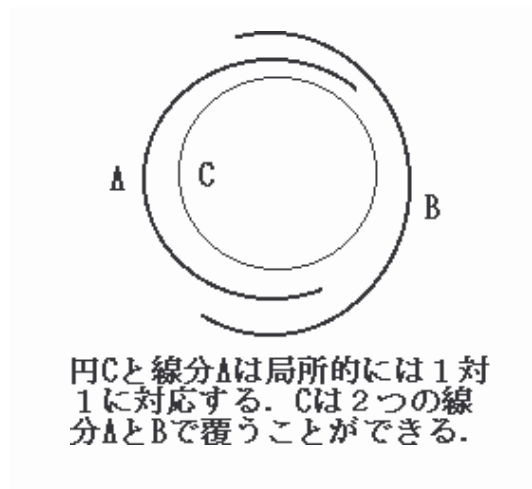


比の空間の話

1. はじめに.

円をイメージしよう. 円上の1点を取り除いて, 残った曲線を延ばすと線分になる. もし1本の線分と円の一部が1対1になるようにして何本かの線分で円を覆うことを考えると少なくとも2本の線分が必要になる. 線分は1次元である. だから円の次元は1次元ということになっている.

球を考えよう. 球もやはりいくつかの平面を曲面に沿って曲げながら張り合わせ, その表面を覆うことができる. 平面は2次元である. だから球の次元は2次元といわれる. 一般にいくつかの n 次元空間を張り合わせてできる曲がった空間のことを, n 次元多様体とよんでいる. 円は1次元多様体であり, 球は2次元多様体である.



我々はここで, 比で表される空間を見ていく. これも多様体である. 比の空間を理解すると, ひょっとすると我々の見ている空間は実は比の空間の一部なのではないだろうかと思うようになる.

2. 射影直線.

普通 xy 平面における座標を, (a,b) で表す. これを $(a:b)$ と比で表したらどうなるであろうか. これが話の始まりである.

まず $(a:b)$ という比を考えているのだから, $(0:0)$ などという点は存在しない.

$b \neq 0$ とき, $x = \frac{a}{b}$ とおく. そうすると, x と $(a:b)$ は $b \neq 0$ のところでは, 同

じである. たとえば, $(3:5)$ と $x = \frac{3}{5}$ は同じことを意味する. a, b はどんな値で

もよいのであるから, x は所謂 x 軸全体 (つまり直線) をあらわす. これは円の

場合と違って少しも曲がっていない真の直線である. $a \neq 0$ とき, $u = \frac{b}{a}$ とおく

と, u も直線全体を動き回る. 注意すべきことは, $a \neq 0$, $b \neq 0$ のところにお

いて, (a,b) は一方で $x = \frac{a}{b}$ であり, 他方で $u = \frac{b}{a}$ である. しかしこれらは表現

の違いはあっても同じ点を表している. x と u には $x = \frac{1}{u}$ という関係がある. 以

上のことから, 比 $(x:y)$ で表される空間は, x で表される直線と, u で表される

直線の 2 本で覆われている多様体である. そして, $a \neq 0$, $b \neq 0$ というたいて

いの場所では, $x = \frac{1}{u}$ という関係で同じ点を表している. $(x:y)$ で表される空間

を 1 次元射影空間 (射影直線) という. そして x と u を局所座標という. また x

局所座標からみると, $(1:0)$ という点は存在しない. $(1:0)$ を無限遠点という.

この表現を使うと, 1 次元射影空間は, 普通の直線に無限遠点を付け加えてでき

た直線ともいえる.

3. 射影平面.

比 $(a:b:c)$ で表される空間を考えよう. $c \neq 0$ のとき, $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ とおく.

この x, y の組 (x, y) を考えると, これは普通の xy 座標平面を表している. これ

も球の場合と違って, 少しも曲がっていない真の平面である. 同様に $b \neq 0$ のと

き, $s = \frac{c}{b}$, $t = \frac{a}{b}$ とおく. 組 (s, t) を考えると, これは普通の st 座標平面を表し

ている. さらに $a \neq 0$ のとき, $v = \frac{b}{a}$, $w = \frac{c}{a}$ とおく. 組 (v, w) を考えると, こ

れは普通の vw 座標平面を表している. そして, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ のところ

では, $x = \frac{t}{s} = \frac{1}{w}$, $y = \frac{1}{s} = \frac{v}{w}$ という関係で同じ点を表現している.

$(a:b:c)$ で表される空間を **2 次元射影空間 (射影平面)** とよんでいる. 射影平面は, 3つの平面で張り合わさってできている多様体である. 一方 xy 座標で表すことができない点は, $(a:b:0)$ である. $(a:b:0)$ で表される集合は射影直線でもある. この射影直線を**無限遠直線**という. このことから, 射影空間は, xy 平面に無限遠直線を付加してできた平面だともいえる. ところで, st 座標からみると, $(a:0:c)$ で表される集合が無限遠直線になり, vw 座標からみると, $(0:b:c)$ で表される集合が無限遠直線となる. このことから射影平面上には, 3つの無限遠直線が存在し, それらは, $(1:0:0)$ と $(0:1:0)$ と $(0:0:1)$ で交わっている. このことより, 3つの無限遠直線のことを**無限遠三角形**とよぶこともある.

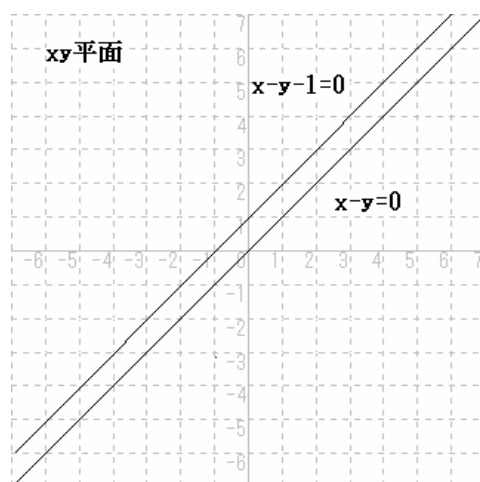
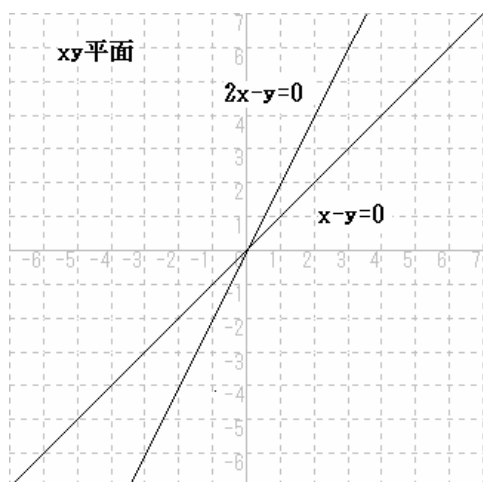
4. 射影平面上の直線.

射影平面は、 xy 平面と st 平面と vw 平面の 3 つが張り合わさってできている.

そして、多くの部分は、 $x = \frac{t}{s} = \frac{1}{w}$, $y = \frac{1}{s} = \frac{v}{w}$ という関係で同じ点を表している.

射影平面の一部分である xy 平面は我々が普通意識している平面である. この意味からも、「実は我々は射影平面の中にいて、普通平面といっているのは、その中の一部を意識しているだけなのではないだろうか?」という感じをもつ. それはそれとして、 xy 平面の直線を考えよう.

まず $x - y = 0$ と $2x - y = 0$ という直線の方程式を考える. この 2 つの直線は、原点で交わっている. ところが、 $x - y = 0$ と $x - y - 1 = 0$ という 2 つの直線は平行である. したがって交わることはない.



しかしこれは今見ている xy 平面だけの結論である. $x - y = 0$ と $x - y - 1 = 0$

を比の座標で表してみると, $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ であったので, $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = 0$ と

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} - 1 = 0$ となる. c をはらうと

$$a - b = 0, \quad a - b - c = 0$$

となる. この式が射影平面の直線の方程式といえる. 一般に射影平面の直線の

方程式は, $(a:b:c)$ という座標を使うと,

$$la + mb + nc = 0$$

である. ここで l, m, n はある数である.

そこで, 先ほどの直線の式を st 座標で表してみよう. $b \neq 0$ より,

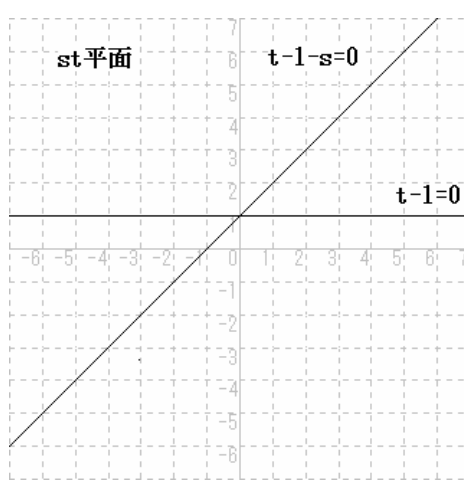
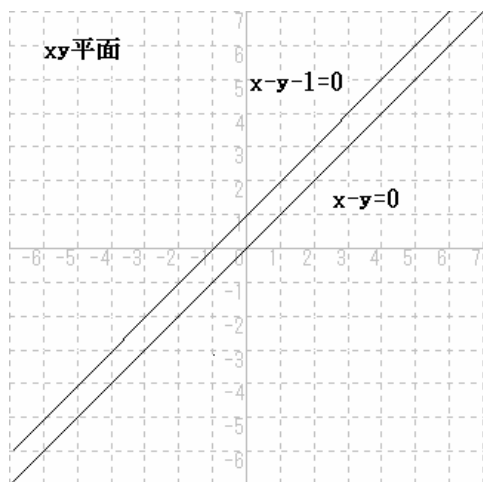
$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = 0$, $\frac{a}{b} - \frac{b}{b} - \frac{c}{b} = 0$ で, $s = \frac{c}{b}$, $t = \frac{a}{b}$ なので,

$$t - 1 = 0, \quad t - 1 - s = 0$$

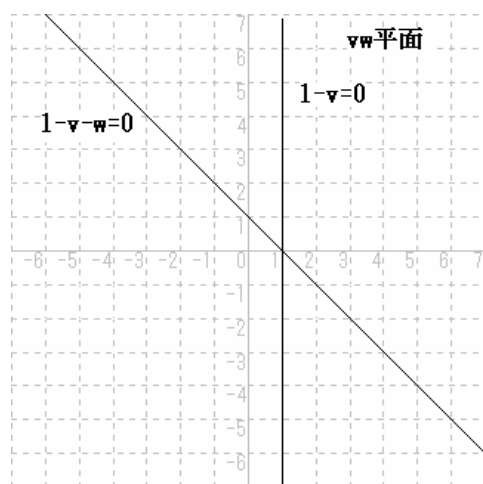
という式を得る. これは $(s, t) = (1, 0)$ という点で交わっていることを意味する.

$(s, t) = (0, 1)$ という点は比の座標では, $(1:1:0)$ という点であり, これは xy 座

標からみたときの無限遠直線上にある点である.



では vw 座標でみてみると，直線の方程式は， $v = \frac{b}{a}$ ， $w = \frac{c}{a}$ なので，
 $1-v=0$ ， $1-v-w=0$ であり，今度は $(v, w) = (1, 0)$ で交わっている．しかし
 $(v, w) = (1, 0)$ は比の座標では $(1:1:0)$ であり，先ほどと同じ点である．このこと
 から， xy で平行であると思われた 2 つの直線 $x-y=0$ と $x-y-1=0$ は，実は
 無限遠直線上の点 $(1:1:0)$ で交わっていることがわかった．



他の平行な直線についても試して欲しいのだが，どんな平行線も必ず交わる。
 したがって **2 つの直線は必ず 1 点で交わる**．

遠近法といわれる絵の技法がある．それは 2 つ平行な線が遥かかなたで交わっ
 ているように描く技法である．この技法は射影平面を意識しているのではないの
 かなあと思いたくなる．

問. 2つの直線 $2x+3y=0$ と $2x+3y-4=0$ の交点を射影空間の立場から論じよ.

5. 射影平面上の2次曲線.

今度は放物線 $y=x^2$ を考えよう. これもやはり xy 平面での話である. これを比の座標で表してみる. $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ だったので, $\frac{b}{c}=\left(\frac{a}{c}\right)^2$ より, c をはらって,

$$bc=a^2$$

という式を得る. これが放物線の射影空間における式である. そこでこの式を st

座標を使って表してみよう. $b \neq 0$ のとき, $\frac{c}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ と変形でき,

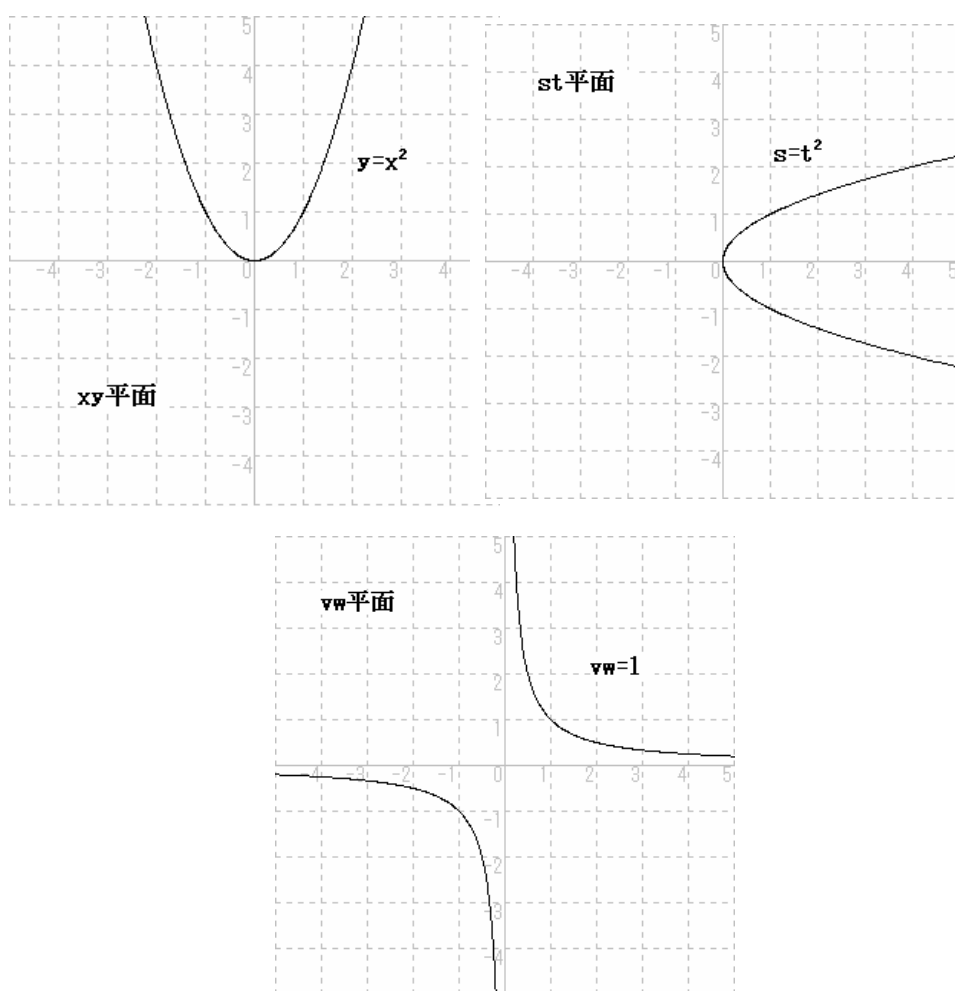
$s=\frac{c}{b}$, $t=\frac{a}{b}$ であったので, $s=t^2$ を得る. これもやはり放物線の式である.

では vw 座標で見てみよう. $a \neq 0$ なので, $\frac{b}{a} \frac{c}{a}=1$ と変形でき, $v=\frac{b}{a}$, $w=\frac{c}{a}$

だったので, $vw=1$ がなりたつ. これより, $w=\frac{1}{v}$ を得るが, これは双曲線の式である.

以上のことをまとめると, $y=x^2$ という放物線は, st 平面では, $s=t^2$ とい

う放物線であり， vw 平面では， $vw=1$ という双曲線であるということがわかった．つまり， $y=x^2$ という放物線は見る場所によって，放物線になったり，双曲線になったりするのである．



しかしもう少し今の結果を議論してみよう． $y=x^2$ と $s=t^2$ は共に放物線ではあるが，それぞれ $y=0$ という直線と， $s=0$ という直線にそれぞれの原点で接

している．ところがそれぞれの原点は， $(0:0:1)$ と $(0:1:0)$ と異なっている．このことは何を意味するのであろうか？ 想像力を働かせて考えて欲しい．ひょっとすると，この放物線は実は円，または楕円であって，その一端が放物線として現れているのではないだろうか．

そこで $y = x^2$ を y 方向に $+1$ だけ平行移動した $y = x^2 + 1$ を考えてみよう．そうすれば，この曲線は xy 座標の原点を通らない，つまり st 座標からみた無限遠直線を通らないのだから， st 座標で全体の形が見えるのではないだろうか？

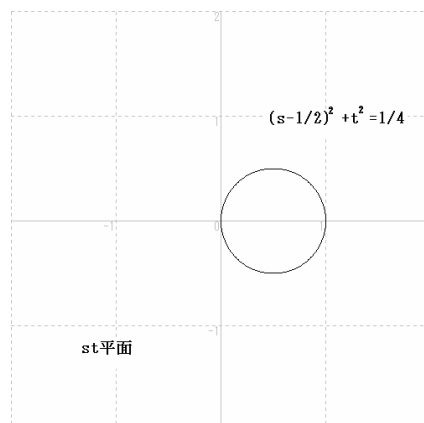
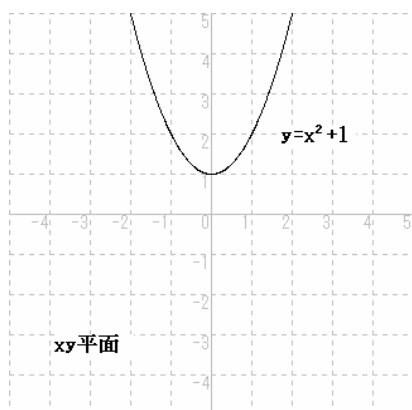
この式は比の座標では， $\frac{b}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1$ なので， c をはらって，

$$bc = a^2 + c^2$$

という式を得る．これを st 座標で考えると， $s = t^2 + s^2$ を得る．これを变形すると，

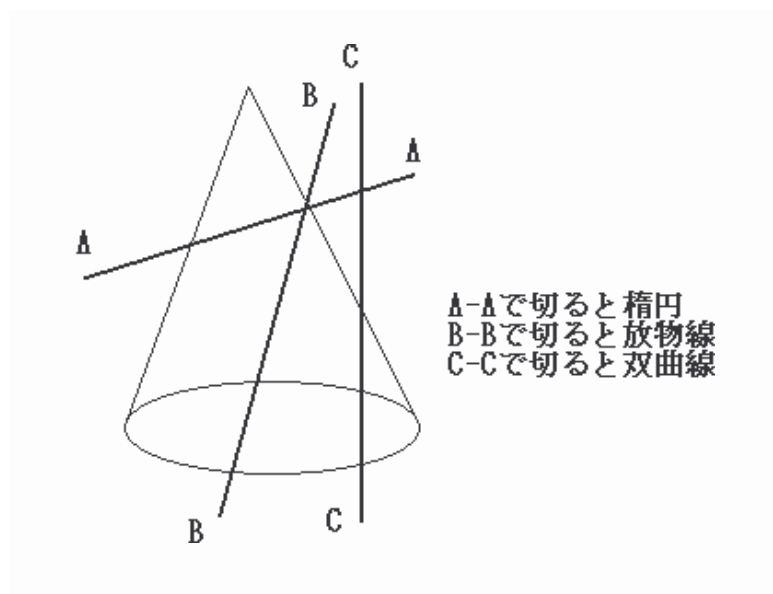
$$t^2 + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

という式を得る．これは $(s, t) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を表している．



つまり射影空間の立場でいえば、われわれは円の一部を見て、放物線だといったり、双曲線だといったりしていたのである。したがって、円と放物線と双曲線は同じものだったといえるのである。

古代ギリシアのアポロニウスという数学者は、あるとき円錐を見て、はっと思ったそうである。それは、円錐を平面で真横に切れば、そこに円が出てくる。少し斜めにすれば、楕円が出てくる。円錐の錐に平行に切れば放物線が出てくる。円錐の底面に垂直に切れば双曲線が出てくる。アポロニウスはもしかすると、射影平面の存在に気が付いていたのではないだろうか。



6. 曲線と曲線の交点数.

セクション4で射影平面の直線の話にふれた. このときに得た結論は, 「2つ直線は必ずただ1点で交わる.」ということだった. 一般の曲線と曲線の交点についてはどうであろうか.

まずは, 2次曲線と直線について考えてみよう. ところで, 今2次曲線と書いたが, 一般に曲線とは, 代数方程式 (多項式で書かれた方程式) $f(x, y) = 0$ を満たす (x, y) の集合のことである. n 次とは, 代数方程式 $f(x, y) = 0$ があって, そのベキを眺めたとき, ベキが一番大きいものをいう. 例えば, $y - x^2 = 0$ だったら2次曲線であり, $xy^2 - x^2 + 3y = 0$ だったら, xy^2 のベキが合計3なので3次曲線である.

2次曲線 $y - x^2 = 0$ と直線の交点について考えてみよう. 一番簡単な直線は x 軸である. そのとき $y - x^2 = 0$ と x 軸は1点で交わっているように見えるが, しかしよく見るとこの2つは原点で接している. 接しているということを式で理解するにはどうすればよいだろうか.

交点を調べたいのだから, 方程式 $y - x^2 = 0$ と $y = 0$ を両方満たす点を計算すれば, よい. そうすれば, $x^2 = 0$ という式を得る. これより解は, $x = 0$ と $x = 0$ であることがわかる. つまり $x = 0$ という解は重複した解である. この意味で, $y = x^2$ と x 軸は原点で2回 (2重に) 交わっているのである.

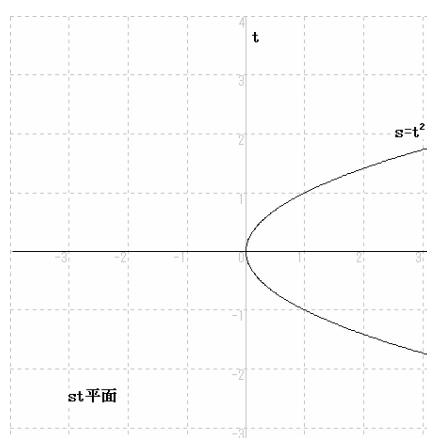
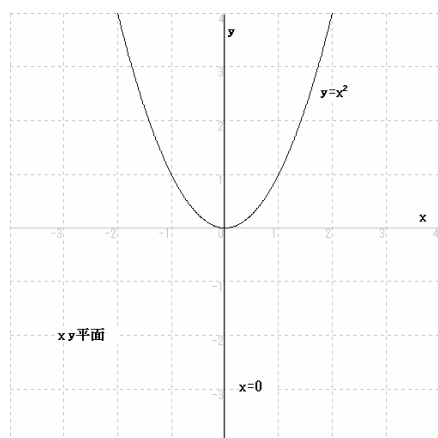
$y - x^2 = 0$ と直線 $y - x = 0$ はどうなっているのであろうか. これも2つの連立方程式を解けば, その解が, $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ の2点であることがわかる.

では、 $y-x^2=0$ と $y=-1$ ではどうだろうか。このときは、複素数体で考えれば $x=\pm i$ と2つ解がある。 $y-x^2=0$ と $x=0$ ではどうだろう。このときは解が $(x,y)=(0,0)$ の1つだけしかないように思える。しかし今我々は射影平面の中にいるのである。別の座標で考えてみよう。

st 座標で考えよう。その前にそれぞれの式をまず比の座標の式に書き換えると、 $bc-a^2=0$ 、 $a=0$ となる。 st 座標は、 $b\neq 0$ のところで、 $s=\frac{c}{b}$ 、 $t=\frac{a}{b}$ としたので、

$$s-t^2=0, \quad t=0$$

となる。この連立方程式を解くと、 $(s,t)=(0,0)$ を得る。つまり $(0:0:1)$ 、 $(0:1:0)$ の2点で交わっているのである。



以上のことから想像される結論は、「どんな2次曲線も直線とは必ず2点で交わるのではないだろうか」ということだ。これは正しい。これから推測するに、「どんな n 次曲線も直線とは、必ず n 個で交わる」が成立つのではないだろうか。こ

れも正しい。実はベズーの定理といわれるものがある。

ベズーの定理

相異なる n 次曲線と m 次曲線は、 nm 個で交わる。

7. パスカルの定理.

パスカルの定理というものがある。

パスカルの定理

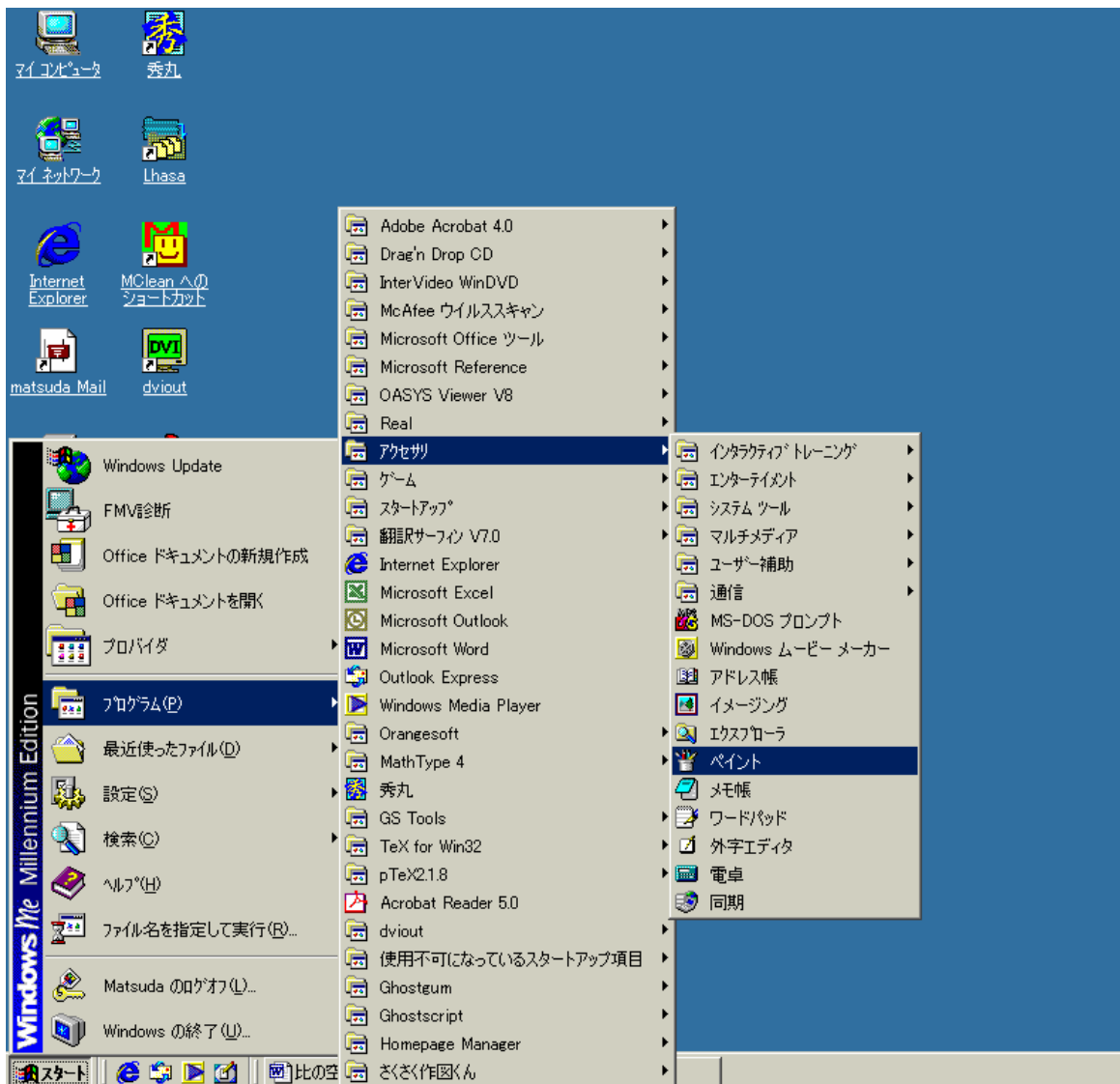
2 次曲線 (2 直線ではない) の上に 6 点とる。その 6 点に適当に 1~6 までの番号をつける。次の手順を行う。

- ① 1 と 5 を通る直線と、2 と 4 を通る直線を引き、その交点を P とする。
- ② 2 と 6 を通る直線と、3 と 5 を通る直線を引き、その交点を Q とする。
- ③ 1 と 6 を通る直線と、3 と 4 を通る直線を引き、その交点を R とする。

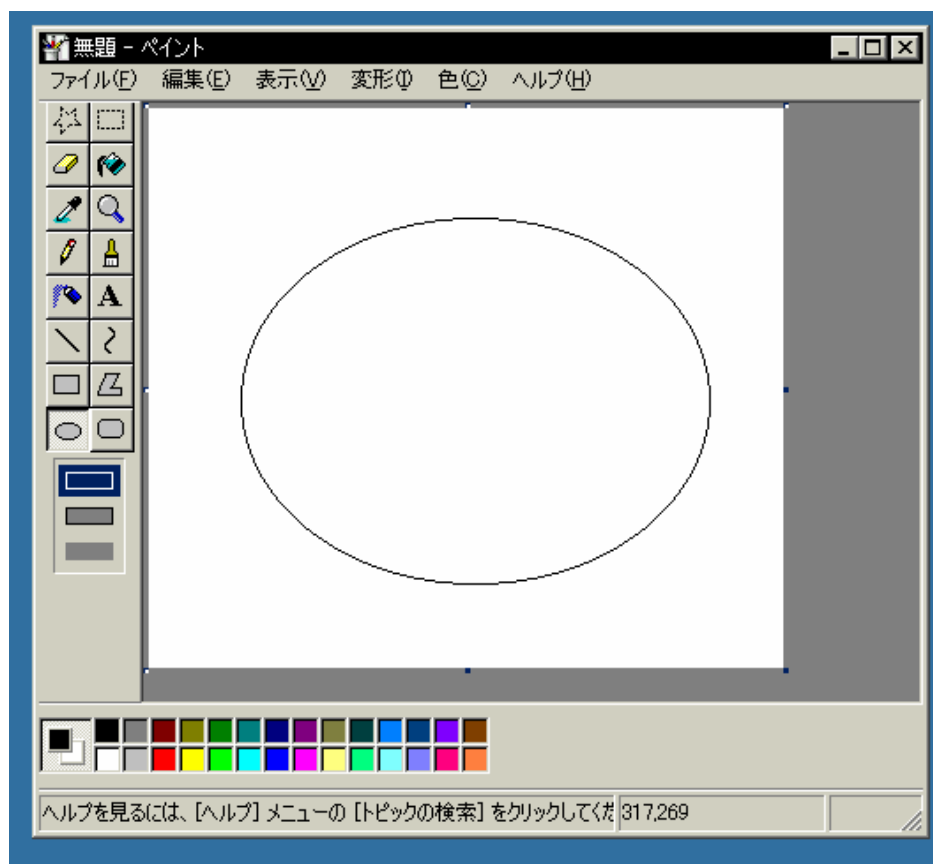
このとき、PQR は一直線上にある。

この定理を実感するために、Windows を使おう。使用するのは Windows のペイントというソフトである。まずコンピュータを起動させる。次に「スタート」ボタンをクリックする。「プログラム」をクリックする。「アクセサリ」をクリックする。その中に「ペイント」があるはずだ。ペイントをクリックすると、ペイ

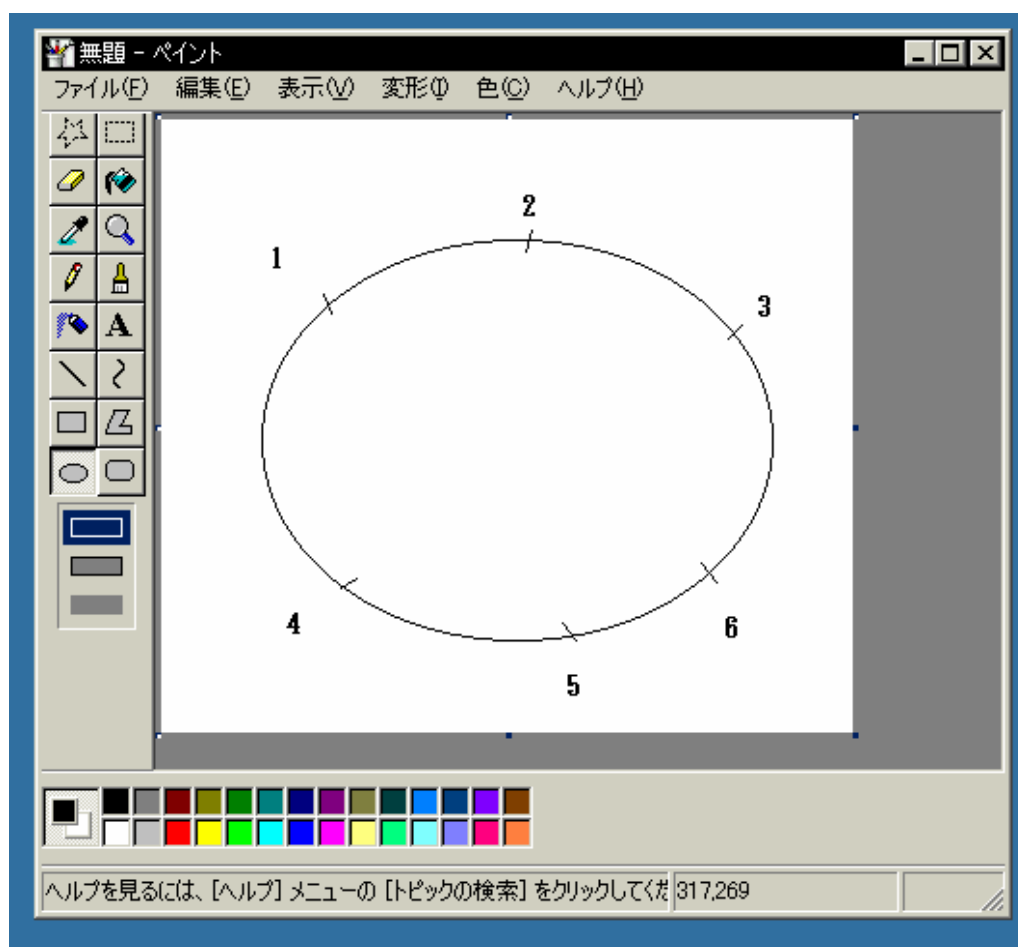
ントの画面が現れる.



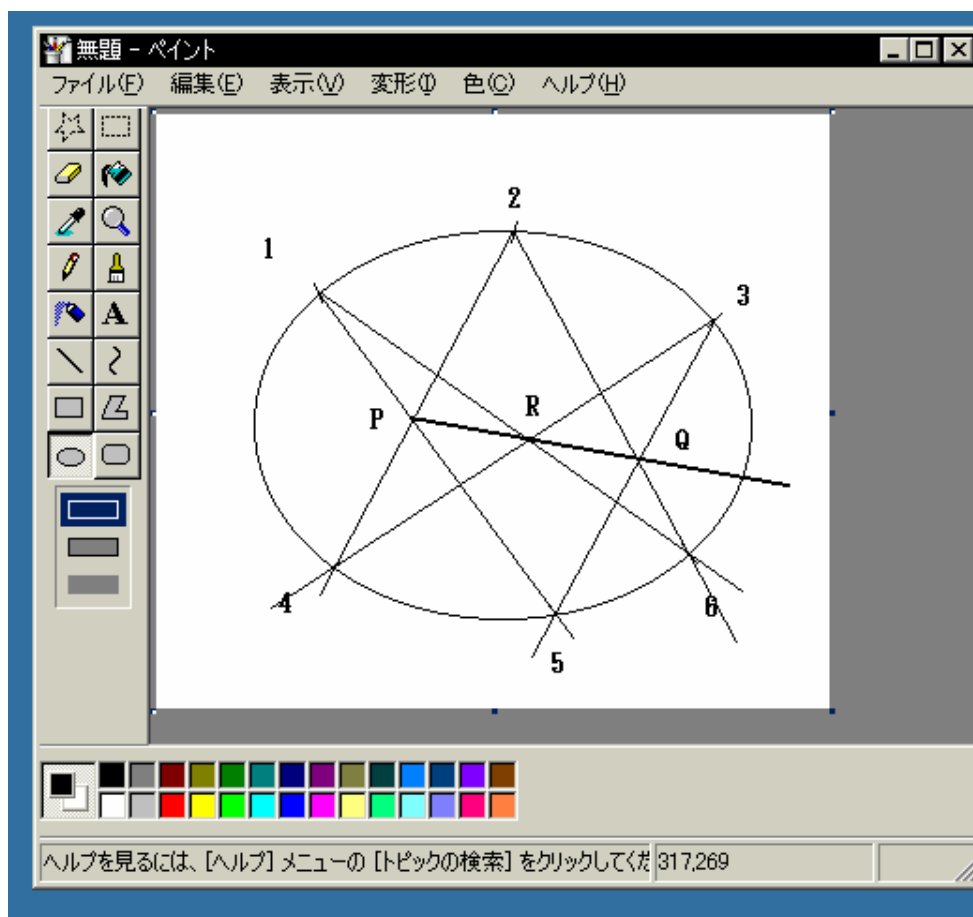
ペイントの画面が現れたなら、楕円を描くマークをクリックする。そして、プレートに楕円を描く。楕円は2次曲線である。なぜなら直線との交点が最大2つあるからである。



次に直線を描くマークをクリックして、適当に楕円の周上に適当に 6 点印をつける。「A」というマークをクリックすれば、文字が書けるので、印をつけたところに番号を付ける。



直線のマークをクリックして、1と5を結ぶ、2と4を結ぶ、その交点がPである。2と6を結ぶ、3と5を結ぶ、その交点がQである。1と6を結ぶ、3と4を結ぶその交点がRである。PとQを直線で結んでみよう、その直線はRを通るはずだ。これがパスカルの定理である。



パスカルの定理によると、以上のことは、円や楕円に限らず、放物線や双曲線、
2 直線でもいえるのである。

8. パスカルの定理の証明.

パスカルの定理を証明する前に、準備すべき点がいくつかある.

まず, $f(x, y) = 0$ のことを曲線とよんだが, $f(x, y)$ をこの曲線の定義多項式という. 例えば, $y - x^2 = 0$ は (xy 座標では) 放物線であるが, この定義多項式は, $y - x^2$ である. 次に例えば, $(y - x^2)(y^2 + x^2 - 1) = 0$ という曲線を考えよう. 定義多項式は, $f(x, y) = (y - x^2)(y - xy + x)$ である. このとき, $f(x, x^2) = 0$ になる. これは $f(x, y)$ が $y - x^2$ という因子 (因数?) を含んでいるから当然である. 図形的には, $(y - x^2)(y^2 + x^2 - 1) = 0$ という曲線は $y - x^2 = 0$ と $y^2 + x^2 - 1 = 0$ という曲線 (つまり円) になる.

さて, 2つの代数方程式 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ を考える. もし点 (a, b) がこの2つの方程式の解であるならば, $f(a, b) = 0$, $g(a, b) = 0$ をみたす. これは, $f(a, b) = 0$, $g(a, b) + f(a, b)h(a, b) = 0$ をみたすことと同じであるといえる.

以上で証明のための準備を終える.

(パスカルの定理の証明)

先ず 2 次曲線を K とし, その方程式を $K(x, y) = 0$ とする. ここでは, $K(x, y) = y - x^2$ として証明する. 実はこの場合に証明すれば多くの場合は十分なのである. (例外的な場合は 6 点のうち 1 点を無限遠点にとった場合である.) なぜならば, 前に議論した通り, この方程式は, 放物線でもあり, 円でもあり,

双曲線でもあった．その他の曲線（例えば楕円）について証明したければ， x 方向と y 方向のスケールを変えればよい．このようにスケールを変えた場合 2 次曲線自体は上下左右に伸びたり縮んだりするが，直線の状況は変化しない．このような理由から $K(x, y) = y - x^2$ として考えればよい．

さて，2 次曲線の 6 点の点 i と点 j を結んだ直線の定義多項式を， L_{ij} とする．

そして， $G(x, y) = L_{15}L_{26}L_{34}$ ， $H(x, y) = L_{24}L_{35}L_{16}$ とする． $G(x, y), H(x, y)$ は共に 3 次式である．さらに， $G(x, y) = 0$ を定義方程式とする曲線 (3 直線) を G ， $H(x, y) = 0$ を定義方程式とする曲線 (3 直線) を H とおく． G と H はベズーの定理より，9 つの点で交わる．それらの座標を， (a_i, b_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, 9$) とし， $P = (a_7, b_7)$ ， $Q = (a_8, b_8)$ ， $R = (a_9, b_9)$ とする． (a_i, b_i) ($i = 1, 2, \dots, 6$) の 6 点は 2 次曲線 K に含まれる 6 点でもある．

いま $R(x, x^2)$ とすると， R には K が含まれていないので零ではない．しかし， R には， K の 6 つの点が含まれているので，その 6 つの点の x 座標を $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ とすると，

$$R(x, x^2) = t(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)(x - a_6)$$

(t はある数である) と書ける．同様に， $H(x, x^2)$ は零ではない．そして，

$$H(x, x^2) = r(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)(x - a_6)$$

(r はある定数である) と書ける．以上より，

$$G(x, x^2) - \frac{t}{r} H(x, y) = 0$$

が成り立つ．証明に入る前に注意したように，この式は $K(x, y) = (y - x^2)$ で割り切れることを意味する．つまり，

$$G(x, y) - \frac{t}{r} H(x, y) = (y - x^2) L(x, y)$$

と書ける．ここで，左辺は3次式， $(y - x^2)$ は2次式だから， $L(x, y)$ は1次式である．

さて G と H の9つの交点 (a_i, b_i) ($i = 1, 2, \dots, 9$) は， $G(a_i, b_i) = 0$, $H(a_i, b_i) = 0$ をみたす．よって証明の前に注意したように，

$$G(a_i, b_i) = 0, \quad G(a_i, b_i) - \frac{r}{t} H(a_i, b_i) = 0$$

をみたす．よって，

$$G(a_i, b_i) = 0, \quad K(a_i, b_i) L(a_i, b_i) = 0$$

を満足する． $K(a_i, b_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) だったので， $L(a_i, b_i) = 0$ ($i = 7, 8, 9$)

でなければならない． $L(x, y) = 0$ は直線をあらわすので， P, Q, R は一直線上にあ

る．これでパスカルの定理が証明された．（例外的な場合は各自証明せよ．）

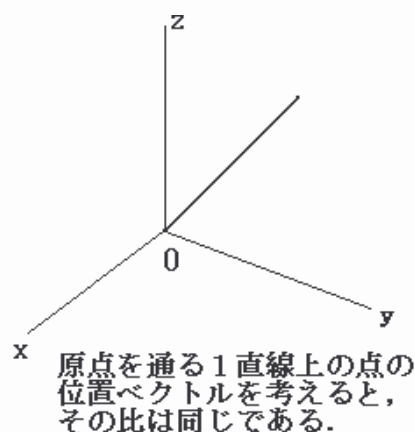
9. 射影平面のイメージ.

今まで取り上げてきた射影平面の話を、まとめると、

1. 射影平面上の平行な直線は無限遠点で交わる.
2. 放物線は、見る位置によっては、楕円（円）でもあり、双曲線でもある.
3. パスカルの定理という美しいものがある.

しかし、我々が射影平面をイメージするとき、これまでは常に3つの普通の平面の張り合わせというイメージで考えてきた. そこでもう少し射影平面の全体像を明らかにしようと思う.

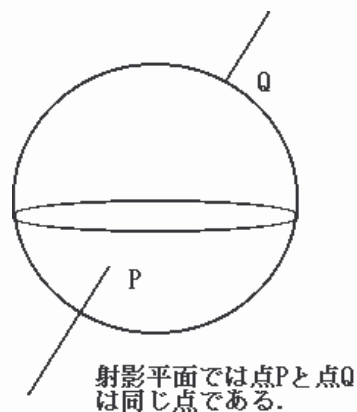
射影平面は、 $(x:y:z)$ という比の空間の話であった. 3つの比を考えることは、空間上の原点を通る1つの直線を考えることである. つまり1直線の方法ベクトルを (x,y,z) とすると、この直線上の点の位置ベクトルは、 $t(x,y,z)$ (t はある数) と書けることを、「4次元の世界」の中で述べた. したがって、この直線上の点の位置ベクトルはどれも比として $(x:y:z)$ とあらわされるのである. この比が違えば当然原点を通過する違った直線を意味する.



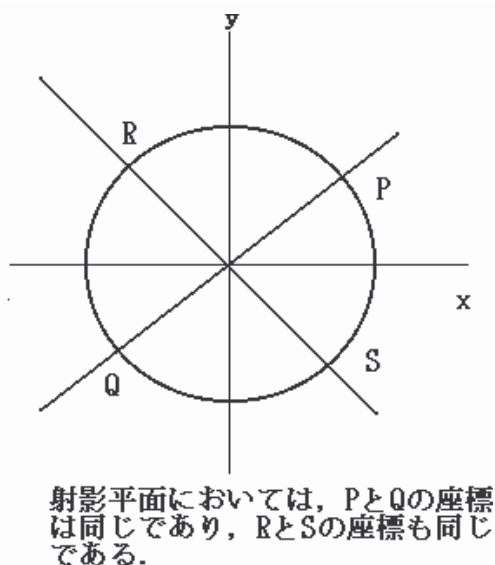
そこで、原点を中心とする半径1の球を考える。そうするとこの球と直線は必ず2点で交わる。つまり普通は北半球で1点と南半球で1点交わる。この2点の比は等しい。したがって射影平面は北半球だけを考えればよい。

では赤道上の点はどうであろうか。

そのためには xy 平面でその球を切ってみればわかる。すると、第1象限で交わった直線は第3象限で交わり、第2象限で交わった直線は第4象限で交わっている。よって赤道上下では、第1象限と第2象限のみを考えればよい。

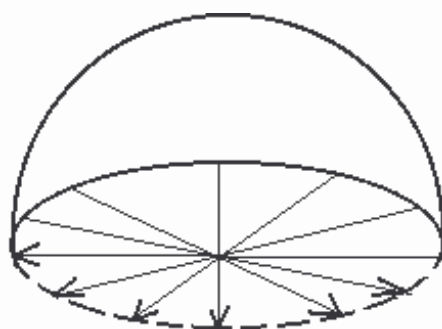


これで射影平面は北半球と赤道上の半分を含は含まないものとしてイメージされた。しかし、今までのことから想像するに、射影平面はどこかある場所で途切れているはずがない。つまり、射影平面は閉じているはずである。そこで、もう一度赤道上の点について見ていこ



う．前述べたとおり，赤道上では，第1

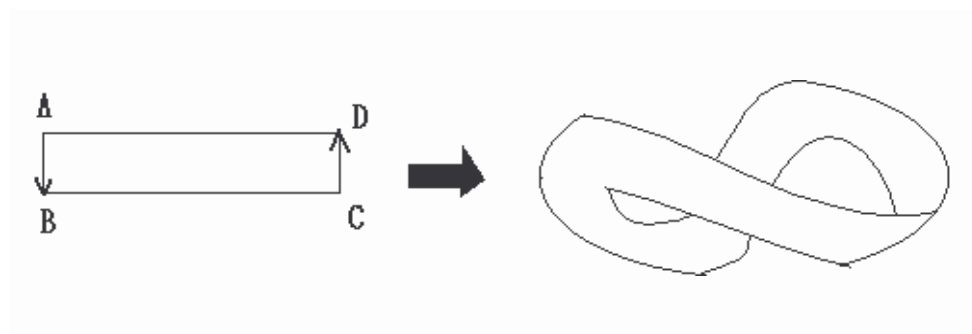
象限の点と第3象限の点と同じものであり，第2象限の点と第4象限の点と同じものである．このことから，同ものは同じものとしてその点同士をくっ付けてしまえばよい．そうすることで射平面は完全に閉じた世界としてイメージされるのである．



赤道上では，半円上の点とその
原点对称である残りの半円上の点
とが同じ比である．
したがってそれらを全てくっ付け
る．
このようにしてできた曲面が射影
平面である．

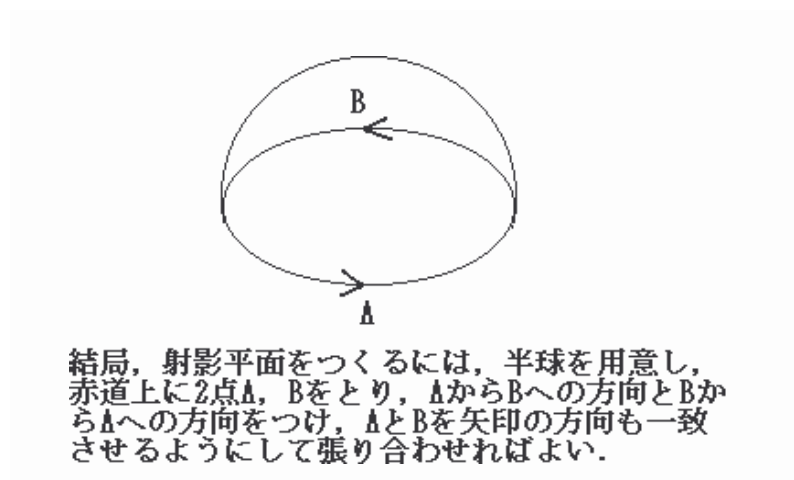
少し話はずれるが，メビウスの輪というものをご存知であろうか．それは長方形 $ABCD$ を考えたとき，点 A は点 C と点 B は点 D とくっ付ける．別な言い方をすれば， $\overline{AB}$ と $\overline{CD}$ を矢印の向きをそろえてそれらの辺を張り合わせる．そのよ

うにして作った輪をメビウスの輪という.



さてメビウスの輪は表と裏の区別がつかない輪である. それを確かめるには鉛筆をメビウスの輪の上において, メビウスの輪に沿って鉛筆を離すことなく線を描いてみればよい. そうするといつのまにか裏面と思っていたところにも線を書いてしまっているはずだ.

先ほどの射影平面をつくる話にもどると, 丁度赤道上ではこのメビウスの輪をつくる操作を行っている. であるから, 射影平面自信は裏表の区別がない平面なのでもある.



結局, 射影平面をつくるには, 半球を用意し, 赤道上に2点A, Bをとり, AからBへ方向とBからAへ方向をつけ, AとBを矢印の方向も一致させるようにして張り合わせればよい.

ところで射影平面をつくるこの作業を現実の世界で行うことは難しい。なぜならば、第1象限と第3象限の同じ比の点と第2象限と第4象限の同じ比の点をくっ付けるときにどうしても北半球の面が邪魔になってしまうからだ。射影平面を完全に作るには、自分自身に付き通すしかない。そうすると、射影平面は自分自身が自分自身と交わる場所をもつことになってしまう。それは丁度紐の結び目を作るときのように、平面の結び目ができてしまう。しかし今まで考えてきた射影平面にはどこにもそのような変な場所は見当たらない。実は射影平面は4次元空間の中で構成すれば、結び目がない状態で実現されるのである。つまり射影平面は4次元空間の中に存在している。