

数学と化学の学際共同研究と福井プロジェクト VIII

有本 茂^{1*} 福田信幸^{2*} 廣木一^{3*} 森島 績^{4*} 村上達也^{5*} 成木勇夫^{6*}

斎藤恭司^{7*} 竹内 茂^{8*} Keith F. Taylor^{9*} 横谷正明^{10*} Peter Zizler^{11*}

Mathematics and Chemistry

Interdisciplinary Joint Research and the Fukui Project VIII

Shigeru ARIMOTO, Nobuyuki FUKUDA, Kazuaki HIROKI, Isao MORISHIMA, Tatsuya MURAKAMI
Isao NARUKI, Kyoji SAITO, Shigeru TAKEUCHI
Keith F. TAYLOR, Masaaki YOKOTANI and Peter ZIZLER

This is the eighth part of the series of articles that records and further develops essentials of the Mathematics and Chemistry Interdisciplinary Symposium 2013 Tsuyama, whose main themes were symmetry, periodicity, and repetition. The symposium was held on April 5th and 6th in Tsuyama city, Okayama, Japan, in conjunction with the Fukui Project and was devoted to the memory of the late Professor Kenichi Fukui (1981 Nobel Prize) who initiated the project. The present series also provides challenging cross-disciplinary problems which are directly related to the Fukui conjecture and to recent carbon nanotube research. Most of these problems are formulated using mathematical language of unique factorization domain (UFD) and related notions, which are not well known among chemists despite the importance of these notions in elucidating additivity and high-speed asymptotic phenomena in molecules having many repeating identical moieties.

Key Words: the Fukui conjecture, Memoir of Prof. K. Fukui, Unique factorization domain (UFD), Carbon nanotube, Polyacetylene

12. 数学と芸術、音楽

竹内 茂

はじめに：前回、数学と化学について短文を寄せたが、その続編として、本プロジェクト主催者の有本教授の勧めに従って、今回は数学と音楽について少し述

べてみたいと思う。趣旨としてはサーベイであるが、学際的分野を取り上げているために、関連する文献は膨大なものになる。また音楽史に関するものは、一次資料にアクセスすることが極めて困難であり、また本来引用すべき原典に近い初出資料と、そうでないものとの区別が容易でない、などの理由で、具体的に挙げることはしない。読者諸氏は適当なキーワードによって、ウェブサイトで容易に参考文献を検索できるであろう。今回の所論が人類の数千年の精神・文化史を背景にしたものであることは、論を待たない。前回の所論との関係について、ごく簡単に触れておくと、前回は現代数学の特徴を集合論に立脚する論理体系と捉えることによって、原子や分子をその物理的・化学的特性まで含めて（数学的に）理解することが可能になって来ていると（総論的なことを）述べた。紙数の関係でナノ化学を例示するだけで、具体的な応用例に触れる余裕がなかったが、自然界の物質的な存在形式を数学的に理解するとはどのようなことかを、おぼろげな

原稿受付 平成 26 年 8 月 28 日

1*, 3*, 10* 一般科目 2* 一般科目非常勤講師

4* 京都大学名誉教授

5* 京都大学 物質-細胞統合システム拠点 (iCeMS)

6* 立命館大学 理工学部・数学物理学系・数理科学科

7* 東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構

8* 岐阜大学 教育学部・数学科

9* Dept. of Math. and Stat., Dalhousie University, Canada

11* Dept. of Math., Phys., and Eng., Mount Royal University, Canada

がらでも感得していただければ、目的の一端は達したといえるのではないだろうか？それに対して今回の試みは、人間存在も自然の一部であるとの認識のもと、芸術的なもの、特に音楽的な美意識が科学の探求同様、人間の精神的活動の典型的なものであるにも関わらず、数学的な根拠を以って（ある程度）説明可能であることに踏み込む。実際、音楽理論、作曲理論の専攻論文の中には、（例えば）バッハやショパンの作品の特徴を、数学的手法で解明しようとしているものも近年見られるが、ここではそれらの論点について詳論する余裕はない。ごく簡潔に要点を述べれば、和声の構造やフレーズ・モチーフなどの音楽的特徴を、変換群を用いて対称性を理解する幾何学的、或いは位相的・計量的方法で捉えようとしていると言えるであろう。その過程で一つの曲が時系列的にはある空間の中の点列と解釈されるとき、数学的概念を導入するなどの方法がとられていたりする。それまでの古典的な音楽学では、作曲家の特徴を概念的、主観的に捉えていたのに対して、代数的、計量的にとらえることによって、客観性が増して、より科学的に音楽家或いは音楽そのものを把握、理解できるようになったと言えるであろう。今回の所論はそれらの潮流とも関係しているが、むしろ将来的にはパターン認識など認知科学との関連が強いように思う。

1. ギリシア数学と音楽、ピタゴラス学派

音楽の数論的特徴に、人類の歴史で最初に気づいたのは、ギリシアの数学者達であろう。特にピタゴラス学派は数論にのめり込んでいたために、整数、特に素数の性質に異常なまでに興味をもち、ついには神秘化するにいたる。それによって、自然界の諸現象を説明できると信じていたようだ。天体の運動、元素の性質、音楽も含まれる。七曜の起源と太陽系の惑星、衛星の関係や、プラトンの正多面体論など古くから、数の神秘性と結びついている。完全数が6、28しか知られていなかった頃は、安息日や月の回転周期と完全数の符合が、神学にまで影響を与えているようである。プラトン以来の古典的な学問体系として知られている自由七科が、三学四芸に分かれ、前者が trivium、後者が quadrivium と呼ばれて中世に至ったのは、前回も触れた通りである。数論、図形学、天文学、和声学は勿論後者に属し、その四学全体を指して数学 (mathesis) と呼んだのは、ピタゴラス学派であると哲学・数学史はいふ。音楽 (music) の用語をそこでは用いていないが、ここという和声（調和）は現代的な感覚からすれば、音楽を指していると理解するのが自然であろう。語源的には、ギリシア神話の女神ミューズから派生している music は、現代的な音楽より広い範囲の芸術を指していると理解すべきなのである。それに対して

四芸の中の和声は音楽の中でも、ハーモニーのように限定的な意味になる。しかし、本論ではピタゴラスに倣い、数学が音楽を包含する概念だと考えて、所論を進めていくことにする。

1-0. 数学的準備

次節以降で音階論を述べるために、「純音」の集合を1オクターブの周波数の範囲内の音で代表元をとり、乗法に関して可換群をなす正の有理数（または実数）集合 K にオクターブ違いを無視することによる同値関係を入れ、その関係で割った商群 $M(K)$ を（一次元）音階群 (musical scale group) と呼ぶ。個々の元（同値類）をここでは単に（純）音と呼ぶことにする。2項演算として数の乗法演算 $\times$ が、そのまま商群に引き継がれて（*と表記する）、2音の乗法が定義可能である。例えば $1 \times 3/2 = 3/2$, $3/2 \times 3/2 = 9/8$ 等である。但し表記を簡略化するために、同値類の記号 $[]$ を省略して $[1]$ のことを単に 1 と表記しても、誤解の恐れはないであろう。また商群である以上、単位元や逆元が存在と一意性、また演算が交換、結合等の法則を満たしていることは、代数系の一般論から容易に分かる。それらの演算や、その諸結果の音楽的意味にも触れるべきであろうが、ここでは単に数学的演算とその記号化の導入だけを行う。因みに音の乗法は定義されても、加法は定義されない。後節で、ピタゴラス音律、純正律、平均律それぞれの特性（長所、短所）を論ずる際に、音の高さが周波数比で比べられるので、本来は乗法を基礎にするべきであろうが、暗算で計算する際には加法の方が便利なので、指数写像、またはその逆写像である対数写像を用いて、 $M(K)$ を加法群 $M_{+}(K)$ と同一視することもある。次節で述べるように、一般に演奏される音楽においては、純音を聴く機会は殆ど無いので、高次元化された音階群を導入する必要がある。

注）本来 $M(K)$ やその上の二項演算、指数写像等の数学的道具を用いて、音階・音律論や和声について本小論で述べる予定であったが、紙数の関係で、ここでは単なる導入のみに留め、それらの理論の深化と音楽理論、作曲・演奏・鑑賞等への応用はまた別の機会にゆずる。

1-1. 楽音（旋律）と和音

前節で述べた（一次元）音階群に値をとる時間変数の関数としての「純音関数」とは別に、ここでは、物理的に空気の振動として知覚される音楽的な「音」を、区別して楽音と呼ぶこととする。今後、「音」といえば、所謂楽音のみを考えるが、現代では楽音と非楽音を区別するのは、無意味と考える専門家集団も存在する。その四要素として、高さ (pitch)、音色 (tone)、大きさ（強さ intensity）、持続時間（長さ）がある。物理的

には二階の定数係数線形偏微分方程式の境界値問題の解として、周期関数であることから、これらのうち長さを除く三要素が各々、周波数（振動数）、波形（スペクトル表現、フーリエ展開）、振幅を表すパラメーターとして、登場する。但し、大きさと強さは物理的な意味、定式化は異なるが、ここでは区別せず、長さ（持続時間）も無視する。またそこに現れる方程式の（周期性によって）、解が周期性をもつことや、（線形性によって）解が加法性、線形性をもつことも容易に分かる。

（１）楽音の定義とその属性を述べる。一般的な表現をすれば、声楽、器楽等によって演奏される音曲の中に現れる音を指しているが、旋律まで含めて、数学的に表現するとすれば、上述の三要素が時間の関数として明確で、一定または、なだらか(moderate)に変化していくもののうち、（主観的表現であるが）聴覚に好意的に作用するものをさすと考えてよいであろう。但し、ここでなだらかな変化とは、特に高さについては、連続とか微分可能という意味ではない。次節において問題にするように、特に楽器音については、物理的・技術的な理由によって、一般に高さは不連続に変化するが、音階の制約を受けている。単一の音源から発している音を単音と呼ぶことにすると、対立する概念として、複（合）音や、また純音という前述の概念もある。単一の音源とは、単一楽器または、一人の音声がある特定の（物理的、生理的）状態で発する音というべきであり、その状態が規定しているのは、方程式、境界条件等を決定するいくつかのパラメーターである。しかし楽器にせよ、音声にせよ、純音の生成のように条件は単純でない。そのため単音であっても、波形は複雑になっている。人間の音声でいえば、同じ人間が高さや大きさを変えて発声できるが、（声紋分析が示すように）音色まで変えるのは一般には容易でない。楽器で言えば、特定のキーを叩いた時のピアノ音である。同一ピアノでは音色まで変わることは余りないが、バイオリンでは同じ楽器であっても、演奏次第で音色までが変化する。実際後述のように、波形を調べればバイオリンの波形は非常に複雑であり、多くの倍音が含まれているので、奏法によって、（バイオリン特有の波形的特長は保ちつつ）倍音の構成比もかなり変化する。他方複（合）音とは、複数の音源（楽器等）が同時に発する音の和である。これは、ユニゾンのこともあるが、一般には異なる高さ、音色の音の和であり、以下の節で述べるように、和音と不協和音とに分ける区別が古くから続いている。三要素を表すパラメータが、数学的にどう表現されているかは、その音を表す解析的表現であるフーリエ級数を調べる必要がある。視覚的には今日ではチューナーによる周波数の検出や、オシロスコープによる音の波形分析、スペクトルスコ

ープによる音波の成分のスペクトル分解などを容易に見ることができる。物理方程式の（連続な）解である周期関数によって表される音の、任意の周期は最小周期の整数倍になっている。誤用を避けるため、今後は音の周期とは最小周期のみを指すことにして、他は必要があれば、「広義の周期」と呼ぶことにする。周期の逆数が周波数（振動数）である。基音とはその周波数の音をさすが、多くの場合その整数倍の周期をもつ音（倍音）が数多く含まれている。その構成比を調べるには、発生音のスペクトル分解を見る必要があるが、そのことは、解析的にはフーリエ係数を比較しなければならない。音楽として鑑賞する上では、直接耳で聴いてその音色で違いを判断するのが一番早道であるが、楽器の性能・価値を科学的に正確に裏付けるには、機器によって数値的または視覚的に、スペクトル分解を調べる方法がある。実際ボーカル、バイオリン、ピアノ、フルートで音色の違いは、波形の複雑さの違いとして、オシロスコープで見える方がスペクトルスコープで確かめるより視覚的には理解しやすい。複雑さの程度は順に下がっていく。音叉の音の表す波形は、ほぼ正確な正弦曲線になり、最も単純な音であり、倍音は検出不可能という意味で純音である。実際に耳で聴く際は、（３次元）空間を縦波（粗密波）として音源から伝播して、鼓膜に到達するわけだが、オシロスコープで見ているのは、横軸に時間を取り、縦軸に空間での波動の変位を１次元化してみている。音波が重力の影響を受けず、音源を球の中心として、球面の各法線に沿って等方的(axially symmetric)に進むことは、音の波動方程式から導かれることだが、この等方性によって、一次元化してみることが合理化される。一定時間持続する楽音が、楽曲(tune)とし認識されるには、（一定の条件を満たしながら）時間的に変化する必要がある。複数音が同時、または一定の時間的なズレのもとに生成する場合は、更に複雑な条件が必要になる。ここでは先ず前者（２）の場合を考える。後者は（３）で論ずる。

（２）単一楽音が変化して所謂「旋律」を構成する場合、個々の音の三要素が時間とともにどう変化するかが、問題となる。作曲・演奏・鑑賞する場合は、この三要素全てが対象であるが、ここでは高さだけを論ずる。旋律として心地よいのは、高さの比が簡単な整数比になっている場合であることを発見したのが、ピタゴラス学派の貢献であろう。数学的にこのことを明瞭に述べたために、後世ピタゴラス音階と呼ばれることになるが、その基本は、５度と呼ばれるCとGの間の音程である。西洋音階だけでなく、世界的に見ても、同様な音階は広く分布している。後述する平均律音階では少しずれがあるが、ピタゴラス音律または（その修正版である）純正律では正確に 2 : 3 の周波数比に

なっている。モノフォニー的旋律とは、単音が一定の長さ（拍数）とともに、変化していくことであり、楽曲としては一定の強弱のリズムを伴っていることが多い。

（3）和音：複数音が時間的に（旋律として）、または空間的に変化していくとき、楽音としては、協和音と不協和音の二つに分類がされて来た。古代から経験的に簡単な整数比で周波数比が表されるような（純正律的）音程を協和音と呼んでいる。典型例は所謂C E Gで表される4:5:6、またはG C Eで表される3:4:5があげられる。正確に平均律で調律された（とすれば）ピアノでは基準音が異なるだけで、図形的にこれらと相似な協和音は他にもあるが、絶対音感の個人差のもと、一般には相似的な和音が同一に感じられる訳ではない。実際にピアノでも（個人差はあるだろうが）別種の和音として聞き分けられる。その原因として、一つは基準音の違い、更には、調律そのものが妥協の産物であって、正確な平均律から意図的な補正がなされていることもあろう。ましてや、純正律で調律された弦楽器等で異なる調性の和音を弾けば、中世以来多くの作曲家、楽人が悩んだように、全音半音の不統一のために、同じ度数であっても、至る所で「不協和音」が生じた。（不）協和音の概念が、空間や時間を超越した普遍的なものかどうかは、歴史的に見る限り未解明である。次節でも関連した話題について述べるが、これらの議論には具体的な物理的・数学的証明と、（耳、脳による）音声認識機能特性の検証が必要であるので、別の機会に述べたい。

2. 純正律と平均律

2-1. 純正律

古代のピタゴラス音律とその修正版である純正律が、近世になって平均律として生まれ変わり、バッハなどに代表される近代音楽として発展していく中で、古典的な純正律とどう調和し、また、矛盾を今日に至るまで引きずってきたか？また今後どうなっていくのか？古来、各音律の長所・短所について、不協和音の程度が、具体的な数値をセント単位で比較して、論じられてきているが、最近ではウェブ上で実演までして、各音律ごとの詳細な比較を行っているの、ここでは具体的な数値やその評価には触れない。前節で述べたように、ピタゴラス学（楽）派は彼らの音律・音程に則り、5度の音程によって次々と新しい音を作り出して行った。Cを1とすれば $G=3/2$ 、次に $(3/2) \cdot (3/2)=9/8=D$ となり、その次は $(9/8) \cdot (3/2)=27/16=A$ 、その次は $(27/16) \cdot (3/2)=81/64=E$ などと、一応全て対応する音を近似的に、現代の平均律で表すこと

は可能ではある。しかし、逆にこの方法で現在の平均律で可能な全ての音を（近似的に）表すことは可能であろうか？これは正に初等数論の問題であるが、数の神秘性に魅せられた彼らピタゴラス学派の人々は、これ以外の音の変化律を認めようとはしなかった。無理数は数でないとする彼らにとってはそうするより他に仕方がなかったのであろう。ただこのことから、当時実際に人々が愛好した歌舞音曲が、全てピタゴラス音階によると考えるのは早計である。弦楽器、管楽器が古代から洋の東西を問わず、最初に広く使われた楽器であると考えれば、音程を1:2から始まって、2:3以外の簡単な整数比、3:4や4:5等で生み出す、純正律的な原理に気づき、その利点に基づく音階が、早くから流布していたと考える方が自然であろう。純正律では他にもいくつか協和音程が得られるが、これらも全て、正確に簡単な整数比8:9や9:10などで表され、全音5つと半音2つで構成される現行（に近い）1オクターブ音程が得られた。

2-2. 平均律

一方1オクターブを（周波数比で）12等分した平均律では、一般にどの三つの異なる音をとっても、それらの周波数比は、2の12乗根の冪で表される無理数比であり、ピタゴラス或いは純正律の立場からすれば、協和音ではなくなる。しかし、その音程は周波数比でみたとき、前節でも述べたように純正律との違いは微細である。ただこの違いを過大視するか、過小視するか結論は出ていない。簡単な整数比でないときに、複数音の（合成音）和が、聴くに耐えないような音かどうか、音楽的に（或いは数学的に）十分解明されたとは言えないのではないだろうか？実際現在でもどちらが優れているか論争は続いている。平均律の「発明」以来4世紀が経過している現代、今一度考えて見る価値はある。現状は種々の理由から、平均律が楽器の調律、演奏、（作曲）、音楽教育の場で主流だと思われるが、一方で弦楽器の調弦では、技術的に純正律的調弦が今も大きな役割を果たしている。歴史的には皮肉なことだが、16世紀頃から平均律は、弦楽器演奏家の間で試みられていたようである。それほど純正律の不協和音に悩まされていたわけだが、三角関数の加法定理などまだ広く普及していない中で、正弦関数、余弦関数の合成関数がどうなるか公式を知らない音楽家たちが、うなりを基にして正確に平均律に調弦することは、試行錯誤の大変な作業であったろうと思われ。数学的な理論として、単に音階・音律としてだけでなく、和音、メロディ、音色についても、三角関数の合成、重ね合わせ、フーリエ級数展開などの応用として論じる価値はあるが、学際的領域のため、前述のように、過去数学者が本格的に取り組んで来た形跡は

ない。音楽理論家も、数学は勿論、心理学や認知科学の立場からの解明や実験による検証が必要なため、音階・音律論の将来について、十分踏み込めていないのが実情である。

2-3. 楽譜

音律理論を正確かつ厳密に展開する上で、楽譜の存在は極めて重要な役割を果たしている。ピタゴラスの頃は、音の波動としての科学は未成立の中、振動数の概念はなくとも、耳で聴いてその高さが、弦楽器であれば、弦の張りの強度や、弦の長さに依存していることは当然理解されていたであろう。また同じ理由で全音、半音の区別も可能だし、それを（弦の長さの）比で比較する数学的方法も明らかにされていたと考えられる。職業的作曲家、演奏家が存在する以前の、中世前半においては、現代のような楽譜に楽曲を記述した記録が残っていないようである。しかし10～11世紀頃には、現代に近い記譜法が使われ始めたようで、作曲や演奏が専門家集団によって行われ始めた証拠と考えられる。それによって、音階を正確に表すことが可能となり、どこに半音があるか、またその必然性などが考えられ、音律や調性を本格的に問題にする時代がやってきた。歴史的には、教会音楽の束縛から、もっと自由な音楽へと発展していくルネッサンスの機運が、純正律から平均律へと改革する運動を後押ししたとみることができる。

3. シェーンベルク12音階学派と 無調派、現代音楽

18世紀以降、平均律にもとづくクラシック音楽の発展が、2世紀にわたって続く中で、20世紀以降所謂現代音楽の潮流が始まる。それは12音階から始まって、無調音階へと過激な歩みを進めているが、大衆的な支持を得られているのであろうか？またクラシックと非クラシックとの区別は現在・将来も存在し続けるのであろうか？歴史的に見て、平均律の目的（のひとつ）が転調を容易にすることであったというのは、多くの専門家が同意するところであろう。実際バッハの有名な平均律クラヴィア曲集第一巻は、転調を自在にまた、効果的に用いてフーガを作曲した。他にも純正律やその修正版である中全音律がもつ、不協和音の解消という目的もあった。各音律毎に異なる細かい音程の差が、どのように解消されるかなどの一覧表は、多くの専門書に詳しく掲載されているので、ここでは逐一取り上げることはしない。またそれは簡単な数学的原理に基づいてすぐ計算できることでもある。バロック、古典派からロマン派にかけて、転調の技術は高度化し、それを支えたのが12平均律であった。

作曲家はひどい不協和音に悩まされることなく、必要に応じていつでも転調し、また元に復調した。しかしルネサンス以来の調性感は、平均律が普遍化する18世紀以後も続いていた。実際五線譜でフラットやシャープがいくつもつけられ、作曲家だけでなく、評論家たちも曲の紹介をするとき必ず変ホ長調の曲であると述べたりするのは、正にその証拠に違いない。中世以来和声学者、音楽理論家は個々の協和音だけでなく、一連の順序付けられた集合としての和音の列を問題にして、調性を特徴付けてきた。いわば音楽・楽曲の組織化、構造化である。だがそれを数学的構造と見て、近現代の数学者が研究した例は寡聞にして知らない。音律そのものは、調性とは独立に、古くはピタゴラス、近世になってからは、数論でよく知られているメルセンヌなども取り組んでいる。しかし、調性そのものまでは、踏み込んでいないし、また調性自体、近世以降の問題でもあろう。調性が作曲上の制約であったとすれば、それらを打ち破ってもっと自由でありたいと思うのは当然の流れかも知れない。時代とともに、音律、協和音は変化し、皮肉なことに、当初転調を目的としていたはずの平均律が、調整を不要・無用なものとして、作曲家が無視・軽視するのを助けている。その先鞭をつけたシェーンベルクとその後継者たちが、今後現代・将来の音楽に大きな転換点をもたらすのか、注視していきたいと思う。

4. 音楽の将来、民族性と普遍性

今まで主として西洋音楽の立場から考察して来たが、歴史的、地理的に考えると、時代毎また民族毎に、それぞれ個性的な音楽が存在する。音階も12音階や7音階だけでなく、5音階や、更にはオクターブの概念すらない例もある。半音全音の区別だけでなく、三分音、四分音などを取り入れた音楽が、西欧においても民族音楽として存在する。西欧の（理論化された）音楽が、科学技術同様、現代世界に支配的な影響を及ぼしていることは事実であるが、それが普遍的性格をもつ故であることも、また認めざるを得ない。実際、平均律の考え方は音楽史の研究によれば、古代中国でも試みられていたようである。ただ西欧のように、ピアノなど鍵盤楽器の進歩・発達という好機に巡り合せなかったために、現実には普及するにはいたらなかったのであろう。またそれは、数学的・科学的思考の産物でもあり、ギリシア以来の哲学的・論理的思考の伝統が背景にある。

謝 辞

原稿準備の最終段階で目を通していただき、貴重なご意見・ご指摘を頂いた有本教授と山梨大学の鈴木俊

夫名誉教授に、この場でお礼申し上げます。(2014. 8. 24)

13. Challenging Cross-disciplinary Problems Related to the Fukui Conjecture and to the Chemistry of Carbon Nanotubes III

Shigeru Arimoto, Nobuyuki Fukuda, Masaaki Yokotani and
Peter Zizler

In ref. 1), the following Challenging Problem F was given. This problem is related to absolutely continuous functions (generally highly irregular) and to their Fourier expansions.

Let us recall that Challenging Problem F is closely related to the Asymptotic Linearity Theorems (ALTs) in the repeat space theory (RST). The reader is referred to 2)-7) for the ALTs and for the definitions of the original alpha space $X_\alpha(q)$ and of other symbols given in the following conjecture.

Conjecture OALT-1. (OALT- $X_\alpha(q)$ AC(I) version). Let $q \in \mathbb{Z}^+$, let $s \in \mathbb{Z}$, let $\{A_N\} \in X_\alpha(q)$, and let I be a closed interval compatible with $\{A_N\}$. Then, for any $\varphi \in AC(I)$, there exists an $\alpha_s(\varphi) \in \mathbb{R}$ such that

$$\text{Tr}[(P_N^s \otimes I_q)(\varphi(A_N))] = \alpha_s(\varphi)N + o(1) \quad (1)$$

as $N \rightarrow \infty$. Moreover the real number $\alpha_s(\varphi)$ is represented by the integral given by

$$\alpha_s(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(is\theta) \text{Tr} \varphi(F(\theta)) d\theta. \quad (2)$$

Challenging Problem F. Prove or disprove Conjecture OALT-1.

Let $P(I)$ denote the subspace of $AC(I)$ of all the polynomial functions with real coefficients. The Conjecture OALT-1 with $AC(I)$ replaced with $P(I)$ is called Off-diagonal ALT, OALT- $X_\alpha(q)$, $P(I)$ version. The reader is invited to prove or disprove this simpler version first. The reader is also invited to the following

Challenging Problem G. Prove or disprove the following Conjecture OALPHA-1.

Conjecture OALPHA-1. (OALPHA- $X_\alpha(q)$ AC(I) version). Let $q \in \mathbb{Z}^+$, let $s \in \mathbb{Z}$, let $\{A_N\} \in X_\alpha(q)$, and let I be a closed interval compatible with $\{A_N\}$. Then, for any $\varphi \in AC(I)$, there exists an $\alpha_s(\varphi) \in \mathbb{R}$ such that

$$\text{Tr}[(P_N^s \otimes I_q)(\varphi(A_N))] / N \rightarrow \alpha_s(\varphi) \quad (3)$$

as $N \rightarrow \infty$. Moreover the real number $\alpha_s(\varphi)$ is represented by the integral given by

$$\alpha_s(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(is\theta) \text{Tr} \varphi(F(\theta)) d\theta. \quad (4)$$

14. Concluding Remarks

Shigeru Arimoto

On behalf of the co-authors and myself, I would like to express sincere gratitude to all who helped in enhancing the Fukui Project. Special thanks are due to Professor M. Spivakovsky, Professor M. Amini, Professor J. LeBlanc, Professor T. Yamabe, who have been recent collaborators in the program related to the Fukui conjecture, carbon nanotube, and visual Matrix Art. In the present series of papers, as a complementary aspect opposed to the visual Matrix Art, we are currently targeting heuristic and innovative sonification (audiolization) of various scientific data using Fourier analysis with the help of computer scientists and musicians.

However, by the 100th anniversary of the birth of Professor Kenichi Fukui, which is 2018, heuristic visualization and sonification programs in the Fukui Project currently separated as modular units shall be united.

Acknowledgements

On behalf of the authors of this series of papers, the first author (S.A.) would like to express sincere gratitude to Dr. T. Noritsugu, President of Tsuyama National College of Technology, and his predecessor Dr. H. Inaba, now President of Shujitsu University, for their help in holding our Symposium 2013 Tsuyama and promoting our cross-disciplinary and international collaborations.

References

- 1) S. Arimoto, M. Amini, M. Spivakovsky, J. LeBlanc, K.F. Taylor, T. Yamabe, Repeat space theory applied to carbon nanotubes and Matrix Art, Bulletin of Tsuyama National College of Technology, **54** (2012) 31-38.
- 2) S. Arimoto and M. Spivakovsky, The Asymptotic Linearity Theorem for the Study of Additivity Problems of the Zero-point Vibrational Energy of Hydrocarbons and the Total Pi-electron Energy of Alternant Hydrocarbons, J. Math. Chem. **13** (1993) 217-247.
- 3) S. Arimoto and K.F. Taylor, Aspects of Form and General Topology: Alpha Space Asymptotic Linearity Theorem and the Spectral Symmetry of Alternants, J. Math. Chem. **13** (1993) 249-264.

- 4) S. Arimoto and K.F. Taylor, Practical Version of the Asymptotic Linearity Theorem with Applications to the Additivity Problems of Thermodynamic Quantities, *J. Math. Chem.* **13** (1993) 265-275.
- 5) S. Arimoto, New proof of the Fukui conjecture by the Functional Asymptotic Linearity Theorem, *J. Math. Chem.* **34** (2003) 259.
- 6) S. Arimoto, The Functional Delta Existence Theorem and the reduction of a proof of the Fukui conjecture to that of the Special Functional Asymptotic Linearity Theorem, *J. Math. Chem.* **34** (2003) 287-296.
- 7) S. Arimoto, The Second Generation Fukui Project and a New Application of the Asymptotic Linearity Theorem, *Bulletin of Tsuyama National College of Technology*, **52** (2010) 49.