第2章　数学編

数学編では，工学系の基礎的な勉強に必要なものをテーマとして選びました．そのテーマとは，１）方程式を解こう，２）サインカーブで遊ぼう，３）長さや面積を求めよう，４）微分方程式を解こう，５）楽しく研究しよう，です．これらは全て中学校程度の数学の知識があればよく，十進 BASIC を使って視覚的な理解を重視し，そして楽しく読めるように書きました．

１）「方程式を解こう」の主な内容は，ニュートン法で n 次方程式の近似解法を行うことです．従ってここで微分法を学びます．２）「サインカーブで遊ぼう」では，いろいろな波の曲線を描いて楽しく研究します．３）「長さや面積を求めよう」では，関数の線分の長さや関数の区間の面積を求めます．そして積分を学習します．４）「微分方程式を解こう」では，オイラー法とルンゲ・クッタ法を扱います．これも微分の根本的な考え方を応用して数値計算を行います．これにより，難しい微分方程式も数値的に解決でき，その解曲線のグラフを直接目で見ることができるようになります．５）「楽しく研究しよう」では，円の弦を動かして作る曲線，マンデルブロー集合，そして楕円鏡のレザービームの反射の軌跡を扱います．これらの結果から美しい対称性を見ることができます．

2.1　方程式を解こう

2.1.1　2 次方程式の解を求めよう

まず 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の係数 a, b, c にいろんな値を代入して，そのときの解を求めてみます．2 次方程式とは，x の最高次数が 2 である方程式のことです．解を求めるためには，まず左辺の式を 2 乗の形に変形させます．すなわち，

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

とします．したがって，

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

となり，これより

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を得るのです．これが 2 次方程式の **解の公式** といわれるものです．

例題 2.1　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の係数 a, b, c にいろんな値を代入して，そのときの，解を求めるプログラムを作ってみよう．

[解答]　解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を使ったプログラムを作ります．

```
INPUT PROMPT "A":A
INPUT PROMPT "B":B
INPUT PROMPT "C":C
X1=(-B+SQR(B^2-4*A*C))/(2*A)
X2=(-B-SQR(B^2-4*A*C))/(2*A)
PRINT "X1=";X1
PRINT "X2=";X2
END
```

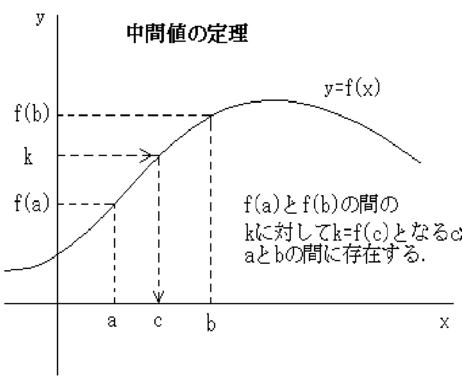
いかがですか．簡単でしょう．しかし残念ながら出てきた解の値は，正確な値ではなく近似値であるという点に注意しておきましょう．

2.1.2 3次以上の方程式の解を考える（中間値の定理）

次に x の最高次数が3以上である方程式を考えます．これも2次方程式のときのように解の公式があれば簡単にプログラムを書くことができます．3次と4次の方程式にはカルダーノの公式，フェラーリの公式といったものが知られています．しかし，5次以上の方程式には解の公式がありません．これはまだ見つかっていないということではなくて，解の公式は存在しないということが証明されているのです．このことは１９世紀の初め頃，アーベルやガロアといった（２人とも２０代という若さで亡くなった）数学者らによって証明されました．またカルダーノの公式やフェラーリの公式も複雑ですぐに忘れてしまいます．したがってここでは3次や4次といえど，解の公式に頼らない別の方法で近似値を求めることにします．

中間値の定理といわれる直感的にはとても明らかな定理があります．

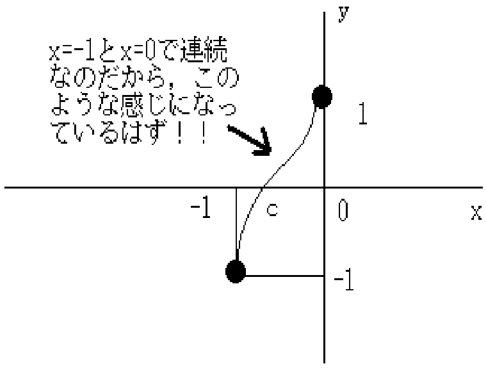
中間値の定理 x の関数 $y = f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で連続的であるとする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の値を k とすると，$f(c) = k$ となるような値 c が a と b の間に必ず存在する．



上の定理は、図を見ればほとんど明らかなことです．しかしこの定理を正しく証明することは，少し難しいことでもあります．それには連続という概念を正しく理解することが必要です．ここでは，連続ということをグラフに書いたとき，グラフが繋がっているぐらいに思って，この定理を素直に認めてしまいましょう．

では例として $x^3 - x^2 + 3 = 0$ という方程式を考えましょう．中間値の定理を認めると，大体どのくらいのところに解があるのかがわかります．左辺を $f(x)$ と置き，$y = f(x)$ を考えます．つまり，$y = f(x) = x^3 - x^2 + 1$ とします．この関数は x のどんな範囲においても連続しています．それは $y = x^3$ は連続的な関数 x を 3 回掛けたものだから連続で，$y = -x^2$ も同じ理由で連続で，当然 $y = 1$ は連続なので，それらの和も連続だからです．

さてこの式 $y = f(x)$ に $x = 0$ を代入すると，$y = f(0) = 1$ となります．次に $x = -1$ を代入すると，$y = f(-1) = -1$ となります．そこで中間値の定理を考えるのです．つまり，y の値 $f(-1) = -1$ と $f(0) = 1$ の間には，$y = 0$ があります．そして，$y = f(x) = x^3 - x^2 + 1$ は，x が -1 と 0 の間で連続なので，$y = f(c) = 0$ すなわち，$c^3 - c^2 + 1 = 0$ となる c が -1 と 0 の間に存在することになります．それは図に描いてみれば当然のことでしょう．従って，$x^3 - x^2 + 1 = 0$ の解は -1 と 0 の間に存在するということがいえたのです．



次に解の精度を上げることを考えましょう．そのためには，x を -1 から少しずつ 0 の方向へ増やしていき，$f(x)$ が負になるところと正になるところの境目を突き止めればよいのです．そのプログラムを書いてみましょう．

```
DEF f(x)=x^3-x^2+1
LET a=-1
LET b=0
FOR x=a TO b step 0.1^4
PRINT x;f(x)
IF f(x)>=0 THEN STOP
NEXT x
END
```

このプログラムでは x を 0.1^4 で刻んで解を探します．プログラムを実行すると以下のように表示されていきます．

```
  ................
-.7556 -.002327095616
-.7555 -.002004728875
-.7554 -.001682427464
-.7553 -.001360191377
-.7552 -.001038020608
-.7551 -.000715915151
-.755 -.000393875
-.7549 -.000071900149
-.7548  .000250009408
```

終了した結果から，$x^3 - x^2 + 1 = 0$ の解は，$x = -0.7549$ と $x = -0.7548$ の間にあることがわかります．

問題 2.1 5 次方程式 $x^5 + x^3 + x^2 - 4 = 0$ の解の近似値を中間値の定理によりなるべく良い精度で求めなさい．

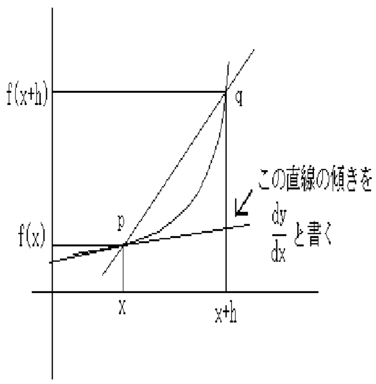
2.1.3 微分法を学ぼう

方程式の近似解を求める有名な方法に **ニュートン法** といわれるものがあります．それを説明するためには**微分法**を勉強しなくてはいけません．

ニュートンは重力を発見した人ということで有名です．そのときに使った数学が微分法なのです．

微分とは，連続的な関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 p における接線の傾きを求める方法です．その方法は点 p の座標を $(x,f(x))$ として，次のように考えます．

まず，$(x+h,f(x+h))$ の点を q とします．p と q を通るように直線を引きます．その傾きは $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ です．そこで，h をどんどん 0 に近づけていけば，直線はしだいに点 p の接線になって，その傾きがわかります．以後、関数 $y=f(x)$ 上の点 p での接線の傾きを $\dfrac{dy}{dx}$ というように書くことにします．p は任意の点なので，$\dfrac{dy}{dx}$ も関数となります．関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を関数 $y=f(x)$ の**微分**といいます．



例で考えます．$y=f(x)=x$ 上のどの点においてもその接線の傾きは明らかに 1 です．これを上の考え方で確かめてみます．まず，$f(x+h)=x+h$ なので，

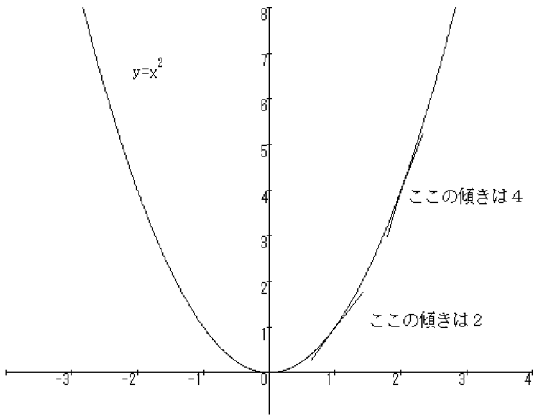
$$\frac{x+h-x}{h}=1$$

という式ができます．ここで，h を 0 にしてみても上の式は h に影響しないので $\dfrac{dy}{dx}=1$ となるのです．ですから，$y=x$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx}=1$ です．

$y = f(x) = x^2$ 上の点の接線の傾きを考えます．$f(x+h) = (x+h)^2$ なので，

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

という式ができます．ここで，h を 0 にすると，$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ になります．つまり，$y = x^2$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ となります．これより，例えば $x = 0$ のときの接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx} = 0$，$x = 1$ のときの接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx} = 2$，$x = 2$ のときの接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx} = 4$ であることがわかります.



$y = f(x) = x^3$ の微分を考えます．$f(x+h) = (x+h)^3$ なので，

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

という式ができます．ここで，h を 0 にすると，$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ になります.

同様に $y = f(x) = x^4$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = 4x^3$ になります．実は，$y = f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ に，$y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ になります．一般に

$y = f(x) = x^n$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ になります．ただし n は有理数（整数か分数）です．

問題 2.2 $y = f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ で，$y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ の微分は，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であることを確かめよ．

今度は，$y = f(x) + g(x)$ という形の関数の微分を考えます．微分することとの最初の意味に立ち返って考えると，$\dfrac{dy}{dx}$ の計算は，

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

として，h を 0 にしたものを考えればよかったのです．ですから，$y = f(x) + g(x)$ の微分 $\dfrac{dy}{dx}$ は，まず $f(x)$ の微分を行って次に $g(x)$ の微分を行って，それらを足し合わせたものであるということがわかります．　また同じように考えれば $y = cf(x)$ (c はある定数) という形の関数の微分 $\dfrac{dy}{dx}$ は，$f(x)$ を微分して c をそれに掛けるだけでよいことが簡単にわかります．例えば，$y = x^2 + 5x^3$ の微分は，

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 15x^2$$

となります．

2.1.4　3次以上の方程式の解を考える（ニュートン法）

さて ニュートン法 を説明しましょう．方程式 $f(x) = 0$ と関数 $y = f(x)$ を考えます．中間値の定理により方程式 $f(x) = 0$ に解が存在することがわかったら，解付近の値を x_0 とします．$f(x) = 0$ の真の解を $\bar{x}$ とすると，$f(\bar{x}) = 0$ となります．x_0 は $\bar{x_1}$ の近似値なので，h をその誤差とすると，$\bar{x} = x_0 + h$ となります．

次に $y=f(x)$ 上の点 $(x_0, f(x_0))$ での $y=f(x)$ のグラフの接線の方程式を考えます．関数 $y=f(x)$ の微分は $\dfrac{dy}{dx}$ で，それを簡単に $f'(x)$ と書くことにすれば，$x=x_0$ での接線の傾きは $f'(x_0)$ です．$f'(x_0)$ は，誤差 h の値がとても小さければ，微分の定義から，

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{2.1}$$

と考えてもよいと思います．従って，$\bar{x} = x_0 + h$ だったので，

$$f(x_0) + hf'(x_0) = f(\bar{x}) = 0$$

となります．すなわち，

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.2}$$

となります．

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.3}$$

と置くと，(2.2) より $x_1 = \bar{x}$ であると言いたいところですが，しかし，等式 (2.1) はやはり誤差を含んでいるので，x_1 は $\bar{x}$ の近似値なのです．しかしそれでも，これまでの議論から，x_0 よりは $\bar{x_1}$ の近似値としての精度が上がっています．

一方，点 $(x_0, f(x_0))$ での $y=f(x)$ のグラフの接線の方程式は，

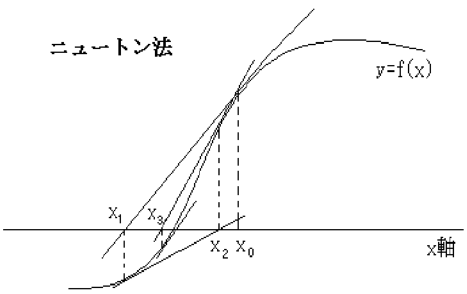
$$y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \tag{2.4}$$

です．この接線と x 軸との交点を求めるために，$y=0$ として解くと，その解は (2.3) と比べると，x_1 であることがわかります．したがって，x_1 は，幾何学的には，点 $(x_0, f(x_0))$ での接線と x 軸との交点の x 座標であるということがいえます．

さて，再び点 $(x_1, f(x_1))$ での接線を考え，x 軸との交点を求め，それを x_2 とすると，x_2 は $\bar{x}$ の近似値としてさらに精度を増してきます．x_2 を求めること，それはすなわち，

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

を計算することです．この計算を順次繰り返していけば，$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$ は $f(x) = 0$ の値にどんどん近づいていくのです．これがニュートン法です．



2.1.5　DO 文でニュートン法

では，$x^3 - x^2 + 1 = 0$ の近似解をニュートン法により求めてみましょう．$y = x^3 - x^2 + 1$ の微分は $y' = 3x^2 - 2x$ です．

```
!ニュートン法
DEF f(x)=x^3-x^2+1
DEF g(x)=3*x^2-2*x
INPUT PROMPT "x=":x
DO WHILE ABS(f(x))>10^(-6)
   LET  x=x-f(x)/g(x)
LOOP
PRINT USING "x=##.######":x
END
```

先ほどの中間値の定理でわかったように，解は $x=-1$ と $x=0$ の間に存在します．プログラムを実行させると，まず最初の値を聞いてきますから，$x=-1$ とします．すると, $x=-.754878$ と結果を表示します．中間値の定理で近似した場合と比べてみてください．

プログラム中の **DO 文**を説明します．

```
DO WHILE ABS(f(x))>10^(-6)
   LET  x=x-f(x)/g(x)
LOOP
```

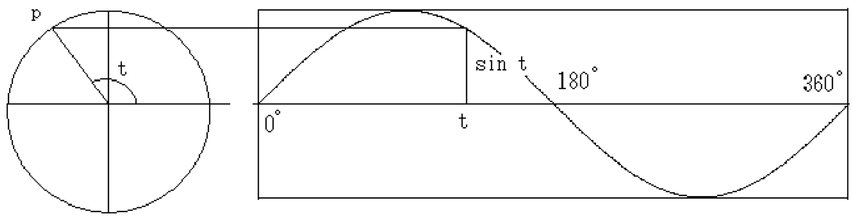
これは，$f(x)$ の絶対値の値が，10^{-6} より大きい間は，繰り返し計算しなさい．という命令です．すなわちこの DO と LOOP の中を繰り返して誤差が 10^{-6} より小さくなったとき $f(x)=0$ の近似解を表示させるのです．

問題 2.3 n と a の値を定め $\sqrt[n]{a}$ をの近似値を求めなさい．

2.2　サインカーブで遊ぼう

2.2.1　サイン，コサイン

原点を中心とする半径 1 の円周上を点 p が $(1,0)$ からスタートして，一定の速さで動いているとします．現在の点 p の角度を t として，p のいる位置の y 座標を $\sin t$ と表し，**サイン** t といいます．$y=\sin t$ のグラフを**サインカーブ**といいます．

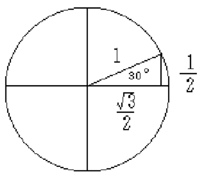


一方 p のいる位置の x 座標は $\cos t$ と表し，**コサイン** t といいます．$y=$

$\cos t$ のグラフを**コサインカーブ**といいます.

サインカーブ $y = \sin t$ は上図のようにきれいな波の形をしています．このことから，サインカーブは振動する物理現象（光，電波など）を説明するときなどにとてもよく使われています.

$y = \sin t$ のいくつかの値を説明しましょう．まず $\sin 0 = 0$ であることは，すぐにわかるでしょう．次に $\sin 30°$ です．これは，低角が $30°$ の直角三角形を考えればすぐわかります．この直角三角形の 3 辺の比は，$1 : 2 : \sqrt{3}$ になっています．今，斜辺は 1 なので，y の値（高さ）は $\frac{1}{2}$ です．したがって $\sin 30° = \frac{1}{2}$ なのです.



同じように直角三角形を考えれば，$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であることもすぐにわかります．$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ になることは，直角二等辺三角形を考えればわかります．また，最初のサインカーブの図からすぐにわかるように，$\sin 90° = 1$，$\sin 180° = 0$，$\sin 270° = -1$ となるのです.

t	$\cdots$	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$60°$	$45°$	$90°$
$\sin t$	$\cdots$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

t	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$\cdots$
$\sin t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\cdots$

問題 2.4　$y = \cos t$ について上の表を完成させなさい.

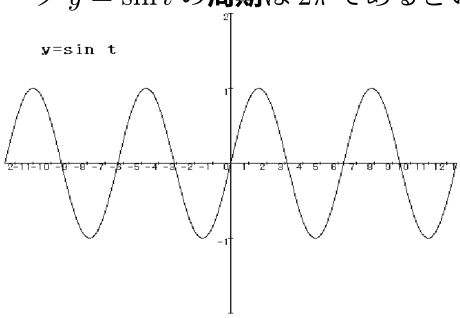
2.2.2 サインカーブを描こう

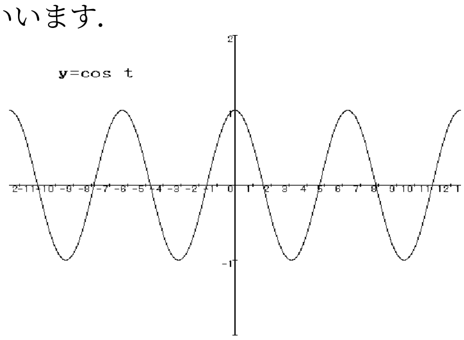
サインカーブ $y = \sin t$ を十進 BASIC で描きます．十進 BASIC では sin という関数が組み込まれています．プログラムでは最初に DEF f(t)=sin t と書けばよいのです．プログラムは以下のようになります．

```
DEF f(t)=sin(t)
SET WINDOW -4*PI,4*PI,-2,2
DRAW axes
FOR t=-4*PI TO 4*PI STEP 0.01
   PLOT LINES: t,f(t);
NEXT t
END
```

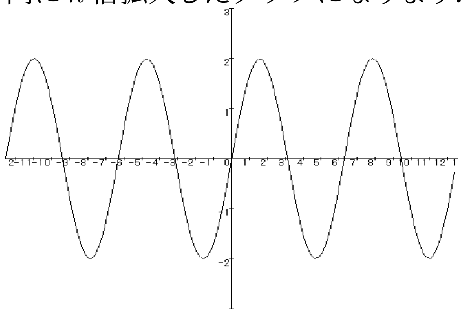
注意 上のプログラムでは，60 分法ではなく，弧度法を使いました．$180°$ は、弧度法で π となります．

さて，同様に $y = \cos t$ のグラフを書いてみます．$y = \sin t$ のグラフと $y = \cos t$ のグラフを比べてみてください．$y = \cos t$ のグラフは $y = \sin t$ のグラフを左方向へ $\dfrac{\pi}{2} = 1.570796\cdots$ $(90°)$ だけ平行移動したものになっています．ですから $y = \cos t$ のグラフいえど，やはり本質はサインカーブなのです．また図からもわかるように，サインカーブ $y = \sin t$ は，$2\pi_{rad} = 6.283185\cdots$ $(360°)$ で同じ波形を繰り返します．このことを簡単にサインカーブ $y = \sin t$ の**周期**は 2π であるといいます．





$y = 2\sin t$ のグラフは下のような図になります．これは $y = \sin t$ を y 方向に 2 倍拡大したグラフです．一般に $y = n\sin t$ のグラフは $y = \sin t$ を y 方向に n 倍拡大したグラフになります．このときの n を**振幅**といいます．



2.2.3　サインとコサインの関係

$y = \cos t$ のグラフは $y = \sin t$ のグラフを右方向へ $\dfrac{\pi}{2}$ $(90°)$ だけ平行移動したものでした．その他にもサインとコサインは深い関係があります．

まず第一に，

$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1 \tag{2.5}$$

が成り立ちます．このことはもう一度定義に戻ると，半径 1 の円周上の点 p までの角度を t としたときにの p の位置の x 成分を $\cos t$，y 成分を $\sin t$ としたのでした．ということは，そこにできる直角三角形から，三平方の定理（ピタゴラスの定理）を使えば，上式 (2.5) が成り立つことはすぐにわかります．

次に，$y = \sin t$ の微分は，

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$

であり，$y = \cos t$ の微分は，

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

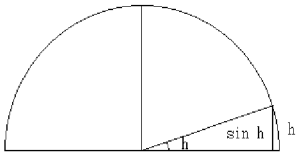
であることが成り立ちます．

この証明には，この角度 h がほぼ 0 のとき，$h = \sin h$ が成り立つことと，

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \qquad (2.6)$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \qquad (2.7)$$

というう公式を使って証明できます．

h がほぼ 0 のとき，$h = \sin h$ が成り立つことについては，直感的には，下図に示すような半径 1 の円のその角が極めて小さい角 h(ラジアン) の扇形を考えるとわかります．この扇形の周の長さは h で，$\sin h$ は扇形の x 軸からの高さになっています．この角度 h をどんどん小さくしていくと，だんだん $h = \sin h$ が成り立つことが想像できると思います．勿論数学的に厳密に証明することもできますが，それは他の数学の教科書などをみて勉強してください．



(2.6) と (2.7) の公式については，長くなるのでここでは省略します．これも他の数学の教科書などの三角関数の加法定理のところをみて勉強してください．

さて，$y = \sin t$ のとき，その微分 $\dfrac{dy}{dt}$ を求めることは，$\dfrac{\sin(t+h) - \sin t}{h}$ の h を 0 に近づけたときの関数を求めることでした．上の最初の公式 (2.6) を使うと，

$$\sin(t+h) - \sin t = 2\sin\frac{h}{2}\cos(t+\frac{h}{2})h$$

となります．したがって，$\dfrac{\sin(t+h) - \sin t}{h}$ は，$\dfrac{\sin\frac{h}{2}\cos(t+\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$ と変形さ

れ，h を 0 に近づけると，$\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ だったので，$\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ が得られます．

$y = \cos t$ の微分が $-\sin t$ になることは，2番目の公式 (2.7) を使うことにより証明できます．自分で証明してみて下さい．

2.2.4　sin t の近似値

前の節で，$\sin 0 = 0$, $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ などの値をよく知られている直角三角形を使って計算しました．その他の値はどのようにして計算するのでしょうか．ここでは，**マクローリン級数**を使って求めてみたいと思います．

関数を多項式の級数で近似することが，マクローリン級数による近似です．関数 $y = f(t)$ が与えられたとき，そのマクローリン級数とは，

$$f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

のことです．ここで，$f'(0)$ は，$f(t)$ の微分に 0 を代入した式，$f''(0)$ は，$f(t)$ の 2 回微分に 0 を代入した式，$f'''(0)$ は，$f(t)$ の 3 回微分に 0 を代入した式などを表します．数学では，与えられた関数のマクローリン級数がいつ一致するかが問題となりますが，よく知られている関数のほとんどが，原点の近くで一致します．

早速，$y = \sin t$ のマクローリン級数を計算しましょう．

① まず，$y = \sin t$ なので，$f(0) = \sin 0 = 0$ です．

② 次に，$y' = \cos t$ なので，$f'(0) = \cos 0 = 1$ です．

③ 次に，$y'' = (\cos t)' = -\sin t$ なので，$f''(0) = -\sin 0 = 0$ です．

④ 次に，$y''' = (-\sin t)' = -\cos t$ なので，$f'''(0) = -\cos 0 = -1$ です．

⑤ 次に，$y'''' = (-\cos t)' = \sin t$ なので，$f''''(0) = \sin 0 = 0$ です．

⑥ 次に，$y''''' = (\sin t)' = \cos t$ なので，$f'''''(0) = \cos 0 = 1$ です．

ここまでくると規則性がわかります．従って，$y = \sin t$ のマクローリン級

数は,

$$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} \cdots$$

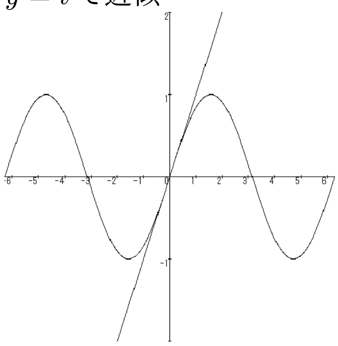
となるのです.

注意! $y = \sin t$ のマクローリン級数の t はラジアンです.

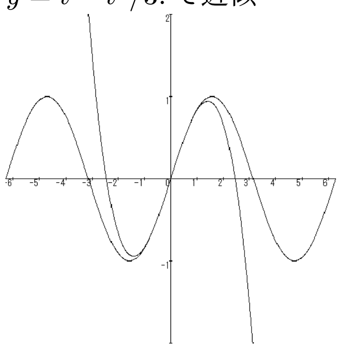
早速 $y = \sin t$ のマクローリン級数での近似の様子をグラフィックスで見てみましょう.

```
DEF f(t)=sin(t)
DEF g(t)=t-t^3/FACT(3)+t^5/FACT(5)-t^7/FACT(7)+t^9/FACT(9)
SET WINDOW -2*PI,2*PI,-2,2
DRAW axes
FOR t=-2*PI TO 2*PI STEP 0.01
   PLOT LINES: t,f(t);
NEXT t
PLOT LINES
SET LINE COLOR 4
FOR t=-2*PI TO 2*PI STEP 0.01
   PLOT LINES: t,g(t);
NEXT t
END
```

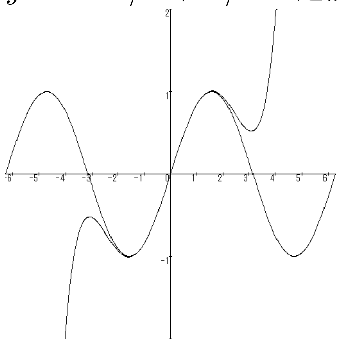
$y = t$ で近似



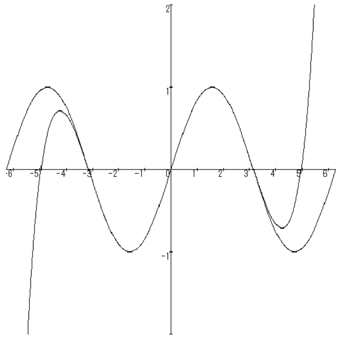
$y = t - t^3/3!$ で近似



$y = t - t^3/3! + t^5/5!$ で近似



$y = t - t^3/3! + t^5/5! - x^7/7! + x^9/9!$ で近似



上図をみてわかるように，マクローリン級数の項が増えていくと，どんどん本来のグラフ $y = \sin t$ の姿に近づいていくのです.

問題 2.5 $y = \cos t$ のマクローリン級数を求め，その様子をグラフィックスで表しなさい.

　マクローリン級数の意味がよくわかったところで，$\sin\dfrac{\pi}{15}$ を求めてみましょう．$y = \sin t$ のマクローリン級数の t に $\dfrac{\pi}{15}$ を代入すればよいのです.

```
DEF g(t)=t-t^3/FACT(3)+t^5/FACT(5)-t^7/FACT(7)+t^9/FACT(9)
LET  t=PI/15
PRINT g(t)
END
```

　実行すると結果は，0.207911690817761 と表示されます．勿論十進BASICには三角関数は組み込まれているので，$\sin\dfrac{\pi}{15}$ はすぐに計算します．それをみるには，次のプログラムを実行すればよいのです.

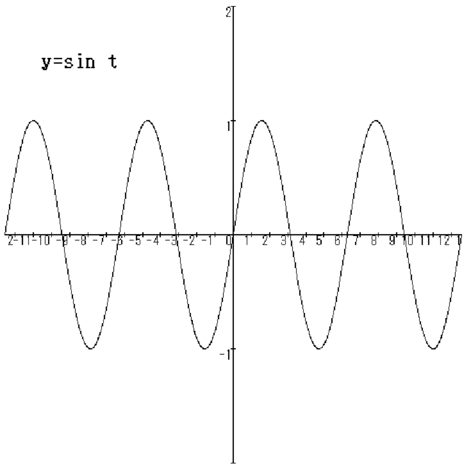
```
PRINT sin(PI/15)
END
```

　結果は 0.207911690817759 でした.

2.2.5　いろいろな波形

ここでは，サインカーブを使っていろいろなことを実験してみましょう．先ずは $y = \sin t + \cos t$ のグラフを描いてみましょう．

```
DEF f(t)=sin(t)+cos(t)
SET WINDOW -4*Pi,4*Pi,-2,2
DRAW axes
FOR t=-4*Pi TO 4*Pi STEP 0.01
   PLOT LINES: x,f(x);
NEXT t
END
```

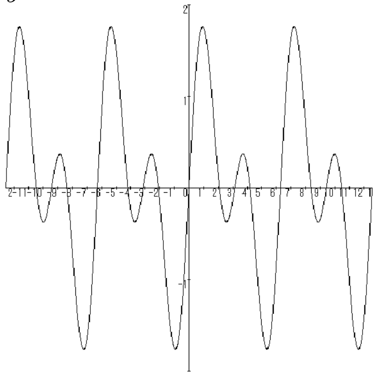


グラフを見てわかることは，これもまたサインカーブになっているということです．つまり，$y = \sin t + \cos t$ のグラフは，$y = \sin t$ のグラフを平行移動したものになっているということがわかります．三角関数の加法定理を勉強するとこの理由がもっとよくわかります．しかし $y = \sin t$ と $y = \cos t$ の 2 つのグラフを上下に並べてじっくり考えてみても直感的にその理由は理解できるはずです．

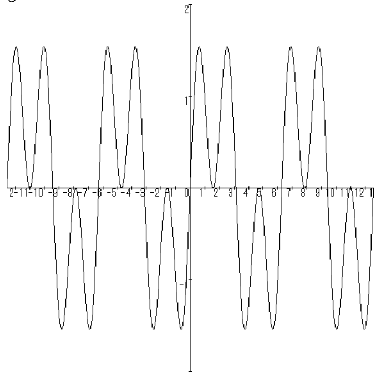
問題 2.6　$y = 2\sin t + 3\cos t$ のグラフを描きなさい．

では，$y = \sin t + \sin nt$ $(n = 1, 3, \cdots)$ のグラフはどうなると思いますか？想像してください．そしてグラフを描いてみてください．

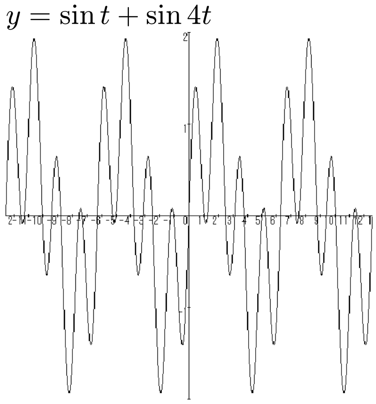
$y=\sin t+\sin 2t$



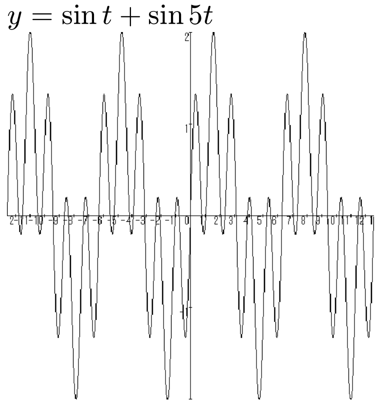
$y=\sin t+\sin 3t$



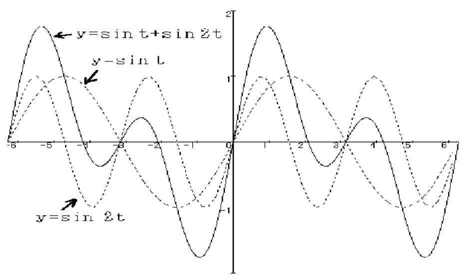
$y=\sin t+\sin 4t$



$y=\sin t+\sin 5t$



どうですか？先ず気づくことは，同じ波の形が繰り返し出ていることでしょう．それでは１周期の山の数や谷の数を数えてみましょう．そして，なぜこのような波形になったのか考えてみましょう．例えば，$y=\sin t+\sin 2t$ のグラフのことを考えるとき，$y=\sin t$ と $y=\sin 2t$ のグラフを表示させて，それを並べてしばらく眺めてみるのです．

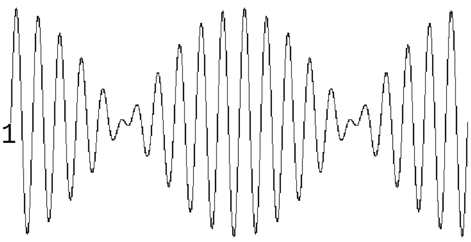


考えがまとまったら，今度は $y = \sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t + \sin 5t$ はどんなグラフになるのか想像してみてください．そして十進 BASIC で描いてみてください．

$y = \sin t - \sin 2t + \sin 3t - \sin 4t + \sin 5t$ はどんなグラフはどうでしょう．いろいろ試してみると，規則性が見つかり,「そうなのか」という感覚を覚えるはずです.

最後に，$y = \sin(a_1 t) + \sin(a_2 t)$ (a_1, a_2 非常に近い定数) のグラフを描いてください．このグラフは，物理でいう**唸り（うなり）**のグラフになります．例えば電気・電子工編学で扱うラジオの AM 放送の波としても利用されています．もちろん出た波形が，どうしてそのような形になったのかを考えたり議論したりすることもお忘れなく.

```
DEF f(t)=sin(a1*t)+sin(a2*t)
LET  a1=1
LET  a2=1.1
SET WINDOW -20*Pi,20*Pi,-4,4
DRAW axes
FOR t=-20*Pi TO 20*Pi STEP 0.01
   PLOT LINES: x,f(x);
NEXT t
END
```



＊加法定理を知っていると，$y = \sin(a_1 t) + \sin(a_2 t)$ は,

$$y = 2\cos\left(\frac{a_1 - a_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{a_1 + a_2}{2}t\right)$$

と変形できます．このとき a_1 と a_2 の値が非常に近いと，cos の方はゆっくり振動し，sin の方は速く振動します．そして $2\cos\left(\frac{a_1-a_2}{2}t\right)$ を $\sin\left(\frac{a_1+a_2}{2}t\right)$ の係数（すなわち振幅の大きさ）と思えば，上の図のような唸りになることは十分わかります.

2.2.6　フーリエ級数のはなし

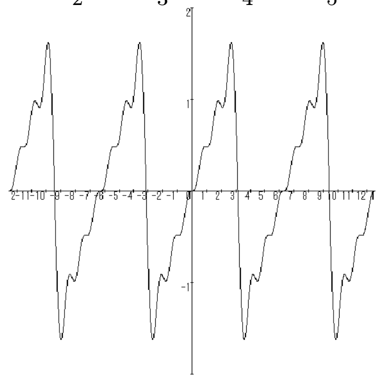
(1)　$y = \sin t - \dfrac{\sin 2t}{2} + \dfrac{\sin 3t}{3} - \dfrac{\sin 4t}{4} + \dfrac{\sin 5t}{5} - \dfrac{\sin 6t}{6}$

のグラフと

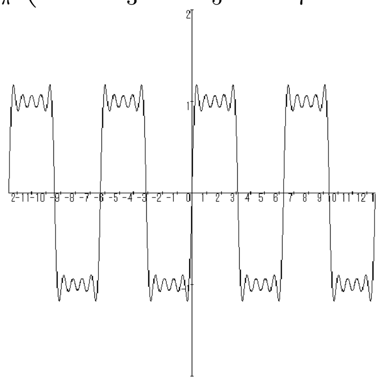
(2)　$y = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{\sin 3t}{3} + \dfrac{\sin 5t}{5} + \dfrac{\sin 7t}{7} + \dfrac{\sin 9t}{9}\right)$

のグラフを描いてください.

$$y = \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{\sin 5t}{5} - \frac{\sin 6t}{6}$$



$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \frac{\sin 9t}{9}\right)$$



2 つのグラフをみて気づくことがありますか. 実は最初の方のグラフは, 同じ規則でもっと項を増やしていくと, t が $-\pi$ から π の範囲で $y = t$ に近似していくのです. 後の方のグラフは, こちらも同じ規則で項をどんどん

増やしていくと，t が 0 から π の範囲でしだいに $y=1$ に近似していくのです．

$$y=\sin t-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}-\frac{\sin 4t}{4}+\frac{\sin 5t}{5}-\frac{\sin 6t}{6}\cdots$$

のことをを $y=x$ の**フーリエ級数**といっています．ですから

$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\frac{\sin 7t}{7}+\frac{\sin 9t}{9}\cdots\right)$$

は $y=1$ のフーリエ級数です．つまりフーリエ級数は細かな波によって関数を近似させようという考えなのです．そしてこの考えは波の性質を考える電気や音の理論などでよく使われるとても重要なものです．

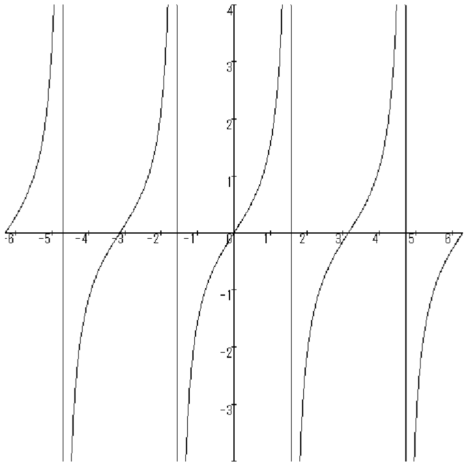
フーリエ級数をきちんと理解するためには，きちんとした微分積分の知識が必要です．しかしコンピュータを使えば直感的にその様子がわかります．いろいろな三角級数を作ってみて，どういうグラフのフーリエ級数になっているのか予想してみてください．

問題 2.7　$y=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$ はどんな関数のフーリエ級数になっているか．

2.2.7　その他の曲線

$\dfrac{\sin t}{\cos t}$ のことを，$\tan t$ と描いて**タンジェント** t といいます．この節ではまず，$y=\tan t$ のグラフを描いてみます．しかし，$y=\tan t$ のグラフは，t が $-\pi/2$ や $\pi/2$ の分母の $\cos t$ が 0 になるので，計算できなくなります．このことに注意しないとプログラムはエラーとなってしまいます．**しかし**十進 BASIC なら**例外処理機能**がついているので大丈夫なのです．

```
SET WINDOW -2*Pi,2*Pi,-4,4
DRAW axes
FOR t=-2*Pi TO 2*Pi STEP 0.01
   WHEN EXCEPTION IN
      PLOT LINES: t,tan(t);
   USE
      PLOT LINES
   END WHEN
NEXT t
END
```



例外処理機能とは，上のプログラムの

```
   WHEN EXCEPTION IN
      PLOT LINES: t,tan(t);
   USE
      PLOT LINES
   END WHEN
```

のところをさします．通常のプログラムでは，for 文で t の値が 0 になったところで PLOT LINES: t,tan(t) を実行すると，エラーになってプログラムが停止します．そこで，エラーになる可能性のある文 PLOT LINES: t,tan(t) を WHEN EXCEPTION IN と USE とで囲んで書くと，エラーが発生したとき，USE 行と END WHEN 行の間に書かれた文を実行して次に進むのです．

問題 2.8　$y = \sin\frac{1}{t}$ のグラフを描きなさい．

問題 2.9　$y = x\sin\frac{1}{t}$ のグラフを描きなさい．

　さていよいよこの節の最後となりました．最後は，$x = \cos(nt)$，$y =$

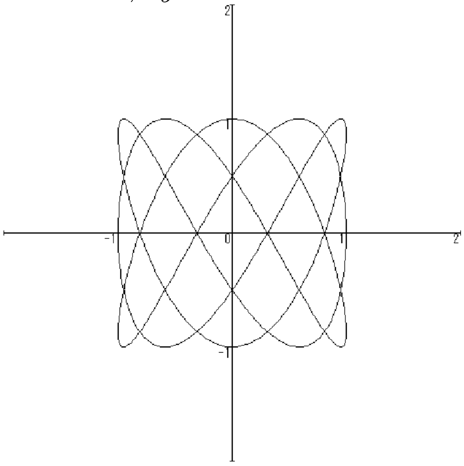
$\sin(mt)$ というタイプの式から得られる曲線を描いて終わりにします．これは **リサージュ曲線** という有名な曲線です．つまり，リサージュ曲線は，t をパラメータとして，$x = \cos(nt)$，$y = \sin(mt)$ で定義された曲線のことです．一番簡単なものは，$x = \cos t, y = \sin t$ で，円を表す式です．

リサージュ曲線は，実際にはオシロスコープなどで見ることができます．ブラウン管の陰極からから出る電子線に，それに垂直で，互いに直行する 2 方向に，サインカーブのような振動をする電気力または磁気力を加えると，電子線の当たる蛍光板上にリサージュ曲線が現れるのです．

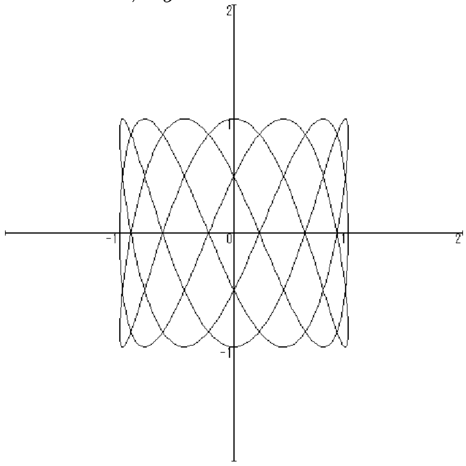
ここでは，十進 BASIC でリサージュ曲線を作ってみます．n と m にいろいろな値を代入していろいろなリサージュ曲線を見てみましょう．そしてそれらはどのような曲線になっているのか観察してみましょう．特に n/m が有理数の場合と無理数の場合ではその様子が全く違ってきます．それはどういう理由からでしょうか．考えてみてください．例えば，$x = \cos 3t$，$y = \sin 5t$ のリサージュ曲線のことを考えるとき，$x = \cos 3t$ と $y = \sin 5t$ のグラフを別々に表示させて，自分がオシロスコープになったつもりで，それらを直角に並べてしばらく眺めてみるのです．

```
! リサージュ曲線
LET  n=3
LET  m=5
SET WINDOW -2,2,-2,2
DRAW axes
FOR t=0 TO 2*Pi step 0.01
   PLOT LINES: cos(n*t),sin(m*t);
NEXT t
END
```

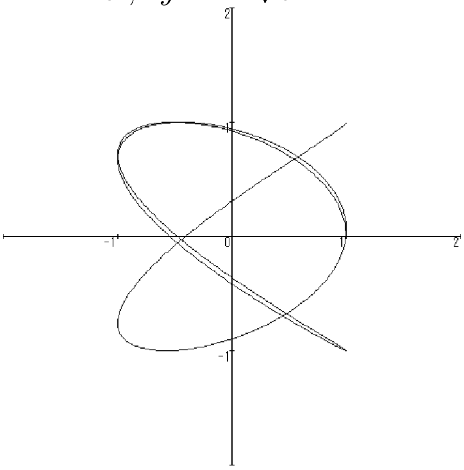
$x = \cos 3t, \quad y = \sin 5t$



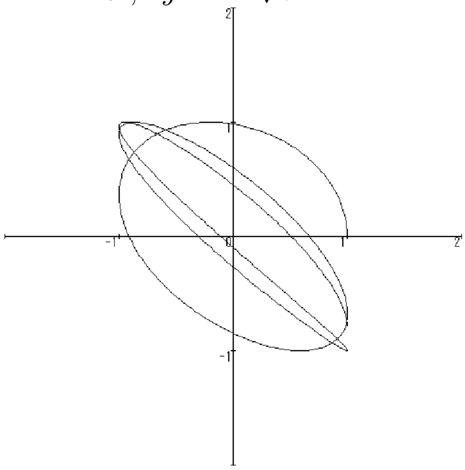
$x = \cos 3t, \quad y = \sin 7t$



$x = \cos 3t, \quad y = \sin \sqrt{5}t$



$x = \cos 3t, \quad y = \sin \sqrt{7}t$



問題 2.10　半径 1 の円周上の 1 点を p とします．今その円が x 軸上をすべることなく転がっているとします．そのとき，点 p の軌跡を描きなさい．（この曲線を**サイクロイド**といいます.）また，円上を転がったときの点 p の軌跡を描きなさい．

2.3 長さや面積を求めるプログラムから積分を理解しよう

2.3.1 長さを求める

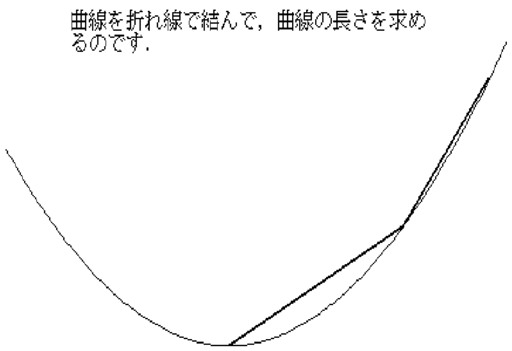
与えられた曲線のある区間の長さを求めることを考えましょう．例えば，放物線 $y = x^2$ の $(0,0)$ から $(1,1)$ までの長さを求めるにはどうしたらよいのでしょうか．

積分（正確には定積分）学んだことのある人なら，それは積分すればよいはずと思う人がいるかもしれません．しかし，この線積分は，

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx \tag{2.8}$$

となります．積分をすでに知っていて計算が得意な人は少し考えればこれは解けます．しかしここでは十進 BSIC で近似値を求めてます．つまり積分が出来なくてもおおよそ大丈夫なのです．

長さを測る最も簡単な方法は，その曲線を細かく区切って，それを直線と思ってその長さを測り，それを全て足し合わせていけばよいのです．



まず，x の幅を 0.01 にとり，点 $(0,0)$ と点 $(0.01, 0.01^2)$ をつないだ直線の距離を計算します．それは，三平方の定理を使えば，$\sqrt{0.01^2+(0.01^2-0)^2}$ で求めることが出来ます．その長さを L とします．次に，点 $(0.01, 0.01^2)$ 点

$(0.02, 0.02^2)$ とをつないだ直線の距離 $\sqrt{0.01^2 + (0.02^2 - 0.01^2)^2}$ を計算します．そして，L と今求めた小さな区間の長さを足したものを改めて L とします．次に，点 $(0.02, 0.02^2)$ 点 $(0.03, 0.03^2)$ とをつないだ直線の距離を計算します．それは，$\sqrt{0.01^2 + (0.03^2 - 0.02^2)^2}$ です．やはり L と今求めた小さな区間の長さを足したものを改めて L とします．この作業を点 $(1, 1^2)$ まで行えばよいのです．一般的に，この作業は h を x の微小な幅とすると，微小な直線の長さ $\sqrt{h^2 + (f(x) - f(x-h))^2}$ を全部足し合わせることなるのです．実はこれこそ積分の基本的な考え方なのです．

では実際にこの方法で，まず簡単な直線 $y = x$ の $(0, 0)$ から $(1, 1)$ までの長さを求めることにします．プログラムはつぎのようになります．

```
! 長さを求めるプログラム
DEF f(x)=x
LET  L=0
LET  h=0.01
FOR x=0 to 1 step h
   LET  dL=sqr(h^2+(f(x)-f(x-h))^2)
   IF x=0 THEN LET  dL=0
   LET  L=dL+L
NEXT x
PRINT L
END
```

実行するまでもなく結果は $\sqrt{2}$ です．しかし実行してみます．やはり結果は，1.41421356237307 となりました．

では，放物線 $y = x^2$ の $(0, 0)$ から $(1, 1)$ までの長さを求めてみましょう．それには，最初の DEF 文を DEF f(x)=x^2 にすればよいだけです．結果は 1.47893540397425 でした．

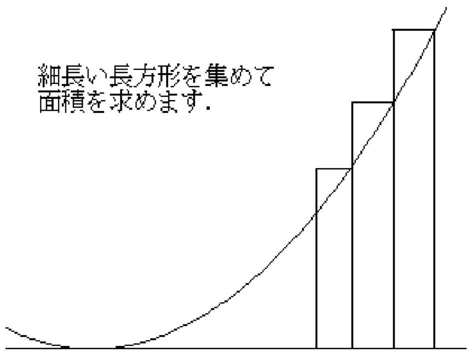
2.3.2　面積を求める

次に放物線 $y = x^2$ と $x = 0$,$y = 0$,$x = 1$ で囲まれた部分の面積を求めることにします．すぐ後に説明しますが，積分を知っている人にはこの問題は簡単です．$x = 0$ から $x = 1$ までの定積分を行えばよいのです．とりあえずやってみると，

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

となります.

ではプログラムで求めるにはどうしたらよいのでしょう．それには，$y = x^2$ と $x = 0$,$y = 0$,$x = 1$ で囲まれた部分を図のように細かな長方形にして，全部足していけばよいのです．そしてこれこそがまさに積分（定積分）の考え方なのです.（積分には不定積分と定積分があります.）



まず，x の幅を 0.01 にとります．点 $(0, 0)$ から点 $(0.01, 0)$ までを底辺，点 $(0.01, 0)$ から点 $(0.01, 0.01^2)$ までを高さとする長方形の面積を計算します. それは，0.01×0.01^2 です．その面積を S とします．次に，点 $(0.01, 0)$ から点 $(0.02, 0)$ までを底辺，点 $(0.02, 0)$ から点 $(0.02, 0.02^2)$ までを高さとする長方形の面積を計算します．それは，0.01×0.02^2 です．そして，S と今求めた細長い長方形の面積を足したものを改めて S とします．次に，点 $(0.02, 0)$ から点 $(0.03, 0)$ までを底辺，点 $(0.03, 0)$ から点 $(0.03, 0.03^2)$ まで

を高さとする長方形の面積を計算します．それは，0.01×0.03^2 です．やはり S と今求めた細長い長方形の面積を足したものを改めて S とします．この作業を点 $(1, 1^2)$ まで行えばよいのです．一般的には h を x の微小な幅とすると，細長い長方形の面積 $\sqrt{h \times f(x)}$ を全て足し合わせることになるのです．

```
! 面積を求めるプログラム
DEF f(x)=x^2
LET  S=0
LET  h=0.001
FOR x=0 to 1 step t
   LET  dS=h*f(h)
   IF x=0 THEN LET  dS=0
   LET  S=dS+S
NEXT x
PRINT S
END
```

実行結果は 0.3338335 でした．プログラムの h の値を 0.1^6 として計算してみると，少し時間はかかりますが，0.333333833332132 とでてきます．だんだんと $\dfrac{1}{3}$ に近づいていきます．

2.3.3　定積分について

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの定積分することを次のように書きます．

$$\int_a^b f(x)dx$$

この記号を説明すると，dx が面積を求めるプログラム中の h に当たります．そして，$f(x)dx$ はプログラム中の細長い長方形 h*f(x) に当たるのです．$\int_a^b f(x)dx$ は x を a から b まで動かして $f(x)dx$ を全部足しなさい，という意味なのです．$\int$ は英語の SUM の S を長く伸ばした形を表していて，

「足し合わせろ」という意味が込められています．注意点は，負の面積が現れることです．例えば，$y=x^3$ について，$x=-1$ から $x=0$ までプログラムを使って積分してみてください．答えは -0.24950025 となるはずです．

```
DEF f(x)=x^3
LET  S=0
LET  t=0.001
FOR x=-1 to 0 step t
   LET  dS=t*f(x)
   IF x=-1 THEN LET  dS=0
   LET  S=dS+S
NEXT x
PRINT S
END
```

さて，今までの話を忘れて，これから積分と微分の関係について話をします．まず $\int f(x)dx$ のことを，関数 $y=f(x)$ の**不定積分**といい，微分の逆操作を行うということに決めます．例えば，$y=x^3$ の微分は $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ なので，$\int x^2dx=\dfrac{1}{3}x^3+c$ となります．ここで c は積分定数と呼ばれ，ある１つの数を意味します．定数は $y=c$ というグラフを考えると水平なグラフで，従ってどの点においてもその傾きは零なので，微分しても常に零です．ですから不定積分のときは必ず足しておかなければならないのです．一般に $\int f(x)dx=F(x)+c$ と書いたとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**といいます．$\dfrac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数です．

さて定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ のやり方は，はじめに，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めます．そして，求まった $F(x)$ の x に a と b を代入してたものを $F(a)$，$F(b)$ として，$F(b)$ から $F(a)$ を引くというように決めます．これが $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値となります．すなわち，

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

です．

非常に不思議で面白いことは，実は上のように決めた定積分の方法が，関数 $y=f(x)$ と $y=0$，$x=a$,$x=b$ で囲まれた面積を求めることになっているということです．この理由をきちんと知るためには，(ε-δ 論法などによる) 数学的に厳密な理論が必要となります．それをどうしても勉強してみたければ，例えば，高木貞治の「数学概論」などの本格的な微分積分の本などを読んでみて下さい.

次に最初にやった曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ から b までの長さ L を求めるということを積分記号で表すとどうなるのでしょうか．長さを求めるプログラムの中の sqr(h^2+(f(x)-f(x-h))^2) を，$dx=\mathrm{h}$，$dy=\mathrm{f(x)}-\mathrm{f(x-h)}$ とおいて，$\sqrt{dx^2+dy^2}$ で置き換えます．これは微小な直線の長さを意味します．これを $x=a$ から $x=b$ までの範囲で全て足し合わせる，すなわち積分すれば良いわけです．記号で書くと次のようになります.

$$L=\int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

3つ目の変形させた式に現れる $\dfrac{dy}{dx}$ は $y=f(x)$ の微分でした．$y=x^2$ の場合，その微分は $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので，$x=0$ から $x=1$ までの長さは，(2.8) の式になるのです。

問題 2.11 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^7dx$ を計算しなさい．またプログラムを作って，その値を計算させなさい.

問題 2.12 $y=x^7$ の $x=0$ から $x=1$ までの長さを求める式を書きなさい．またその長さをプログラムを作って計算しなさい.

2.3.4　シンプソンの公式

定積分の近似値を精度良く求めるものに，微小区間に対応する関数の値を折れ線で結び，得られた微小台形を足し合わせるという考えで作った台形公式や，さらに折れ線を放物線で結んで考えた**シンプソンの公式**があります．ここでは，よく使われるシンプソンの公式を説明します．

$\int_a^b f(x)dx$ $(a > b)$ の値を求めるために，積分区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分し，それを h とします．すなわち，

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

とします．次に，$f_i = f(x_i)$，$f_{i-1} = f(x_i - h)$，$f_{i+1} = f(x_i + h)$ と置きます．そして，$y = A(x-x_i)-2+B(x-x_i)+f_i$ という 2 次曲線を考えます．そして 2 次曲線と曲線 $y = f(x)$ が, (x_{i-1}, f_{i-1})，(x_i, f_i)，(x_{i+1}, f_{i+1}) で交わるように，定数 A, B を決めます．$f_{i-1} = Ah^2 - Bh + y_i$，$f_{i+1} = Ah^2 + Bh + y_i$ より，結局

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad B = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$$

です．関数 $y = f(x)$ をこの 2 次曲線で近似すると，

$$\int_{x_{\mathrm{i-1}}}^{x_{\mathrm{i+1}}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

となります．これがシンプソンの公式の考え方です．したがってシンプソンの公式は，次のようになります．

シンプソンの公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n} f_{2i} - f_{2n})$$

シンプソンの公式に現れる最初の和は，奇数番目の値の和であり，次の和は偶数番目の値の和です．プログラムは以下のようになります．

```
! シンプソンの公式で数値積分
DEF f(x)=x^7
LET  a=0     ! 積分区間
LET  b=1     ! 積分区間
LET  n=10    ! 等分数
LET  h=(b-a)/(2*n)
FOR I=1 to 2*n
   LET  x=a+i*h
   IF MOD(i,2)=1 THEN   ! 奇数番目を計算
      LET  f1=f1+f(x)
   ELSE
      LET  f2=f2+f(x)   ! 偶数番目を計算
   END IF
NEXT I
LET  S=(h/3)*(f(a)+4*f1+2*f2-f(b))  ! シンプソンの公式
PRINT S                 ! 積分値を表示
END
```

$\int_0^1 x^7 dx$ をシンプソンの公式で得た結果と実際の値を比較してみます．実際の値は，$\int_0^1 x^7 dx = 1/8 = 0.125$ です．シンプソンの公式を使って得た値は右の表です．

$2n$ 等分	積分の値
10	0.125115
20	0.125007265625
30	0.12500143804298
40	0.125000455322266
50	0.12500018656
60	0.125000089984856
70	0.1250000485767
80	0.125000028476715
90	0.125000017778705
100	0.125000011665

問題 2.13 統計学ではまず平均に関することを学びます．平均に関して重要な分布が正規分布です．次の積分はその正規分布に使われている積分です．$\frac{1}{2\pi}\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ の値をシンプソンの公式を使ってなるべく良い精度で求めなさい．

（統計に限らずここに出てきた e はとても大切な数で，$e = 2.718281828\cdots$ で，**自然対数の底**または**ネピアの数**と呼ばれています．十進 BASIC では，EXP という関数で組み込まれています．e は円周率 π などと同じ仲間の数で無理数でもあり，超越数と呼ばれる数でもあります．また自然界の現象を記述した微分方程式などの解にもよく登場します．もともとは，$(1+h)^{\frac{1}{h}}$ で h を限りなく 0 にしたときの極限の値なのです．そして関数 e^x の微分はやはり e^x であるというとても良い性質を持っています.）

2.4　微分方程式を解こう

2.4.1　オイラー法で微分方程式を解く（その１）

微分方程式は，$\dfrac{dy}{dx}$ などの微分の記号を使って書かれた方程式のことです．これを解くためには，積分をしなくてはいけません．しかし特殊な場合を除いて，ほとんどの微分方程式が積分出来なくてお手上げという状態にあります．そこで，積分と同じように十進 BASIC を使って，数値的に微分方程式を解くことにこだわっていみたいと思います．微分方程式を解析的に求めることは，他の微分方程式の本を参考にして勉強してください．

$\dfrac{dy}{dx} = y$ で初期値を $x = 0, y = 1$ という微分方程式を解いてみます．これは，**線形**（または**変数分離形**）といわれるタイプの微分方程式で，微分方程式の解析的な解き方を知っている人は，特性方程式 $t - 1 = 0$ の解が $t = 1$ なので，$y = e^x$ となりることはすぐわかります.

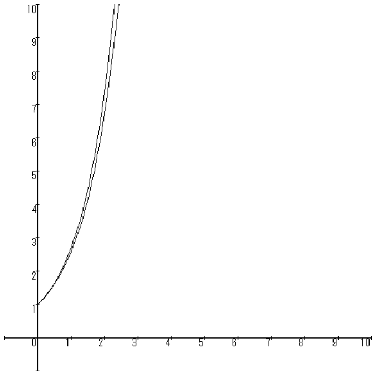
しかし，数値計算で考えたいために，微分方程式を $\Delta y = y\Delta x$ と考えます．ここであえて Δx と書いたのは，ほんのちょっとの x という気持ちからです．つまり，$\Delta y = y\Delta x$ の解釈は，ほんのちょっとの y は，ほんのちょっとの x にそのときの y の値を掛けたものに等しいということになります．そして最初の値を (x_0, y_0) とし，x の**増分** Δx に対する y の増分 Δy

を計算して，次の値 (x_1, y_1) を計算する．そしてそれを繰り返して次々に解曲線を決定していくのです.

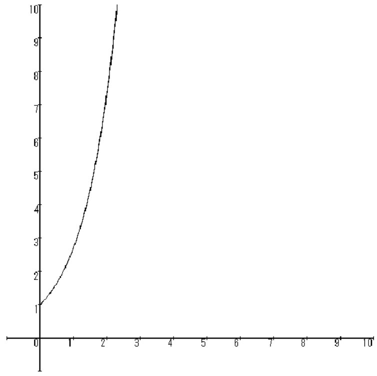
数値的に説明します．まず $x=0, y=1$ からスタートします．$\Delta x = 0.1$ としておきます．すると，$\Delta y = 0.1$ ですから，$x=0.1, y=1.1$ が得られます. 次に $\Delta y = y\Delta x = 1.1 \times 0.1 = 0.11$ なので，$x=0.2, y=1.1+0.11=1.21$ が得られます．さらに $\Delta y = y\Delta x = 1.21 \times 0.1 = 0.121$ なので，$x=0.3, y=1.21+0.121=1.331$ が得られます．このように求めていけばよいのです. この方法を**オイラー法**といいます．プログラムは次になります.

```
! オイラー法で，dy=ydx を解く
LET  x=0  ! 初期値
LET  y=1  ! 初期値
LET  dx=0.1 ! x の増分
SET WINDOW -1,10,-1,10
DRAW axes
LET  a=x+dx
PLOT LINES: x,y;
! オイラー法で求めた解曲線
FOR x=a to 10 step dx
   LET  dy=y*dx
   LET  y=y+dy
   PLOT LINES: x,y;
NEXT x
PLOT LINES
SET LINE COLOR 4
! 線形として解いた解曲線
DEF f(x)=exp(x)
FOR x=a to 10 step dx
   PLOT LINES: x,f(x);
NEXT x
END
```

x の増分を 0.1 にした場合



x の増分を 0.01 にした場合



問題 2.14 次の微分方程式は，耐久消費財、人口などの成長を記述するモデルとしてよく使われる**ロジステック方程式**といわれるものです．初期値 $x = 0, y = 0.2$ として，オイラー法を使って解の曲線を描いて，曲線の状況を把握しなさい．

$$\frac{dy}{dx} = y - y^2$$

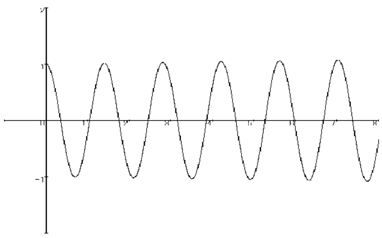
2.4.2　オイラー法で微分方程式を解く（その２）

2 **階の線形微分方程式** $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -20x$，初期値 $t = 0, x = 1, x' = 0$ を解いてみます．物理学ではこのタイプの方程式を**単振動の微分方程式**といっています．単振動の微分方程式は，上の方程式でいえば，物体の位置を x とすると，そのときの戻ろうとする力 x'' は，そのときの位置 x に比例していて，$-20x$ に等しいと考えて方程式をたてたものです．例えば，竹のような棒を小川に架けて，その上に人が乗ったとします．そのとき，竹の橋はたわみますが竹は元の状態に戻ろうとします．そして，竹の戻ろうとする力は，位置にしか影響しないと考えているのです．この条件のもとで，人が川に飛び込んだ後，竹はどのようになるでしょうか，というのがこの単振動微分方程式の問題なのです．

解析的に解くとこの解は，$x = \cos 2\sqrt{5}t$ です．ですから，こういう状況での物体は行ったり来たりを繰り返すのです．これを私たちはオイラー法で解きその様子を図にします．考え方は，$\dfrac{dx}{dt} = z$, $\frac{dz}{dt} = -20x$ と**連立微分方程式**に書き直してみることです．そうすると，オイラー法が使えるわけです．

```
! オイラー法で，x''=-20x を解く
LET  t=0  ! 初期値
LET  x=1  ! 初期値
LET  x1=0    !y1=dy/dt
LET  dt=0.001 ! t の増分
SET WINDOW -1,10,-2,2
DRAW axes
LET  a=t+dt
PLOT LINES: t,x;
! オイラー法
FOR t=a to 10 step dt
   LET  dx=z*dt
   LET  dz=(-20*x)*dt
   LET  x=x+dx
   LET  z=z+dz
   PLOT LINES: t,x;
NEXT t
END
```

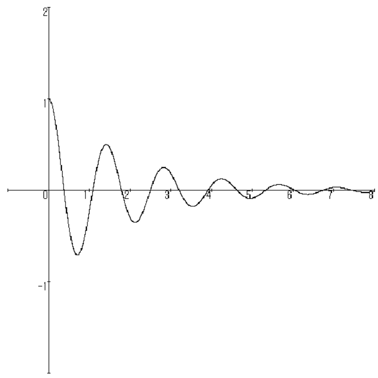
t の増分は 0.001



次に微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -20x - \dfrac{dx}{dt}$，初期値 $t=0, x=1, x'=0$ を解いてみましょう．この式は先ほどの単振動の方程式に $-\dfrac{dx}{dt}$ の項を加えた式

です．これは物理的には，戻ろうとする力はそのときの位置 x だけでなく，そのときの速さも影響していると考えて作られたものです．例えば空気などの抵抗は物体の速さを減少させます．よって，戻ろうとする力にも影響を及ぼすと考えるのです．

これも練習のためにオイラー法で解いて，そのグラフを見てみてください．考え方は，$\dfrac{dx}{dt} = z$，$\dfrac{dz}{dt} = -20x - z$ と連立微分方程式に書き直してみることです．t の増分を 0.01 したとき，結果は以下の通りになります．



グラフを見てお分かりのように，このグラフは振動がどんどん減ってきています．物理学ではこの現象を**減衰振動**といっています．

実はこの解は，解析的には $x = e^{-t/2}(\cos\dfrac{\sqrt{79}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{79}}\sin\dfrac{\sqrt{79}}{2}t)$ です．もし $e^{-t/2}$ という項がなかったならば，$\cos\dfrac{\sqrt{79}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{79}}\sin\dfrac{\sqrt{79}}{2}t$ の部分はサインカーブです．したがってこの現象は単振動で，物体は行ったり来たりします．ということは，$e^{-t/2}$ はサインカーブの係数になりますから，波の振幅を意味します．したがって減衰の状況は振幅が $x = e^{-t/2}$ でだんだんと減少しているのです．

問題 2.15 電気回路網に現れる電流の強さ I に関する微分方程式,

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 3\frac{dI}{dt} + 4I = 0$$

初期値 $t=0, I=0, I'=0$ を解きなさい.

2.4.3　ルンゲ・クッタ法でもっと精密に

微分方程式の近似解法の基本的な考え方は，オイラー法で述べました．しかしオイラー法では数値計算としての精密さに欠けるので，より精密な 4 **次のルンゲ・クッタ法**がよく利用されます．4 次のルンゲ・クッタ法は,解曲線の各点でのテーラー展開の第 4 次近似まで考えて作られた方法です.ここでは詳細な理論は触れずに 4 次のルンゲ・クッタ法のやり方だけを説明します.

考える微分方程式は，$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ とします．最初の値を (x_0,y_0) として x の増分 Δx に対する y の増分 Δy を計算して，次の値 (x_1,y_1) を計算します．そしてそれを繰り返して解曲線を決定します．Δy の計算式は次のようになります.

$$\Delta y=\frac{\Delta x}{6}(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4).$$

ここで,

$$\begin{cases} k_1= & f\left(x_i,y_i\right) \\ k_2= & f\left(x_i+\frac{\Delta x}{2},y_i+\frac{\Delta x}{2}k_1\right) \\ k_3= & f\left(x_i+\frac{\Delta x}{2},y_i+\frac{\Delta x}{2}k_2\right) \\ k_4= & f(x_i+\Delta x,y_i+\Delta x k_3) \end{cases}$$

です.

さて，オイラー法とルンゲ・クッタ法の両方を使って，1 階の線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=xy \qquad (x=0,y=1)$$

を数値的に解いて比較してみます．この方程式の解は，解析的には $y=e^{x^2/2}$ となります．プログラムは以下のようになります.

```
!dy/dx=x*y を解く（オイラー法とルンゲ・クッタ法の比較）
DEF f(x,y)=x*y
LET  x1=0  ! 初期値
LET  y1=1  ! 初期値
LET  dx=0.1 ! x の増分
LET  a=x+dx
LET  x=x1
LET  y=y1
LET  oy=y
PRINT USING "##.# ##.######## ##.######## ##.########": x,y,y,y
PLOT LINES : x,y;
FOR x=0 to 2 step dx
! ルンゲ・クッタ法
   LET  k1=f(x,y)
   LET  k2=f(x+dx/2,y+dx*k1/2)
   LET  k3=f(x+dx/2,y+dx*k2/2)
   LET  k4=f(x+dx,y+dx*k3)
   LET  dy=dx*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
   LET  y=y+dy
!オイラー法
   LET  ody=f(x+dx,oy)*dx
   LET  oy=oy+ody
PRINT USING "##.# ##.### ##.### ##.###":x+dx,oy,y,exp((x+dx)^2/2)
NEXT x
END
```

上のプログラムを実行して得られた数値解は以下の表のようになります．この表からもわかるように，オイラー法よりルンゲ・クッタ法のほうが精度がよいことがわかります．

x	オイラー法での値	ルンゲ・クッタ法での値	$e^{x^2/2}$ の値
0.0	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.1	1.01000000	1.00501252	1.00501252
0.2	1.03020000	1.02020134	1.02020134
0.3	1.06110600	1.04602786	1.04602786
0.4	1.10355024	1.08328706	1.08328707
0.5	1.15872775	1.13314845	1.13314845
0.6	1.22825142	1.19721735	1.19721736
0.7	1.31422902	1.27762128	1.27762131
0.8	1.41936734	1.37712769	1.37712776
0.9	1.54711040	1.49930236	1.49930250
1.0	1.70182144	1.64872101	1.64872127

問題 2.16 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -20x - \dfrac{dx}{dt}$，初期値 $t = 0, x = 1, x' = 0$ をルンゲ・クッタ法で解きなさい.

2.4.4　もっと知りたい人のために

微分方程式や数値解法のやり方をもっと知りたい人のために，楽しくてためになるような参考文献を挙げておきます.

1. 微分方程式で数学モデルをつくろう．デヴィッド・バージェス/モラグ・ボリー著，垣田高夫/大町非佐栄訳，日本評論社

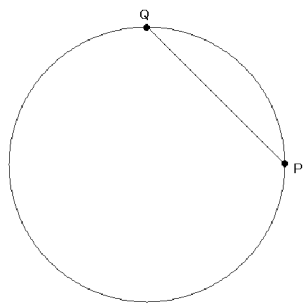
2. よくわかる数値計算（アルゴリズムと誤差解析の実際）戸川隼人/永坂秀子監修，佐藤次男/中村理一郎著，日刊工業新聞社

3. 理工学のための数値計算法，水島二郎/柳瀬眞一郎著，数理工学社

2.5 楽しく研究しよう

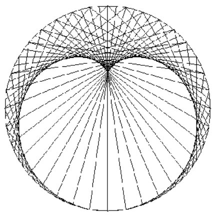
2.5.1 円上の弦の軌跡でつくる包絡線

円上の弦を動かして弦の軌跡がつくる**包絡線**を十進 BASIC で描かせてどのようなことがわかるか考えてみます．まず円上の 2 点を P,Q とします．もし P と Q が同じ速度で同じ方向に動いたならば，その軌跡は円になることを想像することは簡単です．しかし，P と Q の速度が違ったり，また逆方向に動いたりしたら，簡単には想像できないでしょう．そこでプログラムを組んでみてその様子を見て考えます．以下は P と Q の速度を変えて同じ方向で動かしたときのプログラムです．

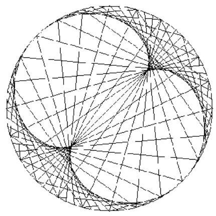



```
! 円上の弦の軌跡でつくる包絡線その１
option angle degrees
SET WINDOW -4,4,-4,4
!DRAW axes
LET  a=3                        !円の半径
LET  v=2                         !P の速さを 1 としたときの Q の速さ.
FOR t=0 TO 360                   !半径 a の円を描く
   PLOT LINES: a*cos(t),a*sin(t);
NEXT t
PLOT LINES
FOR t=0 TO 360 step 2.5      !P と Q の間の最初の間隔は 90 度とする.
   PLOT LINES:a*cos(t),a*sin(t);a*cos(90+v*t),a*sin(90+v*t)
   for i=1 to 10^5           !シミュレーションのための時間稼ぎ
   next i
NEXT t
END
```

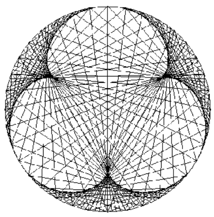
このプログラムを実行して v の値をいろいろ変えたときの様子は以下のようになります.



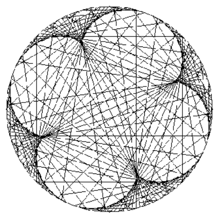
v=2 の場合



v=3 の場合



v=4 の場合

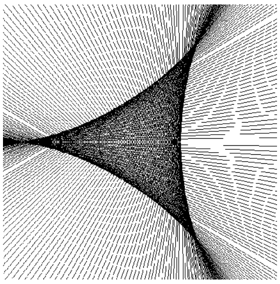


v=5 の場合

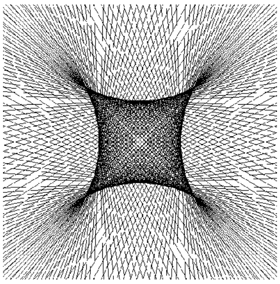
上の図をみていろいろなことを気づくはずです．すぐに気づくことは，v-1 個の尖った点があるということです．これにより $\frac{360}{v-1}$ 度回転しても図形は変化しないという対称性が見えてきます．さらに尖った点を通る直線に線対称な図形であることもわかります．この包絡線は，**エピサイクロイド**と呼ばれています．特に，v=2 のときは**カルジオイド**と呼ばれています．エピサイクロイドは固定した円周の外側に沿って別な円を動かして，動く円の 1 点 P の軌跡 (サイクロイド) として描くこともできます.

それでは今度は円周上 2 点 P, Q を互いに反対方向に動かしたとき P, Q を通る直線の軌跡の包絡線を考えます．プログラムは先ほどのプログラムに少し手を加えれば出来ます．プログラムとその結果をお見せしましょう.

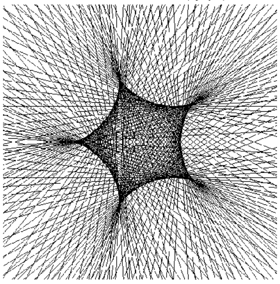
```
! 円上の弦の軌跡でつくる包絡線その２
option angle degrees
SET WINDOW -10,10,-10,10
!DRAW axes
LET  a=3
LET  v=2
!   SET AREA COLOR 9
!   PAINT 0,0
!  SET LINE COLOR 4
FOR t=0 TO 360
   PLOT LINES: a*cos(t),a*sin(t);
NEXT t
PLOT LINES
!   SET AREA COLOR 0
!   PAINT 0,0
FOR t=0 TO 360 step 2
   LET  x1=a*cos(t)       !点Pの座標
   LET  y1=a*sin(t)
   LET  x2=a*cos(-v*t)     !点Qの座標
   LET  y2=a*sin(-v*t)
   if x1-x2=0 then
      LET  m=0
   else
      LET  m=(y1-y2)/(x1-x2)  !直線PQの傾き
      LET  m1=y1-m*x1         !直線PQの切片
      !        SET LINE COLOR 2
      PLOT LINES:x1,y1;-10,m*(-10)+m1  !PQを通る直線を描く
      PLOT LINES:x1,y1;10,m*(10)+m1
   end if
   for i=1 to 10^5  !シミュレーションのため時間稼ぎ
   next i
NEXT t
END
```



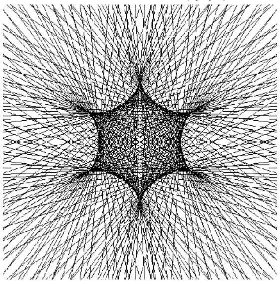
v=2 の場合



v=3 の場合



v=4 の場合



v=5 の場合

今度は，v+1 個の尖った点があることに気づきます．このことから，対称性もすぐにわかります．この包絡線は，**ハイポサイクロイド**と呼ばれています．ハイポサイクロイドは固定した円周の内側に沿って別な円を動かしたときに出来るサイクロイドです．

2.5.2　マンデルブロー集合の対称性

マンデルブロー集合は，**複素数平面**（**ガウス平面**）上の幾何学模様の１つです．ここで**複素数** z とは，x と y という実数を使って，$z = x+y\sqrt{-1}$ と書かれる数のことです．x を z の実数部分 (real part)，y を**虚数**部分 (imaginary part) といいます．そして，通常の x 軸を実数部分，y 軸を虚数部分として作られた平面を複素平面といいます．例えば，$z = 2 + 3\sqrt{-1}$ は，複素平面において，$(2, 3)$ という点を意味します．

さて，マンデルブロー集合は,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

という**漸化式**から得られます．ここで，c は複素定数です．マンデルブロー集合の書き方は，次のようになります.

① c を決めます．例えば，$c = 1 + 2\sqrt{-1}$ で考えます.

② $z_1 = 0$ とします.

③ $z_1 = z_1^2 + c = 0 + 1 + 2\sqrt{-1} = 1 + 2\sqrt{-1}$ となります.

④ $z_2 = z_1^2 + c = (1 + 2\sqrt{-1})^2 + 1 + 2\sqrt{-1} = -2 + 6\sqrt{-1}$ です.

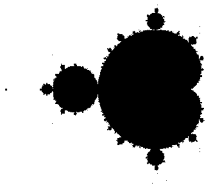
⑤ $z_3 = z_1^2 + c = (-2 + 6\sqrt{-1})^2 + 1 + 2\sqrt{-1} = -31 - 22\sqrt{-1}$ です.

このように先ず c を決めて，$z_1 = 0$ をスタートとして，z_1，$z_2, \cdots$ というように計算します．n が大きく二なるにつれ複素平面における z_n の値の点が原点より遠くなる（言い換えると発散する）ようなら，c の点はプロットしないようにします．逆に，z_n の値が発散しなければ，そのとき，c の点をプロットします。そしていろいろな c でそれを計算させ，完全にプロットしつくした図形がマンデルブロー集合なのです.

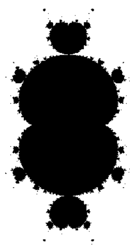
十進 BASIC では複素数の計算が可能なので，マンデルブロー集合のプログラムを簡単に書くことができます．プログラムの最初の行である，OPTION ARITHMETIC COMPLEX　が複素数で計算するという宣言文です．以下のプログラムでは，漸化式を，$z_{n+1} = z_n^v + c$ として，v の値を変えていろいろなタイプのマンデルブロー集合が描けるようにしてあります.

```
!マンデルブロー集合を描く
OPTION ARITHMETIC COMPLEX
SET WINDOW -2,1,-1.5,1.5
DRAW grid
SET POINT STYLE 1
LET  v=2
for i=-2 to 1 step 0.005
   for j=-1.5 to 1.5 step 0.005
```

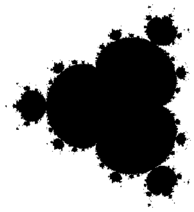
```
      LET  c=complex(i, j)
      LET  z=0
      for k=1 to 200
         LET  z1=z^v+c
         LET  z=z1
         LET  r=ABS(z)
         if r>ABS(c)+10 then
            SET POINT color 0
            PLOT POINTS: i ,j
            exit for
         end if
         SET POINT color 10
         PLOT POINTS: i , j
      next k
   next j
next i
END
```



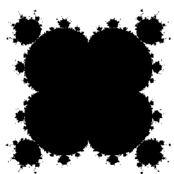
v=2 の場合 $(z_{n+1} = z_n^2 + c)$



v=3 の場合 $(z_{n+1} = z_n^3 + c)$



v=4 の場合 $(z_{n+1} = z_n^4 + c)$



v=5 の場合 $(z_{n+1} = z_n^5 + c)$

結果の図を見てすぐに気づくように，各マンデルブロー集合の中心付近

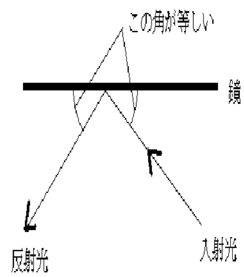
に，エピサイクロイドが見えます．不思議なことに,「円上の弦の軌跡でつくる包絡線」のところで示した図と上の図が v によって完全に対応しています．そこで各マンデルブロー集合は，エピサイクロイドと同じような対称性を持っているのではないかという予想がたちます．実はこの予想は正しくて，複素数の性質と数学的帰納法を使って証明することができます.

2.5.3 楕円鏡のレーザービームの反射光がつくる包絡線

次に楕円の内側に鏡を張ってレーザービームがどのように反射するかのシミュレーションを行ってみます.

光は平らな鏡に当たると，鏡に対して入射した角と同じ角度で反射します．楕円の内側に鏡を張ると鏡は曲がるので，この場合は光が入射した楕円上の点の接線に対して反射します.

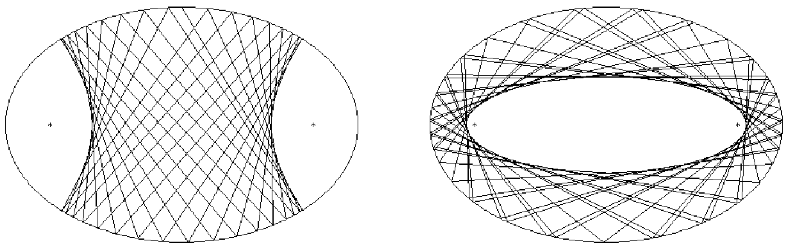
楕円には２つの**焦点**があります．片方の焦点から出た光は，楕円の鏡に反射してもう一方の焦点に達します．これはよく知られていることです．この後，光はさらに楕円の鏡に当たり別の２つの焦点を常に通っていきます．何回も反射を繰り返すうちに，光は楕円の長軸を行ったり来たりするようになることは，想像できるでしょう.



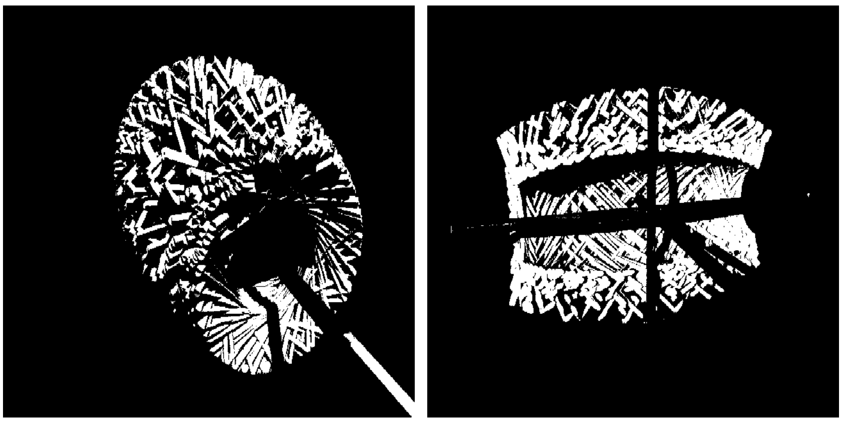
では，最初に光が焦点を通らなかったらどうなるでしょうか．これはなかなか想像し難いことです．そこで十進 BASIC でシミュレーションしてみます．とても美しい結果が得られます.

１．楕円の２つの焦点の間にレーザービームを発射した場合．レーザービームの包絡線として**双曲線**が現れます.

２．楕円の焦点より外にレーザービームを発射した場合．レーザービームの包絡線として楕円が現れます．



実は驚くべきことに，包絡線として現れた双曲線（または楕円）の焦点と楕円鏡の焦点は一致しています．このすばらしいシミュレーションは，津山工業高等専門学校情報科３年の田渕豊君に教えてもらいました．そして田渕君はその後，**回転楕円体**の内側に鏡を張った場合のレーザービームのシミュレーションを行いました．そこには予想通り**包絡面**として**回転二葉双曲面**や**回転楕円面**をみることができます．この研究はＣ言語により座標のデータを得て，それを Pov-Ray という３次元グラフィックソフトを用いて行いました．



田渕君の研究は最初にすばやく十進 BASIC でシミュレーションを行った

ことにより始まったのでした．すなわち十進 BASIC は研究の機会を与えてくれたのです．その興奮を少しでも味わってもらおうと思い，参考までに楕円鏡のレーザービーム反射のプログラムを以下に載せます．このプログラムは，初期位置，初期角度，反射回数を変えることにより，いろいろなシミュレーションが行えるようにしてあります．

```
! 楕円ビリヤード
option angle degrees
SET WINDOW -3.5,3.5,-3.5,3.5
!DRAW axes
LET  a=3         ! 長軸
LET  b=2         ! 短軸
LET  c0=60       ! 初期位置
LET  f0=200      ! 初期角度
LET  n=200       ! 反射回数

SET AREA COLOR 6      !黄色指定.
PAINT 0,0             !外側を黄色で塗りつぶす.

!  楕円を描く
SET AREA COLOR 10            !緑色指定.
FOR t=0 TO 360 STEP 0.5
   PLOT LINES: a*cos(t),b*sin(t);
NEXT t
PLOT LINES
PAINT 0,0                    !楕円内を緑色で塗りつぶす.

!  焦点の位置
LET  f=sqr(a^2-b^2)
SET POINT STYLE 3            !点の形をアスタリスクに指定.
SET POINT COLOR 4            !点の色を赤色に指定.
PLOT POINTS:-f,0;f,0

SET LINE COLOR 1             !線の色を黒に指定.
LET  x0=a*cos(c0)            !最初の位置をセットする.
LET  y0=b*sin(c0)
LET  f1=f0
```

```
!ビームの軌跡.
for i=1 to n                    !n 回の反射を For 文で行う.
   LET  z0=tan(f1)              !ビームの傾きを z0 とする.
   LET  m=y0-x0*z0              !ビームの切片を m とする.
   LET  alpha=1/a^2+z0^2/b^2!x に関する解と係数の関係を考える.
   LET  beta=(2*z0*m)/b^2   !x に関する解と係数の関係を考える.
   LET  x1=-beta/alpha-x0  !ビームの当たった x 座標を x1 とする.
   LET  y1=x1*z0+m         !ビームの当たった y 座標を y1 とする.
   if x1-x0>0 then
      LET  st=0.001          !ビームの動く速さを st で指定する.
   else
      LET  st=-0.001
   end if
   for t=x0 to x1 step st
      PLOT LINES: x0,y0;t,z0*t+m
   next t
             !(x1,y1) での接線のベクトル表示を (1,dy) とする.
   LET  dy=-(b^2/a^2)*(x1/y1)
   LET  v0=x0-x1          !ビームベクトルの x 成分を v0 とする.
   LET  v1=y0-y1          !ビームベクトルの y 成分を v1 とする.
   LET  vm=sqr(v0^2+v1^2)      !ビームの長さを vm とする.
   LET  dym=sqr(1+dy^2)        !接線ベクトルの長さを vm とする.
   LET  CO=(v0+v1*dy)/(vm*dym)
   LET  vdyc=ACOS(CO)     !接線とビームとのなす角を vdyc とする.
   LET  dyc=ATN(dy)       !接線と x 軸とのなす角を dyc とする.
   If y1>0 then
      LET  f1=180+vdyc+dyc
   else
      LET  f1=180-vdyc+dyc
   end if
   LET  x0=x1
   LET  y0=y1
next i
END
```

問題 2.17　楕円は固定した 2 点からの距離の和が等しい点の軌跡として実現した曲線でした．それでは固定した 3 点からの距離の和が等しい点の

軌跡はどんな図形か研究しなさい．

2.6　第 2 章の終わりに

これで十進 BASIC が十分使えるようになりました．次数の高い方程式も数値的に解くことが出来ます．定積分も計算できます．微分方程式もある程度解くことが出来ます．さらに，楕円鏡のレーザービームの反射光のようなシミュレーションにも十分挑戦できるようになりました．面白い現象は身近なところに転がっています．それが第 3 章以降の話でもあります．こんなことが実際にできたらどうなるか？とか，もしこういう条件だったらどうなるのか？などと，いろいろ考えてみてください．そして十進 BASIC を使っていろいろなシミュレーションを行い，まだだれも知らない結果を見つけ，みんなをあっと驚かせてみましょう．