

表 10 は表 9 の relatively offspring ratio をまとめたものである。(三長+)と(三次+) と(三三+)はすべての成分で Gene(1:2) を受け継いでいる。

(表 10)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
三長+	1	2	1	2	1	2
三次+	1	2	1	2	1	2
三三+	1	2	1	2	1	2
三長-	12	2899	32	6093	40	8411
三次-	12	1165	32	4359	40	4943
三三-	4	1737	0	1	8	3763

上の例でもわかるように、比 gene は relatively origins の子ども世代に何らかの形で比較的良く遺伝していることがわかる。約 50 ものデータを調査した結果、同様な状況が起こっていた。しかし、孫世代に入ると gene の遺伝性が変化していく傾向があり、その遺伝形態については研究中である。

7. 今後の研究課題

課題(1) 子ども世代において、すべての成分で gene が遺伝している場合をいくつか調査した。その後 6 世代までを追跡調査した結果、すべて gene が遺伝していることがわかった。

Gene はどのような場合に、どの程度の確率で遺伝していくのかを研究したい。

課題(2) 第一世代の relatively offspring sum には index の値で割り切れる成分が存在するのではないかと考えている。現段階の研究では、長男、次男、三男に表れている relatively offspring sum を index でそれぞれ割った値が、長男は $|5|$ 、次男は $|3|$ 、三男は $|3|$ となる成分があることをこれまでのデータから確認している(表 3 参照)。この結果が第一世代の relatively offspring sum すべてにおけることなのか研究することが今後の課題である。

参考文献

[Pt]Pythagorean Triple, <http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>

[Cr]PrimitivePythagoreanTriplesinGaussianintegers,JAMES.T.Cross,MATEMATICS MAGAGINE.V
OL.59,NO.2,1986

[Ko]ピタゴラス数を生み出す行列のはなし、ベレ出版、小林吹代、2008

アブストラクト

フラクタル連分数は私たちが考えた概念である。従来の平方根に関する連分数は同じ数の列が周期的に現れることから、それはフラクタル性を持つと考える事ができる。しかし、3 乗根や 4 乗根を従来の連分数で考えても、フラクタル性（周期性）を見つけないことができる。私たちは、従来の連分数表示を捨て、 n 乗根においてフラクタル性をもつような新しいタイプの連分数の理論を構築することに成功した。

1. 研究の動機

$\sqrt[n]{n}$ は周期的な連分数に展開されることが知られている。例えば、 $\sqrt{2}$ については、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

であり、無理数であるはずの $\sqrt{2}$ に規則性が生まれる。しかし、 $\sqrt[3]{k}$ は上の意味で連分数展開可能であるが、周期的ではない。例えば、 $\sqrt[3]{2}$ については、

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \dots}}}$$

であり、分母にあらわれる左端の数列 1, 3, 1, 5, ... に周期性を見つけないことができる。しかし、従来の枠にとらわれない連分数展開を考え、その中で周期性をつくることできないかという思いに至った。

2. 今回の研究の主結果

まず、フラクタル連分数に関する結果について説明する。よく知られているように $\sqrt{2}$ の連分数展開は、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

である。すなわち、分母が常に $2 + (*)$ という形で繰り返される。これを私たちは、

$$\sqrt{2} \sim [1, 2]^{(1)}$$

と表すことにした。ここで、2 を **フラクタル成分** と呼ぶ。また $[]$ の右上の (1) は連続する分子の数 1

を表す。そして、一般化のためにこの連分数を **1 次のフラクタル連分数** と呼ぶことにする。

平方数の 1 次のフラクタル連分数の一般式は、

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim \left[k, \overset{\cdot}{2k} \right]^{(\alpha)}$$

となる。これらは周期 1 である。

私たちは、平方数のフラクタル連分数の構成法をヒントに $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ のフラクタル性を持つ連分数を得ることができた。例えば $\sqrt[3]{2}$ は、

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + 3 \left[\frac{1}{3 + 3 \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right] + \left[\frac{1}{3 + 3 \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right]^2}$$

となる。上式にあるように分母が常に $3 + 3(*) + (*)^2$ という形で繰り返されるため、

$$\sqrt[3]{2} \sim \left[1, \left(\overset{\cdot}{3} \right) \right]^{(1)}$$

と書く（詳細は後述する）。そして $\left(\overset{\cdot}{3} \right)$ を **フラクタル成分** と言い、このように構成された連分数を **2 次のフラクタル連分数** と呼ぶ。一般に $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の 2 次のフラクタル連分数は、

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[k, \left(\overset{\cdot}{3k^2} \right) \right]^{(\alpha)}$$

である。より一般の $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の $n-1$ 次のフラクタル連分数については 3.5 の **定理 1** で詳細に扱い、これを証明する。

次に、非線形ペル数列表現に関する結果について説明する。研究の切っ掛けは、 $\sqrt{k}$ とペル数列との関係性にあった。例えば、 $\sqrt{2}$ の近似分数列は、

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

であり、 $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ というペル数列になっている。これを行列で表現すると、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。一般に $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

である。式(2.1)を $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の **近似分数ペル表現** という。

これをヒントに $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数を考察した。その結果、 $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^2 + \alpha \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} a_{n-2} \\ a_{n-1} b_{n-2} \\ b_{n-1} b_{n-2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

となり、式(2.2)は $\sqrt{k}$ の近似分数表現(2.1)の一般化となっている。表現の形から私たちはこれを、

$\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現と呼ぶことにした。 $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の非線形ペル表現は 4.2 節で詳細に扱う。

3.1. 平方根の連分数の再考察

今回の私たちの研究は、 n 乗根のフラクタル連分数を構築することである。

まず、知られている $\sqrt{k}$ の連分数を再考察する。 $\sqrt{2}$ を例として考えてみる。連分数展開するために $\sqrt{2}$ を生成する式を $x^2 - 1 = 1$ とする。さらに変形して、

$$(x-1)(x+1) = 1 \Rightarrow x-1 = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

となる。最後の式から $\sqrt{2}$ の1次のフラクタル連分数が構成できる。すなわち、 $\frac{1}{1+x}$ の x に再び $1 + \frac{1}{1+x}$ を代入していくと、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

となる。上式からわかるように、整数部は1、分母は2が周期1で続いていく。これを、

$$\sqrt{2} \sim [1, \dot{2}]^{(1)}$$

と表す。以上のことから、 $\sqrt{2}$ の次数1のフラクタル連分数を得た。ここで、 $1 + \frac{1}{1+x}$ を $\sqrt{2}$ の連分数の生成式と呼ぶことにする。

さて、 $\sqrt{2}$ の連分数の生成式 $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ の式 $\frac{1}{1+x}$ に注目した。この式 $\frac{1}{1+x}$ は、黄金比 $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (φ は $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ を満たす唯一の正の解)の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1+\varphi}$ と同一のものである。黄金比 $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は、

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

というフラクタル連分数をもち、分母の1が周期することが特徴である。これをヒントに $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の連分数展開を構成し直す。ただし、 α は0より大きく、 k より小さい数である。

$x^2 = k^2 + \alpha$ の連分数展開の生成式を $x = k + \frac{\alpha}{k+x}$ とする。 x を $k + \frac{\alpha}{k+x}$ に置き換える。この操作を繰り返して1次のフラクタル連分数が得られる。例えば、

$$\sqrt{2} \sim [1, \dot{2}]^{(1)}, \quad \sqrt{3} \sim [1, \dot{2}]^{(2)}, \quad \sqrt{5} \sim [2, \dot{4}]^{(1)}, \quad \sqrt{8} \sim [2, \dot{4}]^{(4)}$$

である。そして、1次のフラクタル連分数の一般式は、

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim \left[k, 2k \right]^{(\alpha)}$$

となり、これらは周期 1 である。

3.2. 3 乗根のフラクタル連分数の構築

前節 3.1 の $\sqrt{A}$ の連分数の方法をヒントに、3 乗根も 3 次の超黄金比と関係があるのではないかと考えた。3 次の超黄金比 φ とは、 $\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ の唯一の正の解のことであり、これより φ の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1+\varphi+\varphi^2}$ を得る。そして、

$$\varphi = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\dots}\right) + \left(1 + \frac{1}{1+\dots}\right)^2}$$

となる。この式を基本にして新しい連分数展開を構成できないかと考えた。 $\sqrt[3]{2}$ で考えてみよう。 $\sqrt[3]{2}$ の連分数の生成式を $x = 1 + \frac{1}{1+x+x^2}$ と考えると、これは φ の連分数の生成式と関係があることが分かる。

$\sqrt[3]{2}$ の連分数の生成式から、 $\sqrt[3]{2}$ の連分数を計算すると次の式を得る。

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + 3 \left[\frac{1}{3+3\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2} \right] + \left[\frac{1}{3+3\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2} \right]^2}$$

上式にあるように $3 + 3$ はフラクタルに配置されているため、これを私たちは、

$$\sqrt[3]{2} \sim \left[1, \begin{pmatrix} \cdot \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^{(1)}$$

と書き、 $\sqrt[3]{2}$ の 2 次のフラクタル連分数と呼ぶことにした。同様に計算していくと、

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} &\sim \left[1, \begin{pmatrix} \cdot \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^{(2)}, \quad \sqrt[3]{9} \sim \left[2, \begin{pmatrix} \cdot \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right]^{(1)}, \quad \sqrt[3]{20} \sim \left[2, \begin{pmatrix} \cdot \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right]^{(12)} \\ \sqrt[3]{28} &\sim \left[3, \begin{pmatrix} \cdot \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} \right]^{(1)}, \quad \sqrt[3]{43} \sim \left[3, \begin{pmatrix} \cdot \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} \right]^{(16)}, \quad \sqrt[3]{65} \sim \left[4, \begin{pmatrix} \cdot \\ 48 \\ 12 \end{pmatrix} \right]^{(1)} \end{aligned}$$

が得られた。上の式から分かるように、2 次のフラクタル連分数の一般式は、

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[n, \begin{pmatrix} \cdot \\ 3k^2 \\ 3k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)}$$

であり、周期 1 である。

3.3. n 乗根のフラクタル連分数について

次に、 n 乗根の連分数を構築していこう。 n 乗根も平方根、3乗根と同じように n 次の超黄金比との関係を持つ。 n 次の超黄金比とは、 $\varphi^n + \varphi^{n-1} + \dots + \varphi - 1 = 0$ の唯一の正の解のことである。そして

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \varphi + \dots + \varphi^{n-1}}$$

を φ のフラクタル連分数の生成式とする。そして $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のフラクタル連分数の生成式を、

$$x = k + \frac{\alpha}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}}$$

と考える。このことから、私たちは $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する $n-1$ 次のフラクタル連分数を構築することができた。例えば4乗根と5乗根のフラクタル連分数は、

$$\sqrt[4]{k^4 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} \dot{4}k^3 \\ 6k^2 \\ 4k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)}, \quad \sqrt[5]{k^5 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} \dot{5}k^4 \\ 10k^3 \\ 10k^2 \\ 5k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)}$$

である。

3.4 $n-1$ 次のフラクタル連分数とパスカル三角形との関係

これまでの研究から、 $n-1$ 次のフラクタル連分数はパスカルの三角形と関係があることが理解で

きる。フラクタル連分数表示から分かるように、フラクタル成分の $\begin{pmatrix} \dot{2}k \\ 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{3}k^2 \\ 3k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{4}k^3 \\ 6k^2 \\ 4k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{5}k^4 \\ 10k^3 \\ 10k^2 \\ 5k \end{pmatrix}$ の中

の k^α の係数が $\begin{pmatrix} \dot{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{4} \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{5} \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ となっているのである。

パスカルの三角形

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

以上のことから私たちは、以下の定理を証明することができた。

定理 1. $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する $n-1$ 次のフラクタル連分数は、

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} \cdot \\ {}_nC_1 \cdot k^{n-1} \\ {}_nC_2 \cdot k^{n-2} \\ \vdots \\ {}_nC_{n-1} \cdot k \end{pmatrix} \right]^{[\alpha]}$$

である。

(証明) $\omega = \sqrt[n]{k^n + \alpha} - k$ とおくと、 $(\omega + k)^n = k^n + \alpha$ となる。左辺を二項展開して、

$$\begin{aligned} & \omega^n + {}_nC_{n-1}k\omega^{n-1} + \cdots + {}_nC_1k^{n-1}\omega + k^n = k^n + \alpha \\ \Rightarrow & \omega^n + {}_nC_{n-1}k\omega^{n-1} + \cdots + {}_nC_1k^{n-1}\omega = \alpha \\ \Rightarrow & \omega(\omega^{n-1} + {}_nC_{n-1}k\omega^{n-2} + \cdots + {}_nC_1k^{n-1}) = \alpha \\ \Rightarrow & \omega = \frac{\alpha}{{}_nC_1k^{n-1} + {}_nC_2k^{n-2}\omega + \cdots + {}_nC_{n-1}k\omega^{n-2} + \omega^{n-1}} \end{aligned}$$

よって、定理 1 は証明された。(証明終)

4.1. 平方根の近似分数表現

以後、 $\sqrt[n]{A}$ の近似分数を考察する。 n 次の超黄金数 φ が n ・フィボナッチ数列の分数列で近似しているという事実がある。このことを念頭に研究を進めた。

まず、黄金比 φ を考える。 φ の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1+\varphi}$ より漸化式

$$\varphi_n = \frac{1}{1 + \varphi_{n-1}}$$

を作る。これより近似分数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

を得る。この分数列は、フィボナッチ数列(1,1,2,3,5,...)から得られたものになっている。これを近似分数表現にすると、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{近似分数表現})$$

となる。私たちはこの行列表現に注目して研究を行った。

$\sqrt{2}$ の場合を考えてみる。 $\sqrt{2}$ の連分数の生成式 $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ より、漸化式

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}}$$

を考える。ここで、初期値を $x_0 = 0$ とし、順次計算していくと、

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1+0} = \frac{2}{1}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1+2} = \frac{4}{3}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = \frac{10}{7}, \quad \dots$$

となり、その近似分数列は、

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

となる。近似分数表現に直すために a_n と b_n について解くと、

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{b_{n-1}}} = 1 + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

という近似分数表現を得る。これを $\sqrt{2}$ の**近似分数ペル表現**という。

$\sqrt{2}$ の近似分数について精度を調べてみた。

$\sqrt{2}$ の近似分数表

n	1	2	3	...	10
$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{7}$	...	$\frac{4756}{3363}$
精度 [小数点第 k 位]	0	0	1	...	6

更に調査した結果、 n 番目の分数についての精度は少数点第 $\frac{n}{2}$ 位くらいまでである。

同様に、 $\sqrt{5}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{10}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

となった。これらの n 番目の分数についての精度も少数点第 $\frac{n}{2}$ 位くらいまでである。一般に、 $\sqrt{k^2 + \alpha}$

の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

であることが分かった。以上見てきたように近似分数表現の精度はそれ程良くはないが、行列表現

を持つという点が特徴である。

4.2. 3乗根の近似分数表現

3乗根の近似分数表現を構成していく。

まず、私たちはニュートン法を使って連分数を作る研究があることを知った。「ニュートン法から得られる平方根、立方根、4乗根の連分数表示」(堀口俊二、鈴木武雄. 新潟産業大学経済学部. 2012)によると、 $\sqrt[3]{\alpha}$ の生成式を、

$$x = 1 - \frac{2}{x + 2 + \frac{\alpha n}{\frac{2x^n - \alpha nx^2 + \alpha(n-2)}{x^3 + 2x^2 + x}}}$$

と考えると、近似分数列を作っていくものである。しかし、この式は複雑なため私たちは不満を持った。以下に、私たちが独自に考案し構築した $\sqrt[3]{k}$ の連分数展開から、近似分数の行列表現を研究する。

まず、黄金比 φ の近似分数を復習する。 φ の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1 + \varphi_3 + \varphi_3^2}$ から漸化式

$$\varphi_n = \frac{1}{1 + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\varphi_{n-2}}$$

を作る。これより、

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{13}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

を得る。この分数列は、3・フィボナッチ数列(1,1,2,4,7,13...)から得られたものになっている。そして、近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{pmatrix}$$

となる。

$\sqrt[3]{2}$ の場合を考える。 $\sqrt[3]{2}$ の連分数の生成式 $x = 1 + \frac{1}{1+x+x^2}$ から、漸化式

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2}}$$

を作る。ここで、 $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ とおき、順次計算していくと、

$$x_2 = \frac{1}{1+(0+1)+(0+1)(0+1)} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{1+(\frac{1}{3}+1)+(\frac{1}{3}+1)(0+1)} = \frac{3}{9}, \quad \dots\dots$$

となり、近似分数列

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{9}, \frac{66}{39}, \frac{9972}{8451}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots \quad (\text{近似分数表現})$$

を得る。

$\sqrt[3]{2}$ の近似分数表

n	1	2	3	4	...	9
$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{66}{39}$	$\frac{9972}{8451}$	...	略
精度 [小数点第 j 位]	0	0	1	1	...	4

これらの n 番目の分数についての精度も少数点第 $\frac{n}{2}$ 位くらいまでであった。 a_n と b_n について解くと、

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{b_{n-1}b_{n-2}}} = 1 + \frac{b_{n-1}b_{n-2}}{b_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}} \\ &= \frac{2b_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}}{b_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

という近似分数表現を得た。これを私たちは $\sqrt[3]{2}$ の **近似分数非線形ペル表現** と呼ぶことにした。

同様に計算すると、例えば $\sqrt[3]{9}$ の近似分数非線形ペル表現は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

であり、 $\sqrt[3]{30}$ の近似分数非線形ペル表現は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 30 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

となる。一般に、 $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^2 + \alpha \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

であることが分かった。

4.3. n 乗根の近似分数非線形ペル表現

同様に、 $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ と $\sqrt[5]{k^5 + \alpha}$ を研究した結果、次の公式を得た。

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}b_{n-4} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4} \end{pmatrix}$$

これらの結果から、より一般的な近似分数非線形ペル表現を推測することは簡単である。例えば、 $\sqrt[6]{k^6 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 & k^6 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}b_{n-5} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \end{pmatrix}$$

$\sqrt[7]{k^7 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 & k^6 & k^7 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 & k^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5}a_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \end{pmatrix}$$

である。

5. 今後の方針

今回は周期 1 のフラクタル連分数を研究し、 n 乗根の周期 1 の連分数の拡張としてフラクタル連分数を構築することに成功した。しかし、平方根に関しては正則連分数においても周期性を持つ。すなわち、分子を常に 1 として連分数を構成しても周期性がある。

平方数の連分数についてはペル方程式の解法と関係が深い、そのため近似分数ペル表現という言葉を使用した。私たちが発見した近似分数非線形ペル表現もなんらかの方程式の解法に関係があると考えている。