

4次元の世界

1. はじめに.

簡単に言えば、1次元とは直線のことであり、2次元とは平面のことであり、3次元とは空間のことである。しかしこれだけの理解では、4次元の世界を思い描くことは難しい。空間に時間軸を考えたものが4次元だという言い方もあろうが、だからといって4次元の世界の物体がどういう形に見えるのかは不明であろう。

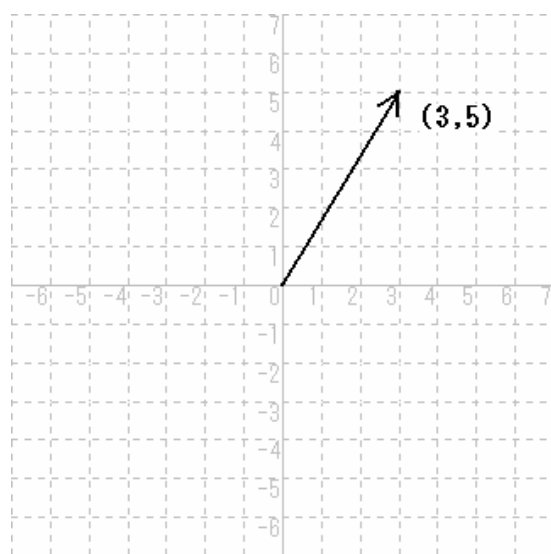
いろいろな次元を理解する方法の1つとして、17世紀デカルトが導入した座標という考え方がある。この考え方と19世紀以降登場したベクトルというアイデアを使い、4次元の物体をイメージしていきたいと思う。

2. ベクトルについて.

デカルトが与えた座標という概念を日本では中学校で学習する。白い紙に水平に線を引き、それに垂直に縦方向に線を引く。横軸を x 軸、縦軸を y 軸という。次にそれぞれの軸に等間隔で目盛りをつける。これで xy 平面の完成である。たとえば $(3,5)$ と書いたならば、 x 方向で3、 y 方向で5の地点を意味し、 $(3,5)$ をこの地点の**座標**という。

さて我々はこの座標という考え方をもう少し別の観点から見てみよう。 $(3,5)$ は原点を出発点とし、 x 方向に3、 y 方向に5進んだ点を意味する。この意味で

$(3,5)$ は、原点から点 $(3,5)$ までの矢印と見ることができる。この矢印のことをベクトルという。今後我々は、 (a,b) と書いたら、それを座標と考えずに原点からのベクトルという意味で使用する。



さてベクトル $(3,5)$ は原点を出発点とし、 x 方向に 3、 y 方向に 5 進んだ点であったのだが、 x 方向に 3 進むというベクトルは $(3,0)$ であり、 y 方向に 5 進むというベクトルは $(0,5)$ を意味することを考えると、 $(3,5) = (3,0) + (0,5)$ という足し算を使用することが許されるであろう。またベクトル $(3,0)$ はベクトル $(1,0)$ の 3 倍、つまり $(3,0) = 3(1,0)$ 、そしてベクトル $(0,5)$ は $5(0,1)$ と考えることもできる。この計算の仕方は一般に次のようにまとめることができる。

ベクトルの計算ルール

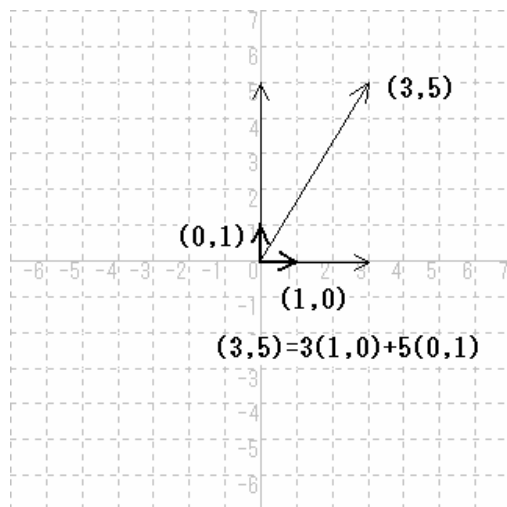
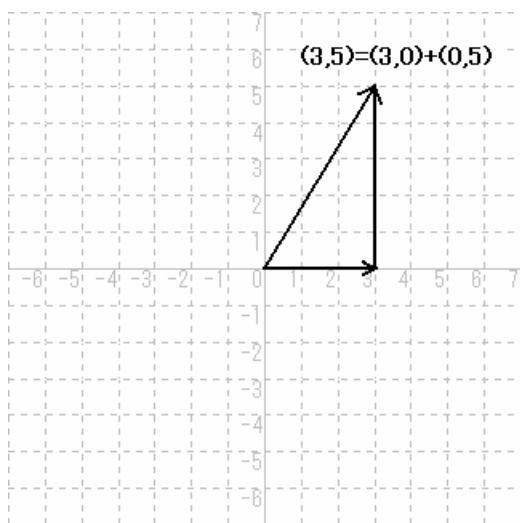
① $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

② $c(a,b) = (ca, cb)$

この計算ルールに従うと，どんなベクトル (a,b) も，

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

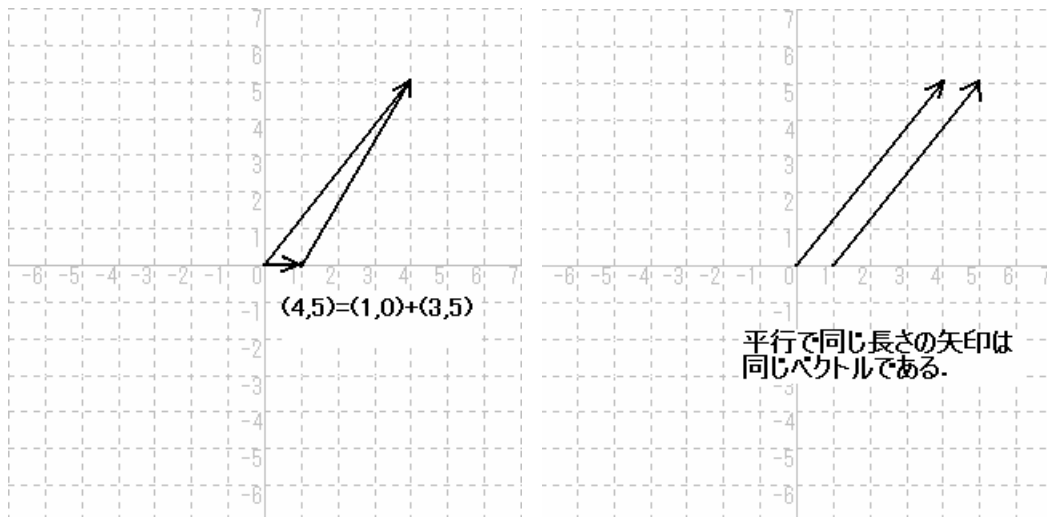
という式を満足する．これは平面のベクトルの最も基本的なものが， $(1,0)$ と $(0,1)$ であり，そして全てのベクトルはこの基本的な 2 つのベクトルを何倍かしたものと，それらの足し算で表現できるのだ．この意味で $(1,0)$ と $(0,1)$ を平面の **基本ベクトル** という．さらに平面の基本ベクトルは 2 つあることから，平面の次元は **2 次元** といわれるのである．



ところで，点 $(1,0)$ を始点とし，点 $(4,5)$ を終点とするベクトルはどんな表示になるのでしょうか．上の計算の仕方から，このベクトルを仮に (a,b) とすると，つぎの方程式を考えることが出来る．

$$(4,5) = (1,0) + (a,b)$$

これより、 $(a,b)=(3,5)$ であることがわかる。このことから、原点を始点として点 $(3,5)$ を終点とするベクトルも、点 $(1,0)$ を始点とし、点 $(4,5)$ を終点とするベクトルも同じ $(3,5)$ というベクトルであることがいえる。このことは他のベクトルのどんな場合も同じである。つまり**2つの矢印において、それらがもし同じ方向を示し、矢印の長さが同じならば、それらは同じベクトルとなるのだ**。別な言い方をすれば、**2つのベクトルが平行移動して一致すればそれは同じベクトルである**ということだ。これが単なる座標表示とは異なるベクトルという表示の意味である。ところで原点を始点とするベクトルのことを**位置ベクトル**という。



さてベクトルの長さはどうやって計算すればよいのだろうか。それにはピタゴラスの定理を思い出して欲しい。ベクトル (a,b) は、 x 方向に a 、 y 方向に b 進むのであるから、ピタゴラスの定理を使うと、ベクトルの長さは $\sqrt{a^2+b^2}$ であることがわかる。ところで基本ベクトル $(1,0)$ と $(0,1)$ の長さはどちらも1なので

ある.

3. 次元について.

平面においては, 基本ベクトルが $(1,0)$ と $(0,1)$ なので, 平面は2次元ということにした. この基本ベクトルの性質をもう少し詳しく見てみよう. ベクトル $(1,0)$ は x 方向を表し, ベクトル $(0,1)$ は y 方向を表している. このことは幾何学的には, ベクトル $(1,0)$ と $(0,1)$ は直角に交わっていることを意味している. この直角に交わるということを, **内積**という計算ルールで表現する.

$$\text{内積} \quad (a,b)(c,d) = ac + bd$$

2つのベクトルの内積が0のとき, その2つのベクトル $(1,0)$ と $(0,1)$ は直角に交わっているのだ. 当然, この基本的なベクトル $(1,0)$ と $(0,1)$ はこれら以外の他のどんなベクトルとも直角に交わることはない.

では空間について考えよう. 空間のベクトル (a,b,c) は

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

と書ける. 例えば $(3,4,5)$ というベクトルは, x 方向が3, y 方向が4, z 方向が5なので,

$$(3,4,5) = 3(1,0,0) + 4(0,1,0) + 5(0,0,1)$$

と書ける. このことから空間の基本ベクトルは, $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ であることがわかる. そして $(1,0,0)$ が x 方向, $(0,1,0)$ が y 方向, $(0,0,1)$ が z 方向を表している. 当然, $(1,0,0)(0,1,0) = 0$, $(1,0,0)(0,0,1) = 0$, $(0,1,0)(0,0,1) = 0$ な

のでこれらは直角に交わっている．そしてこれらと直角に交わるベクトルは他にない．基本的ベクトルが3つなので，空間は**3次元**といえる．

これらの議論から想像できることは，4次元の世界とは基本ベクトルが4つある世界である．それらは，

$$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$$

である．そして $(1,0,0,0)$ が x 方向を， $(0,1,0,0)$ が y 方向を， $(0,0,1,0)$ が z 方向を表し， $(0,0,0,1)$ が第4番目の方向（ w 方向とでもいおうか）を表していると考えることができる．これで4次元の世界を数学で扱えることが可能になったのである．

問．5次元や6次元の基本ベクトルはなんだろうか？

4. 4次元の世界を歩く．

まず直線（1次元）をイメージする．直線上に動く点 P は原点より左にいるとする．もし原点の所に石のような物体があるならば，点 P は直線上を動くことしか許されないのだから， P は原点より右に移動することはできないのだ．この石を回避して右に進むにはもう1次元必要になる．

平面（2次元）をイメージしよう．平面上に動く点 P は y 軸より左側にいるとする．もし原点に石のようなものが落ちていても， P はその石を回避して石の右側に行ける．つまり今点 P は位置 $(-1,0)$ の地点にいるとして，次に位置 $(0,1)$ 向

かって進む．そして位置 $(1,0)$ に向かって進めばよい．これで原点の石を回避できたのだ．後々のために，少し面倒ではあるが，もう少し式を使って考えてみよう．

原点を式で書くと， $x=0$ ， $y=0$ である．位置 $(-1,0)$ から位置 $(0,1)$ をベクトルで表すと， $(1,1)$ である．ベクトル $(1,1)$ は位置 $(-1,0)$ と位置 $(0,1)$ を通る直線の方
向を表している．この意味でこの直線の方
向を表すベクトルを**方向ベクトル**とよんでいる．直線の全ての点は，位置 $(-1,0)$ をスタートとして，この方向ベクトルを何倍か (t 倍) したもので与えられる．直線上の点の位置ベクトルを (x,y) として，このことを式で書くと， $(x,y)=t(1,1)+(-1,0)$ なる．これを成分で整理すると，

$$x=t-1, \quad y=t$$

である． $t=0$ のとき $x=-1$ ， $y=0$ なので，これは最初 P がいた位置を表す．
 $t=1$ のとき $x=0$ ， $y=1$ なので，これは回避するための位置 $(0,1)$ を表す．重要なことは， t にどんな値を代入しても決して $x=0$ ， $y=0$ にはならないということである．これはこの直線が原点を通らないことを意味する．同様に，位置 $(0,1)$ と位置 $(1,0)$ を結んだ直線は原点を通らない．以上で回避ということを数学的に理解できたのである．

では， y 軸上に川が流れていたらどうだろう．この場合 P は y 軸より右側の世界へ行くことはできない．しかし 3 次元の中ならそれを回避できる．

空間 (3 次元) をイメージしよう．空間上を動く点 P は yz 平面より左側にい

るとする．もし y 軸上に川が流れていても P はその川を回避して川の右側へ行ける．このことを先ほどと同じように式で考えてみよう．

まず川は y 軸上を流れているので，その方程式は $x=0$ ， $z=0$ である． P の最初位置は $(-1,0,0)$ にいるとする．そして P は位置 $(0,0,1)$ に向かって進む．このとき P の移動する直線方向ベクトルは $(1,0,1)$ である．よって直線の点の位置ベクトル (x,y,z) は， $(x,y,z)=t(1,0,1)+(-1,0,0)$ と表すことができる．成分別に書くと，

$$x=t-1, \quad y=0, \quad z=t$$

である． $t=0$ のとき， $x=-1$ ， $y=0$ ， $z=0$ なので，これは P の最初の位置 $(-1,0,0)$ を表す． $t=1$ のとき， $x=0$ ， $y=0$ ， $z=1$ なので， P は回避するための位置 $(0,0,1)$ に到達する．勿論 t にどんな値を代入しようと決して，
 $x=0$ ， $z=0$ になることはない．つまり， P が通る直線上には川は流れていないのである．同様に，位置 $(0,0,1)$ から出発し位置 $(1,0,0)$ に向かう直線上にも川は流れていない．

では， yz 平面が壁でできていたらどうだろう．この場合 P は yz 平面より左側の世界へ行くことはできない．しかし 4 次元の世界ならそれが回避できるのだ．

4 次元の世界をイメージしよう．4 次元の世界を動く点 P は yzw 空間より左側にいるとする．もし yz 平面が壁であっても P はその壁を回避して壁の右側へ行ける．このことを先ほどと同じように式で考えてみよう．

まず壁は yz 平面なので，その方程式は $x=0$ ， $w=0$ である． P は最初，位置

$(-1, 0, 0, 0)$ にいるとする．そして P は位置 $(0, 0, 0, 1)$ に向かって進む．このとき P の移動する直線の方方向ベクトルは $(1, 0, 0, 1)$ である．よって直線の点の位置ベクトル (x, y, z, w) は, $(x, y, z, w) = t(1, 0, 0, 1) + (-1, 0, 0, 0)$ と表すことができる．成分別に書くと,

$$x = t - 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = t$$

である． $t = 0$ のとき, $x = -1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$ なので, これは P の最初の位置 $(-1, 0, 0, 0)$ を表す． $t = 1$ のとき, $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 1$ なので, P は回避するための位置 $(0, 0, 0, 1)$ に到達する．勿論 t にどんな値を代入しようと決して, $x = 0, \quad w = 0$ になることはない．つまり, P が通る直線上には壁はないのである．同様に, 位置 $(0, 0, 0, 1)$ から出発し位置 $(1, 0, 0, 0)$ に向かう直線上にも壁はない．

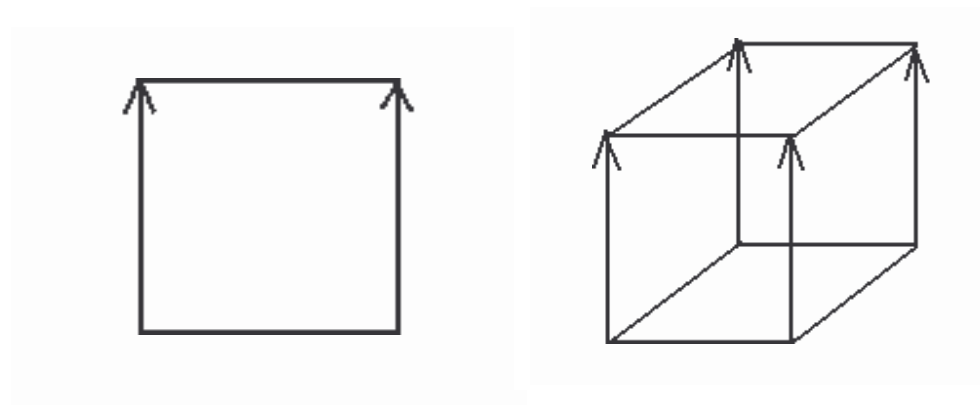
では, yzw 空間が塊だったらどうだろう・もはや P は yzw 空間という塊より右側の世界へいくことはできない．しかし 5 次元の世界だったらそれが回避できるのである．

5. 4次元の世界の物体を見る (その 1) .

まず平面の中の正方形について考えてみよう．平面の中の正方形は, 点が 4 つと線が 4 つで構成されている．正方形は 4 辺形である．空間の中には立方体 (サイコロのようなもの) がある．これには点が 8 つ, 線が 12, 面が 6 ある．立方体は別名正 6 面体ともいう．これらの物体は目で見えるからこのような数を数え

ることは簡単である．ところで正方形は，上から見ると線に見えるし，立方体は上から見ると正方形に見える．では4次元の世界のこのような物体（安易だが，**超立方体**とでも呼ぼう）はどんなものなのだろうか？つまり上？から見たとき，立方体に見える物体を調べてみよう．

もう少しイメージをもつために，正方形や立方体を座標で考えてみよう．まず正方形は長さ1の線分を考え，その線分を $(0,1)$ の方向（つまり y 軸方向）に1だけ滑らせてできる図形である．この考え方を利用すると，立方体は，長さ1の正方形を考えそれを $(0,0,1)$ の方向（つまり z 軸方向）に1だけ滑らせてできる物体である．このことを4次元の世界へ拡張しよう．まず長さ1の立方体を考える．それを $(0,0,0)$ 方向（つまり w 方向）に1だけ滑らせてみる．これが目的の超立方体である．



それではこの超立方体の点の数，線の数，面の数，立方体の数はいくつあるのだろうか？

もう一度上の構成を検討してみよう．まず線分は点が2つと線が1本ある．スライドさせることによって，2つの点は2本の線になり，最初の1本の線は面になる．したがって，出来上がった正方形の点の数は滑らす前の2点と滑らしたあとの2点で4点となる．また線の本数は滑らす前の1本とそれが移動した1本と，さらに2点がすべることによって生まれた線2本の合わせて4本となる．以上で正方形の点の数と線の本数がわかった．この方法で立方体の点，線，面の数を数えてみよう．

始めに正方形には点が4つある．滑らすことによって，点が4つ増える．だから点の数は8である．次に線は始めに4本ある．滑らせた後線は4本増え，さらに4点が4本の線になっていく．よって合計12本の線ができる．次に面は最初1つだけである．滑らした後1つ増える．さらに4つの線が滑らすことで4つ面になる．これで面の数は6つとなる．

ではいよいよ超立方体を調べよう．まず始めに立方体の点の数は8つである．滑らした後で8つ増えるから，合計16個である．線の本数は始めに12本ある．滑らした後12本増え，さらに滑らす途中で8つの点が線に変わる．よって，合計32本の線がある．面の数は最初6つある．滑らした後6つ増え，最初の12本の線が12個の面に変わるので，合計24個の面がある．最後は立方体である．始め1つの立方体なのでそれがもうひとつ増える．さらに6つの面が6つの立方体に変わるので，超立方体は合計8個の立方体をもつ．

以下の表が完成できた．

	点の数	線の数	面の数	立方体の数	超立方体の数
線分	2	1			
正方形	4	4	1		
正六面体	8	12	6	1	
超立方体？	16	32	24	8	1

6. 4次元の世界の物体を見る（その2）.

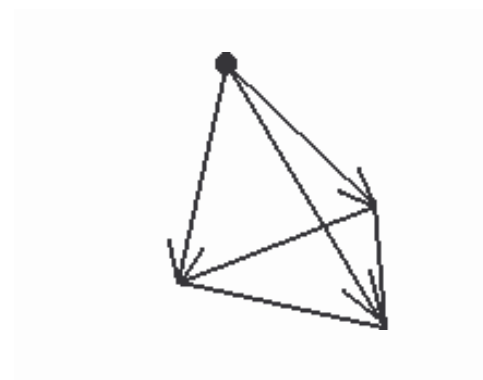
今度は三角形，四面体を考えてみよう．三角形は上から見ると線に見える．四面体（三角錐）は上から見ると三角形である．ではでは，4次元の物体で上？から見たとき四面体に見える物体（これも安易だが，**超三角錐**ということにしよう）をイメージしよう．

先ほどと同じように長さ1の線分を考える．平面において点 $(0,1)$ に印をつけ，その点から x 上の点 $(0,0)$ と $(1,0)$ へのベクトルを考える．すると元あった線とベクトル2つで三角形ができる．三角形の点の数は，最初線に2つの点があり，今 $(0,1)$ の点が増えたので，合計3つである．

三角形の線の数是最初1本の線があったが，ベクトルが2つ増えたため合計3つになったのである．



今度は，空間座標において $(0,0,0)$ と $(1,0,0)$ と $(0,1,0)$ とをそれぞれ結んでできる三角形を考える．先ほどの考え方でいけば，点 $(0,0,1)$ に印をつけて， $(0,0,1)$ から三角形の頂点へのベクトルを 3 本引けば，四面体（三角錐）ができる．点の数は，三角形の 3 点に，点 $(0,0,1)$ を加えるので，合計 4 つとなる．線の本数は，三角形の 3 辺に，新たに 3 つのベクトルが加わるので，合計 6 つである．面の数は，三角形の線と $(0,0,1)$ を挟んで面ができることを考慮すれば，新たに 3 つの面が加わり，合計 4 つである．



いよいよ超三角錐の点，線，面，四面体の数を数えてみよう．4 次元の世界には 4 つの軸があるので，4 つの点 $(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ を結んでできる物体，つまり四面体を考える．次に $(0,0,0,1)$ という点に印をつけて，その点から四面体の 4 つの点へのベクトルを考える．超三角錐の点の数は，四面体の点は 4 つあり点 $(0,0,0,1)$ が加わるので 5 つである．線の本数は，四面体の線は 6 つあり，4 つのベクトルが加わるので，10 つである．面の数は，先ほどと同じで四面体の線と点 $(0,0,0,1)$ の間に面ができることを考えると，四面体の面の

数が 4 つと，新たに面が 6 つ加わるので，合計 8 つである．四面体の数，最初の四面体の面と点 $(0,0,0,1)$ の間に四面体を作られることを考えると，四面体が 4 つ増えるので，合計 5 つということになる．

以下の表が完成できた．

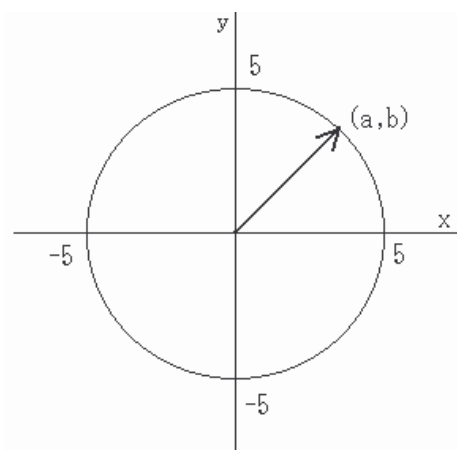
	点の数	線の数	面の数	四面体の数	超三角錐の数
線分	2	1			
三角形	3	3	1		
四面体	4	6	4	1	
超三角錐	5	10	10	5	1

上の表をみて面白いことにお気づきであろうか？ パスカルの三角形といわれるものがある．パスカルの三角形は， $(a+b)^n$ の係数を並べてつくった三角形のことである．たとえば， $(a+b)^2$ の係数は 1,2,1 であり， $(a+b)^3$ の係数は 1,3,3,1 である．次の表がパスカルの三角形であるが，この表をみてその規則性を考えて見て欲しい．この規則性は超三角錐の点や面などの個数と同じであり，とても不思議なことである．

パスカルの三角形						
$(a+b)$	1	1				
$(a+b)^2$	1	2	1			
$(a+b)^3$	1	3	3	1		
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1

7. 4次元の世界の物体を見る（その3）.

今度は4次元の世界にある球を見よう．まず円から始めよう．原点を中心とする半径5の円を考える．



この円上の点 (a,b) はピタゴラスの定理より $a^2 + b^2 = 5^2$ が成り立つ．これは全ての円上の点で成り立つので，円の方程式は， $x^2 + y^2 = 5^2$ である．一般に原点

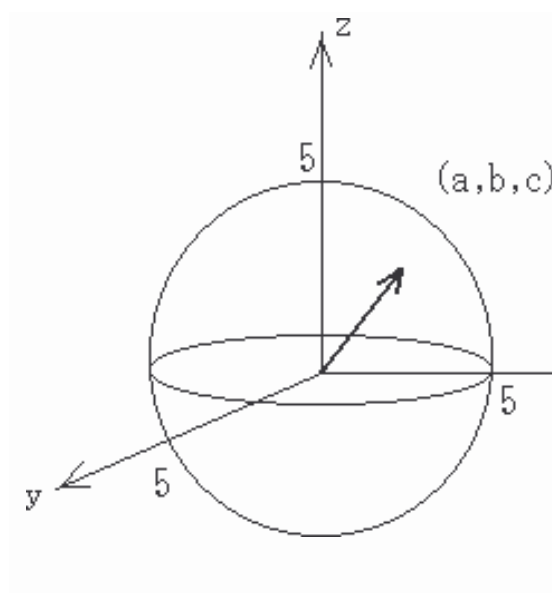
を中心とする半径 r の円の方程式は,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

である.

さて, $x^2 + y^2 = 5^2$ において, もし $y=0$ ならば $x^2 = 5^2$ である. これは, $x=-5$ と $x=5$ の 2 点を表している. もし, $y=3$ ならば $x^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ なので, $x=-4$ と $x=4$ の 2 点を表し, その間隔は先ほどより狭くなっている. もし $y=5$ ならば, $x=0$ であり, 終に 2 点は 1 点となってしまう. これが円の性質である.

では半径 5 の球を考えよう.



この球上の点 (a,b,c) はピタゴラスの定理を 2 回使うと, $a^2 + b^2 + c^2 = 5^2$ が成り立つ. これは全ての球上の点で成り立つので, 球の方程式は $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ である. 一般に半径 r の球の方程式は,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

である。さて先ほどと同じように球 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ の上で $z=0$ とすると、これは $z=0$ の平面でこの球を切ることになるので、その切り口の円の方程式が現れてくる。それは、 $x^2 + y^2 = 5^2$ という半径5の円である。次に $z=4$ という平面で切ってみると、その切り口は、 $x^2 + y^2 = 3^2$ という半径3の円が出てくる。 $z=5$ で切ると、予想するように、 $x^2 + y^2 = 0$ ということから、それは $x=y=0$ なる1点である。このことから z 軸に沿って $z=0$ から $z=5$ までの平面で次々と切ってその切り口を見ていくと、それは円でありその半径はどんどん小さくなっていき、終には1点となることがわかる。これが球の性質である。

ではでは、4次元の世界の球（**超球**とでも言うことにしよう）を考察していこう。半径5の超球の方程式はピタゴラスの定理を3回使えば、

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 5^2$$

である。これをまず $w=0$ で切ってみると、 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ がでてくる。これは半径5の球である。次に $w=4$ で切ると、 $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ であり、これは半径3の球である。最後に $w=5$ で切ると、 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ となる。すなわち、 $x=y=z=0$ という点を表す。以上のことから、半径5の超球の姿は、 w 軸に沿って $w=0$ から $w=5$ というもので次々と切ってその切り口を見ていくと、それは球でありその半径はどんどん小さくなっていき、終には1点となることがわかる。これで超球のイメージができたであろう。

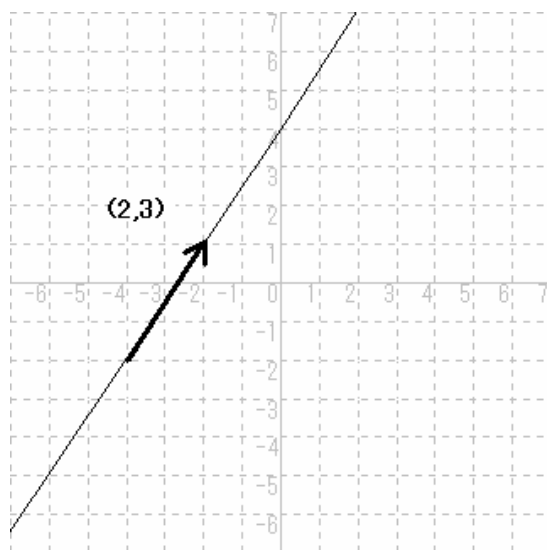
以上で4次元の世界の大雑把なイメージを持つことができたであろう。以下のセクションではもっと詳細に直線の方程式、平面の方程式、空間の方程式などを扱ってみたい。

8. 直線の方程式

平面（2次元）における直線の方程式を復習しよう。たとえば $y = \frac{3}{2}x + 4$ がある。これは傾きが $\frac{3}{2}$ で、切片（ y 軸との交点）が4であることを意味する。

しかしこれを次のように考え直すこともできる。直線 $y = \frac{3}{2}x + 4$ は、

- ① 点 $(0, 4)$ を通過し、
- ② 直線の方角を表すベクトルは $(2, 3)$ である。



さて直線上を動く点があったとして、それが始めに $(0,4)$ の地点にいて、1秒後に x 方向に2、 y 方向に3ずつ移動していくと考えれば、この点は、

$$x = 2t, y = 3t + 4$$

と書くことができる。ここで t は時間 (time) の t と理解してもよい。 t は普通パラメータと呼ばれる。この2つの方程式からパラメータ t を消去すると

$$y = \frac{3}{2}x + 4 \quad \text{または} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3}$$

となる。

結論の式を眺めると、分母に直線の方方向ベクトル $(2,3)$ が見える。そして分子には、出発点を表す座標 $(0,4)$ が見える。

問. $x-y$ 平面上を直線的に移動する点の出発点と方向ベクトルを定め直線の方程式を求めてみよう！！

今の話を空間 (3次元) で考えよう。つまり空間上にある直線上を1つの点が動いているとイメージする。最初に点 $(5,6,7)$ という地点を動いていた。その後 x 方向に2、 y 方向に3、 z 方向に4ずつ移動していった。これをパラメータを用いた式で表現すると、

$$x = 2t + 5, y = 3t + 6, z = 4t + 7$$

となる。この式から我々は空間内を直線的に移動する物体の t 時間後の位置を計算することができるのである。さて3つの方程式から t を消去すると、

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-7}{4}$$

となる.

この結論の式を眺めても、分母に直線の方方向ベクトル $(2,3,4)$ が見え、そして分子には、出発点を表す座標 $(5,6,7)$ が見える. またこのように空間の中で直線の方程式を書こうとすると、2つの方程式が必要となることもわかる.

問. 空間の中を直線的に移動する点の出発点と方向ベクトルを定め直線の方程式を求めてみよう!!

4次元の世界の直線の方程式を考えてみよう!! 4次元の世界に直線があってその直線上を1つの点が動いているとしよう. その点は始めに $(1,2,3,4)$ という点にいたとする. そして x 方向に5, y 方向に6, z 方向に7, w 方向に8移動していったとする. これをパラメータを用いた式で表現すると,

$$x = 5t + 1, \quad y = 6t + 2, \quad z = 7t + 3, \quad w = 8t + 4$$

となる. この式から我々は空間内を直線的に移動する物体の t 時間後の位置を計算することができるのである. また4つの方程式から t を消去すると,

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{7} = \frac{w-4}{8}$$

となる.

やはりこの結論の式を眺めても、分母に直線の方方向ベクトル $(5,6,7,8)$ が見え,

そして分子には、出発点を表す座標 $(1,2,3,4)$ が見える．このように 4 次元の世界の中で直線の方程式を書こうとすると、3つの方程式が必要となることもわかる．とにかく我々は 4 次元の世界の直線の方程式を獲得したのだ．

問．4 次元の世界の中で直線的に移動する点の出発点と方向ベクトルを定め、その直線の方程式を求めてみよう！！

問．5 次元の世界の中で直線的に移動する点の出発点と方向ベクトルを定め、その直線の方程式を求めてみよう！！

9. 平面の方程式

まず空間の中にある平面を考えよう．空間上に 1 つの平面があったとする．平面上にいる者にとって、それは普通の xy 平面に見えるだろう．だから平面上の基本ベクトルが 2 つある．しかしそれらの基本的なベクトルは空間の座標からみると、空間の中では 2 つの直線の方角を表すベクトルであり、それらは互いに直行する．例えばそれらの方向ベクトルをそれぞれ $(1,2,3)$ と $(2,-1,0)$ としよう（基本ベクトルは長さ 1 であるがここでは方向さえ同じであればよい）．そして平面上の 1 つの点を $(5,6,7)$ としよう．すると平面上の点は $s(1,2,3) + t(2,-1,0) + (5,6,7)$ と書ける．このことから、

$$x = s + 2t + 5, \quad y = 2s - t + 6, \quad z = 3s + 7$$

という 2 つのパラメータを用いた式を得る．これらの 3 つの式から 2 つのパラメータ s, t を消去すると，

$$3(x - 5) + 6(y - 6) - 5(z - 7) = 0$$

を得る．これが平面を表す方程式である．ところで，この平面の方程式から得られる $(3, 6, -5)$ というベクトルは，ベクトル $(1, 2, 3)$ とベクトル $(2, -1, 0)$ とも直行する．つまりベクトル $(3, 6, -5)$ は平面に対し垂直方向を表している．このベクトルを平面の**法線ベクトル**という．また括弧の中に現れる $(5, 6, 7)$ というものは，平面上の 1 点であることも注意される．ということは，始めに平面の法線ベクトルと平面上の 1 点を与えられると我々は直ちにこの平面の方程式を得ることになる．これで我々は空間の中の 1 つの平面に，どんな点がついているかがわかるのである．

問．空間上のある平面は点 $(2, 5, 3)$ を含んでおり，この平面の法線ベクトルは， $(2, 4, 6)$ である．この平面の方程式を求めよ．

さて今度は 4 次元の世界にある平面をイメージしよう．イメージするといっても手段はやはり方程式をたてることであろう．もし方程式が立てられるならば，我々はすぐにどういう点とその平面上にあるのかを判断できるのだ．4 次元の世界に浮かぶ平面といえども基本的なベクトルが 2 つあり，それらの 2 つのベクトルは 4 次元の座標からみれば，2 つの直線方向ベクトルになっていて，さらに

その2つの方向ベクトルは直角に交わっている。例えば、 $(1,2,3,4)$ と $(1,1,-1,0)$ は
 そのような2つのベクトルである。そしてもし平面上に点 $(5,6,7,8)$ があったら、

$$x = s + t + 5, \quad y = 2s + t + 6, \quad z = 3s - t + 7, \quad w = 4s + 8$$

という2つのパラメータをもつ4つの方程式を得る。これらの4つの式からパラ
 メータ s, t を消去すると、

$$4(x-5) - 4(y-6) + (w-8) = 0, \quad 4(y-6) + 4(z-7) - 5(w-8) = 0$$

が得られる。このように4次元の世界で平面の方程式を書けば、2つの方程式を
 必要とする。ところで2つの方程式の中に現れる2つのベクトル $(4, -4, 0, 1)$ と
 $(0, 4, 4, -5)$ は $(1, 2, 3, 4)$ や $(1, 1, -1, 0)$ とそれぞれ直角に交わるつまりベクトル
 $(4, -4, 0, 1)$ と $(0, 4, 4, -5)$ は平面に対し垂直な方向を指し示しているのである。あ
 たりまえのことだが、4次元の中ではどんな平面に対しても法線ベクトルは2つ
 あるのだ。このことから、我々はある平面上の1点とその平面の2つの法線ベク
 トルが与えられると、平面の方程式を得ることができるのである。その結果4次
 元の世界に浮かんでいる平面上にどんな点が存在するのかが判定できることに
 なる。

問. 4次元の世界の平面は点 $(2, 3, -1, -3)$ を含んでおり、この平面の法線ベ
 クトルは、 $(1, -1, 2, 5)$ 、 $(2, 0, -2, 1)$ である。この平面の方程式を求めよ。

問. 4次元の世界の2つの平面は一般に1点で交わることを示せ。

10. 空間の方程式

4次元の世界の中の空間を理解するために、その方程式を考えよう。4次元の世界に浮かぶ空間もやはり、3つの直行する基本ベクトルを持っている。しかしそれらは、4次元座標から見れば、3つの直線の方向ベクトルに過ぎない。そしてそれらの方向ベクトルは互いに交わっている。例えば、 $(1,2,3,4)$ と $(1,1,-1,0)$ と $(-1,0,-1,1)$ を考える。これらは互いに直行している。（なぜならば、 $(1,2,3,4)(1,1,-1,0)=0$ であり、 $(1,2,3,4)(-1,0,-1,1)=0$ であり、 $(1,1,-1,0)(-1,0,-1,1)=0$ だから。）もし空間上に $(5,6,7,8)$ という点があったら、

$$x=s+t-u+5, \quad y=2s+t+6, \quad z=3s-t-u+7, \quad w=4s+u+8$$

という3つのパラメータをもつ4つの方程式を得る。この式からパラメータ s, t, u を消去すると、

$$-3(x-5)+4(y-6)+(z-7)-2(w-8)=0$$

という式が成り立つ。これが求める空間の方程式である。ところで係数から作られるベクトル $(-3,4,1,-2)$ は、ベクトル $(1,2,3,4)$ と $(1,1,-1,0)$ と $(-1,0,-1,1)$ にそれぞれ直行する。つまりベクトル $(-3,4,1,-2)$ は、空間の法線ベクトルになっていたのである。このことから、我々は、空間の法線ベクトルと空間上の1点の座標から、その空間の方程式を得ることができるのである。

問. 4次元の世界の空間は点 $(2,3,-1,-3)$ を含んでおり, この空間の法線ベクトルは, $(1,-1,2,5)$ である. この空間の方程式を求めよ.

1 1. 4次元に対応する数の集合.

実数という言葉聞いたことがあるだろう. 実数とは実際にある数という意味である. 実数は, 整数, 分数と $\sqrt{2}$ や π などの無理数を含んだ集合の元ことである. この集合は**実数体**と呼ばれている. 実数体は四則演算ができる集合であることはよく知られている事実である. 一般に四則演算が可能な集合のことを**体**と呼んでいる. また全ての実数は実際の線で表すこともできる. たとえば $\sqrt{2}$ を描きたければ, 底辺が1と高さ1の直角三角形を描けばよい. すると斜辺が $\sqrt{2}$ になるのである. そのような理由から我々は数直線という概念を知る. 数直線とは x 軸のことである. x 軸には全ての実数が載っている. そういうわけで, 実数は1次元なのである.

複素数という言葉聞いたことがあるだろうか. 複素数には虚数と呼ばれる数が存在していて, それを i という記号で書く. i は2乗すると -1 となる数である. 実数は2乗すると必ず正の数になるのだが, 2乗するとマイナスになるような数(虚数)もあっていいじゃないかということで導入されたと思えばよい. 簡単にいえば, 複素数という数は, a, b という実数を使って $a+bi$ と表現したものである. たとえば $2+3i$ とか $5+\sqrt{3}i$ などが複素数である. **複素数体**も実数体と

同じように四則演算ができるのである．複素数体における演算を書くと，次のようになる．

複素数の演算

$$\text{和} \quad (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{差} \quad (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

$$\text{積} \quad (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$\text{商} \quad \frac{1}{(a+bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

複素数 $a+bi$ で i のついていない部分を実数部分 (real part) a のついている部分を虚数部分 (imaginary part) b という．たとえば， $2+5i$ の実数部分は 2 で虚数部分は 5 である．つまり複素数は実数部分と虚数部分があり，しかし複素数部分といえども，その部分は実数なのである．このような考えから，実数部分を x 軸，虚数部分を y 軸にとすれば，複素数体は実数体上の 2 次元空間，つまり平面と考えることができるのである．この平面をガウス平面とよんでいる．たとえば，ガウス平面上で， $(2, \sqrt{5})$ と書いたならば，それは $2+\sqrt{5}i$ を意味するのである．

4 元数と言われるものがある．それは，基本的な数が， $1, i, j, k$ の 4 つの数から構成された数である．そして， i, j, k は， $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ であり，

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

という関係がある．4元数全体を**4元数体**と呼ぶ．4元数体でも四則演算ができる．そのルールは以下ようになる．

4元数の演算

和

$$(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k)=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$$

差

$$(a+bi+cj+dk)-(a'+b'i+c'j+d'k)=(a-a')+(b-b')i+(c-c')j+(d-d')k$$

$$\begin{aligned} & (a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k) \\ \text{積} \quad &= (aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')i \\ &+ (ac'-bd'+ca'+db')j+(ad'+bc'-cb'+da')k \end{aligned}$$

$$\text{商} \quad 1/(a+bi+cj+dk)=(a-bi-cj-ek)/(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

4元数体で注意すべきことは、

$$(a+bi+cj+dk)(e+fi+gj+hk) \neq (e+fi+gj+hk)(a+bi+cj+dk)$$

ということである．すなわち演算の順序を逆にしたら値が違ってくる．

複素数体も4元数体も各部分(part)が実数で表現される．このような体を実数上の体という．そしてすぐわかるように4元数体は4次元空間に対応する．実は、実数上の体で、3次元空間に相当するものはない．5次元以上を表す実数上の体も存在しないことがわかっている．

12. ポアンカレ予想.

フェルマーの予想はイギリスの Wils という数学者によって 1995 年に解かれた. しかしポアンカレ予想はまだ解かれてはいない. ポアンカレ予想そのものを説明するには, いくつかのキーワードを理解しておかねばならない.

1. **多様体**: 多様体とは簡単にいえば, その物体の任意に切り取った部分が普通の空間とみることができる物体のことである. たとえば, 円は 1 次元多様体と言われる. その理由は, 円の曲線の一部を任意に選んで切り取ると, 直線 (1 次元) になっているからである. 球は 2 次元多様体である. 任意に一部分を切り取ってそれを引き延ばすと平面 (2 次元) になっているからである. 浮き輪も 2 次元多様体であることもすぐ理解できよう. 3 次元多様体とは, 任意に切った一部分を引き延ばすと, 空間 (3 次元) になっているものである. 前に説明した 4 次元の超球の表面は 3 次元多様体である. この意味でこれを **3 次元球面**とよぶ.
2. **単連結**: 単連結を極簡単に説明しよう. そのためには輪ゴムが必要である. 球のいろんな場所に輪ゴムを引っかける. それらの輪ゴムをどんどん縮めると最後には 1 点に縮めることができる. この性質を単連結という. 浮き輪を考えよう. もし輪ゴムが内側の穴と外に結ぶように引っかかっていたら, その輪ゴムを浮き輪から外すことはできない. 当然輪ゴムを縮めて 1 点にすることは不可能である. だから浮き輪は単連結ではないのである. 3 次元球面は単連結である. 同様に 4 次元球面も, それ

以上の次元の球面も単連結である.

1904 年にアンリ・ポアンカレがポアンカレ予想を発表する前に, 2 次元の閉じた曲面に関する分類が終了していた. それは「全ての閉じた曲面は, 種数すなわち穴の数で分類される」というものであった. これから単連結な 2 次元多様体は 2 次元球面と同相である. つまり伸ばしたり引っ張ったりして 2 次元球面に変形できるということがわかる.

それでは, ポアンカレ予想を述べよう.

ポアンカレ予想: 単連結な 3 次元多様体は, 3 次元球面と同相である.

もう少し簡単に言えば, 「単連結な 3 次元多様体は, それを伸ばしたり引っ張ったりしたら 3 次元球面に変形できる」といっているのだ. この問題の意味がシンプルでかつ美しいことから, この問題に取り組む数学者は後を絶たないことはすぐに想像できるであろう. そして 1960 年になって, ステファン・スメールなどの数学者らが 5 次元以上の場合に正しいことを証明したのだ. さらに 1980 年マイケル・フリードマンという数学者が 4 次元の場合を解決した. 不思議なことではあるが, 未だに解決していないのが, 3 次元の場合, すなわち 4 次元の中の物体に関する問題なのである.