

数学と化学の学際共同研究と福井プロジェクト VII

有本 茂^{1*} 福田信幸^{2*} 廣木一^{3*} 森島 績^{4*} 村上達也^{5*} 成木勇夫^{6*}

斎藤恭司^{7*} 竹内 茂^{8*} Keith F. Taylor^{9*} 横谷正明^{10*} Peter Zizler^{11*}

Mathematics and Chemistry

Interdisciplinary Joint Research and the Fukui Project VII

Shigeru ARIMOTO, Nobuyuki FUKUDA, Kazuaki HIROKI, Isao MORISHIMA, Tatsuya MURAKAMI
Isao NARUKI, Kyoji SAITO, Shigeru TAKEUCHI
Keith F. TAYLOR, Masaaki YOKOTANI and Peter ZIZLER

This is the seventh part of the series of articles that records and further develops essentials of the Mathematics and Chemistry Interdisciplinary Symposium 2013 Tsuyama, whose main themes were symmetry, periodicity, and repetition. The symposium was held on April 5th and 6th in Tsuyama city, Okayama, Japan, in conjunction with the Fukui Project and was devoted to the memory of the late Professor Kenichi Fukui (1981 Nobel Prize) who initiated the project. The present series also provides challenging cross-disciplinary problems which are directly related to the Fukui conjecture and to recent carbon nanotube research. Most of these problems are formulated using mathematical language of unique factorization domain (UFD) and related notions, which are not well known among chemists despite the importance of these notions in elucidating additivity and high-speed asymptotic phenomena in molecules having many repeating identical moieties.

Key Words: the Fukui conjecture, Memoir of Prof. K. Fukui, Unique factorization domain (UFD), Carbon nanotube, Polyacetylene

9. 複素多様体の局所環の UFD 性

成木勇夫

複素多様体 Ω の各点 $p \in \Omega$ に対して, p における局所環 $\mathcal{O}_p$ は, p を定義域の中に含む正則関数の間の,

次のような同値関係 $\sim_p$ の同値類全体のなす環として定義される:

$f \sim_p g \Leftrightarrow$ (その上で f と g が一致する p の近傍が存在する).

関数 f の属する同値類は f の (p における) 芽 (germ) と呼ばれる. 関数の間の算法によって $\mathcal{O}_p$ は自然な環構造を持ち, 写像 $f \mapsto f(p)$ は $\mathcal{O}_p$ から体 $\mathbb{C}$ の上への準同型を導き, この準同型の核 m_p は $\mathcal{O}_p$ の最大イデアルとなる. 実際, 補集合 $U_p := \mathcal{O}_p - m_p$ は $\mathcal{O}_p$ の単元 (units) 全体だからである.

この局所環の代数的性質については次の定理が知ら

原稿受付 平成 26 年 8 月 28 日

1*, 3*, 10* 一般科目 2* 一般科目非常勤講師

4* 京都大学名誉教授

5* 京都大学 物質-細胞統合システム拠点 (iCeMS)

6* 立命館大学 理工学部・数学物理学系・数理科学科

7* 東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構

8* 岐阜大学 教育学部・数学科

9* Dept. of Math. and Stat., Dalhousie University, Canada

11* Dept. of Math., Phys., and Eng., Mount Royal University, Canada

れている:

$$C_r \times \{z' \mid |z'| \leq \rho\}$$

定理 I: 「局所環 $\mathcal{O}_p$ は UFD (一意分解整域) である。」

この定理は通常 UFD についての次の基本的定理を応用して証明される:

定理 A: 「整域 R が UFD であるならば, R を係数環とする一変数多項式環 $R[X]$ はまた UFD となる。」

(この定理の証明などについては前年度の論説¹⁾ 参照.)

定理 I の証明に定理 A を応用できる状況に持ち込む道具として有名なワイヤストラスの予備定理 (Weierstras Preparation Theorem) がある. この定理を直接述べると長くなるので次のような準備的な考察を行う:

まず $f = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ は原点 $p = (0, 0, \dots, 0)$ の近傍で正則な関数であり

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

ではあるが, 一変数関数

$$\varphi(z_1) := f(z_1, 0, \dots, 0)$$

は $z_1 = 0$ の近傍で恒等的に 0 ではないと仮定する. このとき, 一変数正則関数に対する零点孤立の定理により, 正数 r を閉円板 $D_r := \{z_1 \mid |z_1| \leq r\}$ は φ の定義域に含まれ, また, D_r の上の $\varphi(z_1)$ の零点は $z_1 = 0$ のみであるように取ることが出来る. 従って円周 $C_r := \{z_1 \mid |z_1| = r\}$ 上で絶対値 $|\phi(z_1)| = |f(z_1, 0, \dots, 0)|$ の最小値 $a (> 0)$ が存在し, さらに $|f(z_1, z_2, \dots, z_n)|$ の連続性により, 正定数 ρ を十分小さく選べば, 直積集合

$$D_r \times \{z' = (z_2, \dots, z_n) \mid |z'| \leq \rho\}$$

$$\left(\text{但し, } |z'| = \sqrt{\sum_{j=2}^n |z_j|^2} \right)$$

が f の定義域に含まれ, さらに, その部分集合

上での $|f(z_1, z_2, \dots, z_n)|$ の値が常に $a/2$ を下回ることがないように出来る.

このような状況の下で, 変数 z_1 を特別視して, これを表す文字を w に換え, 残りの変数の組 $z' = (z_2, \dots, z_n)$ はパラメーターと見る. すなわち関数 $f(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(z, z')$ を, パラメーター z' に (正則に) 依存する, 変数 w の一変数正則関数 $f(w, z')$ であると考えるのである.

ここでさらに $f(w, z')$ の定義域が, $\hat{r} (> r)$ を十分 r に近く取って, 直積開集合

$$\hat{U} := \{(w, z') \mid |w| < \hat{r}, |z'| < \rho\}$$

を含んでいるようにすることが出来るので, この $\hat{U}$ を f の新しい定義域であると考えことにしよう.

この新しい仮定の下で, 変数 w が円周

$$C_r = \{w \mid |w| = r\}$$

に留る限り, $|z'| < \rho$ を満たすすべてのパラメーター z' に対して不等式

$$|f(w, z')| \geq \frac{a}{2} (> 0)$$

が満たされる. 従って, 線積分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f_w(w, z')}{f(w, z')} dw \quad (\text{但し, } f_w = \frac{\partial f}{\partial w})$$

が定義され, これはパラメーター z' に依存する正則関数 $f(w, z')$ の円板 D_r 内にある零点の個数を表す. この積分値はパラメーター z' に正則に依存するが, 値は整数なので, 実整数となる. 結局, $\phi(w) = f(w, 0)$ の零点 $w = 0$ の重複度 m と一致する.

では, z' に依存する正則関数 $f(w, z')$ の円板 D_r 内の重複度も込めて数え上げた零点集合の基本対称式も適当な線積分を用いて表現できるであろうか?

答は肯定的である. 実際, 零点の j 乗和は線積分

$$T_j := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} w^j \frac{f_w(w, z')}{f(w, z')} dw$$

によって計算され、また零点のベキ和

$$T_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

と零点の基本対称式

$$S_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

の間には、一般的な有理係数変換公式が存在する。例えば

$$\begin{cases} T_1 = S_1, & T_2 = S_1^2 - 2S_2, \\ T_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3, \\ T_4 = S_1^4 - 4S_1^2S_2 + 2S_2^2 + 4S_1S_3 - 4S_4, \text{ etc.} \end{cases}$$

また反対に

$$\begin{cases} S_1 = T_1, & S_2 = \frac{1}{2}(T_1^2 - T_2), \\ S_3 = \frac{1}{6}(T_1^3 - 3T_1T_2 + 2T_3), \\ S_4 = \frac{1}{24}(T_1^4 - 6T_1^2T_2 + 3T_2^2 + 8T_1T_3 - 6T_4), \text{ etc.} \end{cases}$$

などとなる。(このような変換公式の一般化にはこれ以上は深入りしない)

パラメーター z' の正則関数としての基本対称式 S_j

を $S_j(z')$ で表し

$$P(w, z') := w^m - S_1(z')w^{m-1} + \dots + (-1)^m S_m(z')$$

と置く。作り方から $P(w, z')$ は直積開集合

$$U := \{(w, z') \mid |w| < r, |z'| < \rho\}$$

内で $f(w, z')$ と (重複度を込めて) 同じ零点集合を持つ。

すなわち商

$$u(w, z') := f(w, z') / P(w, z')$$

は零点を持たない U 上の正則関数となる。

ここで、今まさに証明されたことをまとめ直して見よう：

$C^n : (w, z_2, \dots, z_n)$ の原点 $(0, 0, \dots, 0)$ の近傍 V で定義された正則関数

$$f(w, z_2, \dots, z_n)$$

が (他と区別されている) 座標 w に関して、次の条件

「 $\varphi(w) := f(w, 0, \dots, 0)$ は $w = 0$ の近傍で恒等的には 0 ではない」

が満たされているとき、関数 f は w に関して正常であると言う。

また w 以外の座標をまとめて

$$z' = (z_2, \dots, z_n)$$

と置き

$$(w, z_2, \dots, z_n) = (w, z')$$

$$f(w, z_2, \dots, z_n) = f(w, z')$$

などと略記する。

定理 W: 「上の用語、記号のもとで、正則関数 $f(w, z')$

は w に関して正常であると仮定する。また、 $w = 0$ は $\varphi(w)$ の零点であると仮定し、この零点の重複度を m とする。このとき f の定義域 V の中に直積型近傍

$$U = \{(w, z') \mid |w| < r, |z'| < \rho\}$$

$$(r > 0, \rho > 0, |z'| \leq \sqrt{\sum_{j=2}^n |z_j|^2})$$

が存在して、関数 f は U 上で

$$f(w, z') = u(w, z')P(w, z') \quad ((w, z') \in U)$$

と分解する。ここで $u(w, z')$ は値 0 を取らない関数、

$P(w, z')$ は m 次のワイヤストラス多項式である。すなわち

$$P(w, z') = w^m + \sum_{j=1}^m c_j(z')w^{m-j}$$

と書ける。但し、 $c_j(z')$ ($1 \leq j \leq m$) は $\{z' \mid |z'| < \rho\}$

上の正則関数であって、原点 $z' = 0$ で値 0 を取る。

もちろん、ここで P の係数は

$$c_j(z) = (-1)^j S_j(z)$$

と置いて得られるものである。」

さて、いよいよ定理 W が、どのようにして定理 I の証明に定理 A を応用することを可能にするか、について解説して見よう。

まず、関数の正常性が局所的なものであることに注意しよう。一点 $p \in \Omega$ での局所座標系において一つの変数を他の変数から区別し、この区別のもとで正則関

数の正常性が定義されるが、この概念は同値関係 $\sim_p$ を通行する。すなわち同値な二つのものの一方が正常であれば他方も正常である。従って局所環 $\mathcal{O}_p$ の元の正常であるかないかが既に自然に定義されている。

上のように、区別を付けられた局所座標系を記号

$$(w, z') \quad (\text{但し, } z' = (z_2, \dots, z_n))$$

で表すとき、この区別にもとづくワイヤストラス多項式概念も次のように局所化される：

まず $\mathbb{C}^{n-1} : (z_2, \dots, z_n)$ の原点 $z_2 = \dots = z_n = 0$ を記号 p' で表わし、 p' における $\mathbb{C}^{n-1}$ の局所環を $\mathcal{O}_{p'}$ で、またその最大イデアルを $m_{p'}$ で表すならば、射影

$$(w, z') \rightarrow z'$$

による関数の引き戻し作用によって、環の埋め込み

$$\mathcal{O}_{p'} \rightarrow \mathcal{O}_p$$

が引き起こされる。これによって $\mathcal{O}_{p'}$ を $\mathcal{O}_p$ の部分環と見なすならば

$$m_{p'} = m_p \cap \mathcal{O}_{p'}$$

と自然な関係も成り立っている。

多項式環 $\mathcal{O}_{p'}[X]$ の不定元 X に変数 w (の germ) を対応させれば埋め込み

$$\mathcal{O}_{p'}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_p$$

が得られ、この埋め込みの像は $\mathcal{O}_{p'}[w]$ と表すべきである。多様体の次元に関する帰納法の仮定から、この像はUFDであり、定理Wは正常な $m_p - \{0\}$ の元は単元乗法因子を無視すれば、すべてこのUFDの中にあると思ってよいことを示しているのである。従って、 $m_p - \{0\}$ の任意の有限個の元に対して、それらをすべて正常にする局所座標系 (w, z') が存在することを示せば、定理Iの証明が完了するのである。

もう少し詳しく説明すると次のようになる。最大イデアル m_p の有限個の非零元に対してそれらがすべて正常であるような局所座標系 (w, z') が存在することは、

次のように示される。

まず、それらの元の代表元が、共通に定義されている p の近傍 V があり、 V 上に p を原点とする局所座標系が与えられているとしてよい。この座標系により V は $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim \Omega$)における原点 O ($\in \mathbb{C}^n$)の近傍と同一視される。必要ならば V をさらに十分小さいものに取り換えれば、 V は線形空間 $\mathbb{C}^n$ の凸集合であるとしてよい。その上で $V - \{0\}$ の一点 q を、代表元の q での値がすべて0でないように選ぶ。さらに適当な線形変換によって $\mathbb{C}^n$ の座標系 (w, z') を、 0 と q を結ぶ(複素)直線が $z' = 0$ (i.e. $z_2 = \dots = z_n = 0$)と与えられるように取り換えれば、 $m_p - \{0\}$ の与えられた有限個の元は、この (w, z') に関して、すべて正常となるのである。もう一つの重要なポイントは、与えられた元とともにそれらの任意の公約元も、座標系 (w, z') に関して正常であることである。すなわち、そのような公約元も、単元乗法因子を除けば、多項式環

$$\mathcal{O}_{p'}[w] \quad (\approx \mathcal{O}_{p'}[X])$$

の中にあると考えてよいことが判る。この($\mathcal{O}_{p'}$ 係数の)多項式環は帰納法の仮定によってUFDであるので、 $m_p - \{0\}$ の任意の有限個の元に対して、それらの最大公約元が、(単元乗法因子を除いて)一意的に定まることが示された。

この性質はUFDを特徴付けるものであり、定理Iの証明は完了する。

この証明からも明らかなように、 $\mathcal{O}_p$ の代数的構造は点 p に依らず、定理Iの内容は「複素変数の収束ベキ級数環はUFDである」と言い直すこともできる。

10. セレンディピティの本質

廣木一亮

大発見・大発明の起源はセレンディピティ (serendipity) による事が多い。付箋紙「ポスト・イット」、一般にマジックテープやベルクロと呼ばれる面ファスナー、自動車用の飛散防止ガラスなど日常よく

目にする製品から、導電性高分子の発明やカーボンナノチューブの大量合成法の開発まで化学におけるセレンディピティの発現は枚挙に暇がないほどだ。

そもそもセレンディピティとは「幸運な偶然によって画期的な発見・発明をする潜在的な能力」をさす。セレンディピティによる発見のきっかけは偶然や勘違い、時にはアクシデントであり、多くは本来の研究目的とは違ったところに真の価値を見出し、発展させた結果という例が多い。そこでセレンディピティの本質とは何か、論じてみたい。

例にポスト・イットを挙げよう。今やこの付箋紙は知らない人があるだろうかと思えるほどに普及している。意外な事かもしれないが、この発明は「付箋紙」の開発ではなく、化学会社3Mの研究者スペンサー・シルバーのある失敗に端を発している。彼は「強力接着剤」の開発中に「確かによく着くが、すぐにはがれ落ちてしまう奇妙な接着剤」を偶然合成してしまう。当初の目的からすれば、これは明らかな「失敗」であるが、彼のすごさは「失敗ではあるが、何か別の用途があるのでは？」と閃いたことだ。そうは言っても自分では用途が思いつかないので、この奇妙な接着剤のことを他の研究者や知り合いに話しくった。自らの失敗をまるで自慢するかのような行動をとるシルバーは確かに変わり者かもしれないが、これの積極性が思わぬ幸運を産むのである。

この接着剤の話を聞いた一人にアート・フライがいる。彼は聖歌隊の一員であったのだが、いつも楽譜から抜け落ちる付箋紙にイライラしていた。その日も例によって付箋紙は落ちた。「またか！」とそれを拾おうとした瞬間、彼は閃くのである。「そうだ、スペンサーの接着剤を紙切れに塗れば、抜け落ちない付箋紙ができるぞ！」彼はシルバーのもとにそのアイデアを持ち込み、ほどなく試作品が完成する。二人は大ヒットを目論んだかもしれないが、世間はそんなに甘くなかった。楽譜ならいざ知らず、普通の本に挟む付箋なら紙きれで十分。紙きれで済むものにお金を払おうという人は稀だったのだ。

ところが二人はくじけない。「どうせ売れないなら、得意先にでも配ってしまえ」と彼らが発明した付箋紙を無料で配ったのである。これが大反響を巻き起こし、使用者は口々に便利だと称賛した。発明者の二人は、その使い方を見て驚いた。付箋紙に文字が書いてあったのだ。つまり彼らが発明したのは単なる「接着剤つき付箋紙」ではなかった。その真価は「貼ってはがせる便利なメモ用紙」だったのであり、この瞬間こそ「ポスト・イット」誕生の瞬間だったのである。

ポスト・イットで面白いのは、接着剤の発明者（スペンサー・シルバー）、製品の発案者（アート・フライ）、真の使い道の発見者（得意先）と、立場も考え方も違う三者が、半ば偶然的だが、段階的・進取的に開発を

行ったことである。シルバーの先見性と積極性、フライの問題意識と閃き、得意先の「付箋紙」という初期の用途にとらわれない自由な発想と応用力、どれが欠けてもこの発明はなされなかった。

ではもっと純粋な意味での化学におけるセレンディピティの場合はどうだろうか。2000年にノーベル化学賞を受賞した「導電性高分子」が良い例であろう。

ポリアセチレンの研究をしていた白川英樹が偶然（指導していた研究生が触媒濃度を間違えたのではないかとされている）、だれも合成できなかったポリアセチレン薄膜を得たことに端を発している。純粋な有機化合物でありながら、ポリアセチレン薄膜は光沢を有していたことから、導電性があるのでは？と閃き、研究は重ねられていく。これまた偶然出会った無機化学者：マクダイアミッド、固体物理学者：ヒーガーと3人で研究をし始めた結果、化学ドーピングという手法でポリアセチレンは金属にも匹敵する世界初の導電性高分子になった。

ポスト・イットの例と比べてもらいたいのだが、ここでもやはり誰も作り得なかった薄膜の合成者（白川）、その価値を見抜いた者（マクダイアミッド）、導電性を飛躍的に向上させる化学ドーピングの提案者（ヒーガー）と3人の科学者がそれぞれの役割を演じている。

注意してもらいたいのはセレンディピティが単なる偶然ではないと言う点である。いつも問題意識を持って、注意深く観察し、正しい知識に基づいた精神が、ある偶然と遭遇した時、だれも考え付かないような発明・発見となる。果たして「良く着くが、すぐにはがれ落ちてしまう奇妙な接着剤」は合成しようと思って合成できるものだろうか？筆者も有機化学を研究しているが、皆目見当もつかない。また高分子は絶縁体というのが当たり前の時代に、果たして導電性高分子などという発想ができるだろうか。そう夢見ることはできても、実現は困難であったろう。所詮、人の考え付くことには限界がある。だからこそ予期せぬ偶然を正しく捉え、うまく利用することで、画期的な発明は生まれる。

上記を念頭に置くと、津山高専50周年記念行事で講演した白川英樹の次の言葉は、極めて示唆的である。

「よく観て、よく記録し、しっかり考えよう」
子供相手の実験教室でも彼がよくいう一節だが、これを常に心がけることこそ、セレンディピティを発揮する第一歩であると筆者は考える。最後にルイ・パストゥールの言葉を紹介して結びとしたい。

「幸運の女神は準備された心のみに微笑みかける」

11. Cross-disciplinary Research and Proactive Serendipity

Shigeru Arimoto

On the 50th anniversary of the Tsuyama National College of Technology (TNCT) in 2013, Professor Hideki Shirakawa (Nobel Chemistry Prize 2010) mentioned the importance of proactive attitude in creating a new path in science. In recalling the cross-disciplinary research related to the Fukui conjecture, the author of this section is convinced that what might be called ‘Proactive Serendipity’ played a remarkable role in the proof of the Fukui conjecture via the resolution of singularities and related methods²⁾⁻⁴⁾. The phrase ‘Proactive Serendipity’ does not seem to exist in current English, however, the author recalls the late well-known engineer Dr. Hideo Itokawa referred to the idea approximately corresponding to what might be called Proactive Serendipity in one of his books.

Bearing in mind both Dr. Itokawa’s remarks and Professor Shirakawa’s lecture mentioned above, the author would like to record here a remarkable case of Proactive Serendipity. In the mid 1980s, the author visited the Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University, after contacting Professor Heisuke Hironaka for his help in resolving whether or not the Fukui conjecture was true. To make a long story short, his student Professor Mark Spivakovsky and his colleagues Professor Kyoji Saito and Professor Isao Naruki gave helping hands to the author immediately after Professor Hironaka returned to Harvard University leaving his student Spivakovsky in Kyoto. No one imagined at that time the Fukui conjecture had something to do with the specialized research field of Professor Spivakovsky and his teacher Professor Hironaka: Resolution of Singularities. One afternoon in the mid 1980s, when Professor Spivakovsky had left for America and Professor Naruki happened to be absent, at the Northern Restaurant in Kyoto University, the author asked Professor Saito and his colleagues at a lunch table a question about factorization with a rather imprecise formulation of the problem. The author talked about his conjecture directed towards what is known as the ‘Piecewise Monotone Lemma’ (version 2) recalling the visual impression from many examples of energy band calculations, which the author proactively undertook himself and collected from others’ publications over a period of several months. Professor Saito was the first to provide a counter example to negate the author’s conjecture. However, after the author restated his conjecture more precisely, Professor Saito agreed to the likely truth of the conjecture, which was later proved in refs.

2)-6). Hearing the statement of Professor Saito, Professor Naruki, who is the author of Section 9, gave a crucial initial step towards the then absolutely unexpected application of resolution of singularities to the research of the Fukui conjecture. Later, Professor Spivakovsky revisited Kyoto from America, and Professor Saito and Professor Spivakovsky also helped the author in the application of resolution of singularities to the Fukui conjecture. [See ref. 7) for the author’s communications with Professor Kenichi Fukui concerning his conjecture and its related theorems.]

Acknowledgements

The author of section 11 (S.A.) would like to express his sincere thanks to his former classmate at Kyoto University, Katsuhisa Ohta, now Professor at Muroran Institute of Technology, who suggested to the author to attend the ‘Open Mathematics Lectures’, by Professor Heisuke Hironaka, Professor Masaya Yamaguti and others in the RIMS, Kyoto University in the late 1970s. At this suggestion, the author attended the open lectures and thereafter proactively continued to study topics related to the lectures. This later paved a way to lucky and serendipitous encounters with Professor Saito, Professor Naruki, and Professor Spivakovsky, at the RIMS, Kyoto University, in 1980s.

References

- 1) S. Arimoto, N. Fukuda, K. Hiroki, T. Murakami, I. Naruki, K. Saito, S. Takeuchi, and M. Yokotani, "Mathematics and Chemistry Interdisciplinary Joint Research and the Fukui Project II", Bulletin of Tsuyama National College of Technology, **55** (2013) 31-35.
- 2) S. Arimoto, M. Spivakovsky, K.F. Taylor, and P.G. Mezey, Proof of the Fukui conjecture via resolution of singularities and related methods. I, J. Math. Chem. **37** (2005) 75-91.
- 3) S. Arimoto, M. Spivakovsky, K.F. Taylor, and P.G. Mezey, Proof of the Fukui conjecture via resolution of singularities and related methods. II, J. Math. Chem. **37** (2005) 171-189.
- 4) S. Arimoto, Proof of the Fukui conjecture via resolution of singularities and related methods. III, J. Math. Chem. **47** (2010) 856-870.
- 5) S. Arimoto, M. Spivakovsky, K.F. Taylor, and P.G. Mezey, Proof of the Fukui conjecture via resolution of singularities and related methods. IV, J. Math. Chem. **48** (2010) 776-790.
- 6) S. Arimoto, M. Spivakovsky, E. Yoshida, K.F. Taylor, and P.G. Mezey, Proof of the Fukui conjecture via resolution of singularities and related methods. V, J. Math. Chem. **49** (2011) 1700-1712.
- 7) S. Arimoto, Note on the repeat space theory - its development and communications with Prof. Kenichi Fukui -, J. Math. Chem. **34** (2003) 253-257.