

数学と化学の学際共同研究と福井プロジェクト I

有本 茂^{1*} 福田信幸^{2*} 廣木一^{3*} 村上達也^{4*}

成木勇夫^{5*} 斎藤恭司^{6*} 竹内 茂^{7*} 横谷正明^{8*}

Mathematics and Chemistry

Interdisciplinary Joint Research and the Fukui Project I

Shigeru ARIMOTO, Nobuyuki FUKUDA, Kazuaki HIROKI, Tatsuya MURAKAMI
Isao NARUKI, Kyoji SAITO, Shigeru TAKEUCHI, and Masaaki YOKOTANI

The present series of articles (Parts I, II, and III) records essentials of the Mathematics and Chemistry Interdisciplinary Symposium 2013 Tsuyama, whose main themes were symmetry, periodicity, and repetition. The symposium was held on April 5th and 6th in Tsuyama city, Okayama, Japan, in conjunction with the Fukui Project and was devoted to the memory of the late Professor Kenichi Fukui (1981 Nobel Prize) who initiated the project. The present series also provides a challenging cross-disciplinary problem which is directly related to the Fukui conjecture and to recent carbon nanotube research. This problem is formulated using mathematical language of unique factorization domain (UFD) and related notions, which are not well known among chemists despite the importance of these notions in elucidating additivity and high-speed asymptotic phenomena in molecules having many repeating identical moieties.

Key Words: the Fukui conjecture, Elliptic functions, Unique factorization domain (UFD), Carbon nanotube, Polyacetylene

1. 緒 言

平成25年、4月5日(金)、4月6日(土)、津山高専において、「数学と化学の学際シンポジウム・2013・津山」と称する集会が開かれた。本論文は、この学際シンポジウムで発表された学術的内容を総括記録すると共に、福井予想及び最近のカーボンナノチューブ研究と関連し、数学と化学の学際領域において重要性をもつ概念「一意分解整域 (UFD)」をその定式化の中にもつ1つの学際的基本問題を提起するものである。(この問題提起の部分のみは、英語で表記した。)

上記学際シンポジウムは故福井謙一博士(1981年ノーベル化学賞)がカナダを本拠地として1992年開始した、国際的・学際的・世代交流的共同研究「福井プロジェクト」のグループ及び、津山市、津山市教育委員会の後援で、最近の福井予想証明とナノサイエンスに関係する成果を記念する集会であった。本シンポジウムの数学の部では数学と諸科学の交流の歴史を顧み、現在化学者にとって疎遠であるが今後重要性が増すと考えられる楕円関数、複素解析等の数学分野に関連した講演がなされた。

これらの講演の本質的部分を記録し、補足した本論文は **New Frontier Project** と称する福井プロジェクトの新しい局面展開に呼応するものである。

4月5日の第1部は、数学と隣接科学分野の概観、数学と化学のとの間に横たわる広大な未開拓領域に関する概説、福井謙一博士の回顧より始まり、京都大学物質-細胞統合システム拠点(iCeMS)の村上によるカーボンナノチューブの癌治療への可能性をさぐる話(講演は録音再生を用いた)、今年10月、津山講演予定の白川英樹博士(2000年ノーベル化学賞)の

原稿受付 平成25年8月30日

1*, 2*, 8* 津山高専 一般科目 3* 津山高専 一般科目

4* 京都大学 物質-細胞統合システム拠点(iCeMS)

5* 立命館大学 理工学部・数学物理学系・数理科学科

6* 東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構

7* 岐阜大学 教育学部・数学科

直弟子、廣木による、ポリアセチレン合成の発見論的逸話等が披露された。

また、この日、本シンポジウム特別ゲストにより、数学とその隣接科学の歴史的概観と数学と化学の境界における新しい動向についての話が披露された。4月6日の第1部はドイツの国際学術雑誌で紹介された中に向かって無限に繰り返しを持つ神秘的な「津山城関数」と呼ばれるフラクタル3次元図形にかかわる話、朝日新聞社賞受賞の津山高専4年生橘智子さんによる「複素ピタゴラス数の構造について」の話、津山高専数学科、横谷、福田による、一般、数学アマチュア向け初等的「フェルマーの無限降下法」の話を経て、斎藤、成木による「楕円関数と2重周期性」の講演が行われた。

2. 福井謙一博士の思い出

平成25年、4月5日、6日「数学と化学の学際シンポジウム」冒頭において、福井プロジェクト・ディレクター有本と長崎総合科学大学、新技術創成研究所所長（京都大学名誉教授）山邊時雄教授により福井謙一先生を回想する講演がおこなわれた。（後者の講演は録音再生を用いた。）また、有本による福井謙一先生回想の講演は補充された形で、化学同人出版、学術雑誌「化学」に2013年11月、発表された。（第III部後記参照）

3. UFDの数学 I

成木勇夫

零因子を持たない可換環は整域（integral domain）と呼ばれる。整域の理論の中で、良い性質を持つ類として知られているものの一つとして、一意分解整域（unique-factorization-domain, 略してUFD）と呼ばれるものがある。この小論では、その本質が明らかになるような形でUFDを定義し、UFD理論における最も基本的な定理：「UFD上の一変数多項式環は再びUFDである」の証明について概説して見よう：

まず R は可換環とする。 R の二つの元 u, v に対して、 v は u の因子（factor）であるとは、 $u = v \cdot w$ となる $w \in R - \{0\}$ が存在するときに言う。 R の零元 0 はそれ自身の自明な因子であるが、 0 の、 0 ではない因子は零因子と（特別に）呼ばれる。従って、 R がもし、（上の意味で）整域であるとするならば、 R の 0 でない元の積は決して 0 とはならない。そして、これがまた R が整域であるための条件である。

以後、 R は整域であると仮定する。また因子に関する議論は $R^* = R - \{0\}$ 上に限って行うことにしよう。

因子はまた、約元（divisor）とも呼ばれるが、その理由は v が u の因子であることを v は u を約す、或は割る（divide）などと言い表すからである。この u と v の関係は記号

$$v \mid u$$

で表し、二項関係 $\mid$ を整除関係と呼ぶ。（整除 = 割り切ること。）また、このとき、

$$u = vw$$

となる $w \in R^*$ は（一意的に決るので）記号

$$\frac{u}{v} \quad \text{或いは} \quad u/v$$

などで表し、 u の v による商（the quotient of u by v ）と呼ぶ。

整除関係に対しては、明らかに次の推移律が成り立つ：

$$(T) \quad w \mid v, v \mid u \Rightarrow w \mid u$$

しかし、整除関係は一般には順序関係ではない。このことは以下の議論から理解される。

同値関係 $\sim$ を次のように定義する：

$$\stackrel{\text{def}}{u \sim v} \Leftrightarrow u \mid v, v \mid u$$

さて、これによって $u \sim v$ と仮定すると

$$\frac{v}{u}, \frac{u}{v}$$

は互に逆元、とくにどちらも1の約元である。一般に1の約元は可逆元（invertible element）と呼ばれ、可逆元の全体は R^* での積に関して群をなす。この群を記号

$$I(R)$$

または単に I で表すことにしよう。

群 I は乗法群として $R^* = R - \{0\}$ に作用し I による軌道空間 R^*/I は同値類空間 $R^*/\sim$ と一致する。整除関係 $\mid$ は自然に $R^*/\sim$ での整除関係 $\mid$ を誘導し、それは $R^*/\sim$ での順序関係となる。

このような少し人工的な同値関係 $\sim$ の定義や $R^*/\sim$ 上での順序関係となる整除関係などについて、もう少し合理的で自然な説明を与えるには、 R における単項イデアルの概念を用いた言い換えを導入するのが早道である。

$R^* = R - \{0\}$ の元 v に対して、 v で生成される R の単項イデアルを (v) で表す：

$$(v) := \{av \mid a \in R\}$$

明らかに

$$(i) \quad u \sim v \Leftrightarrow (u) = (v)$$

$$(ii) \quad v \mid u \Leftrightarrow (u) \subseteq (v)$$

が成り立つ。

実際、 (v) は v を約元とする元の全体であるから

$$v \mid u \Leftrightarrow u \in (v) \Leftrightarrow (u) \subseteq (v)$$

と(ii)が証明される。また、 $u \sim v$ は $u \mid v$ かつ $v \mid u$ と定義されたので(ii)から(i)が従う。

(i) によって、一つの単項イデアルの生成元の全体は、同値関係～による一つの同値類をなし、逆もまた成り立つことが分る。

(ii) を考慮して、同値類の大小関係を

$$[v] \leq [u] \Leftrightarrow (u) \subseteq (v)$$

と定義する。 $[u], [v]$ はそれぞれ u, v の属する同値類である。この定義によれば

$$I = [1]$$

は最小類である。対応するイデアルは最大イデアル R である。

類 α が $I = [1]$ と異なり、また $\beta \leq \alpha$ となる類 β が I と自身 α 以外にないとき、 α は既約類と呼ばれる。

既約類に対応する単項イデアルは、 R を除いた全単項イデアルの集合の中で、包含関係に関して極大なものであることになる。

ここで、小さな反省をして見る。確かに $R^* = R - \{0\}$ には二乗の乗法 (積) があって、それは可換で、結合律を満たしている。しかし、 I 以外の元には逆元がないので一般には R^* は群ではない。しかし、それは単なる可換半群であるばかりではなく、単位元 1 を持ち、乗法は簡約律

$$uw = vw \Rightarrow u = v \quad (u, v, w \in R^*)$$

を満たしている。従って R^* は、(半群の一般理論によって) R^* で生成される可換群の中に (算法もこめて) 埋め込まれる。このような可換群は同型を除いて一意に決まり R^* の商群 (the group of quotients) と呼ぶ。この商群を K^* で表す。 K^* は R^* で生成されるので、 K^* の任意の元は

$$uv^{-1} = \frac{u}{v} \quad (u, v \in R^*)$$

の形に書き表される。もちろん、表現は一意的ではなく

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \Leftrightarrow uv' = u'v$$

と約束される。

ここで K^* の二つの元の和を

$$\frac{u}{v} + \frac{s}{t} = \frac{ut + vs}{vt}$$

と定義すれば、 $ut + vs \neq 0$ ならば、この和は二乗の表現には依らず K^* の元として確定する。また $ut + vs = 0$ の場合は二乗の和は R の元 0 であるとする。この場合

$$\frac{s}{t} = \frac{-u}{v} = (-1) \cdot \left(\frac{u}{v} \right)$$

となるので、積と和の間に分配律が成り立つとすれば、この定義はまったく合理的である。

実際、

$$K := K^* \cup \{0\}$$

と定義すれば、 K は $R = R^* \cup \{0\}$ を含む体となる。 K は R の商体 (the quotient field) と呼ばれる。それは整域 R を含む最小の体であると考えることが出来る。

同値類空間 $R^* / I = R^* / \sim$ の各元は R における非零単項イデアルと 1 対 1 に対応していることは上に見た通りである。すなわち $u, v \in R^*$ に対して

$$u \sim v \Leftrightarrow (u) = (v) \Leftrightarrow u / v \in I$$

が成り立つからである。

では剰余類空間 K^* / I の各元に対して、類似の対象を考えることが出来るであろうか?

まず任意の $u \in K^*$ に対しても

$$(u) := \{au \mid a \in R\}$$

と置くことが出来、これは分配律により、明らかに加法部分群 ($\subseteq R$) であり、また R の任意の元の乗法によって自身の中に写される。従って、 R の部分集合であると言う条件を除けば、イデアルであるための (残りの) 条件をすべて満たしている。このことから (u) は u によって生成される単項分数イデアルと呼ばれる。

この考察により K^* / I の各元は、一つの単項分数イデアルの生成元集合と同一視される。そして K^* / I も R^* / I と同様に順序付けられる:

$$[u] \leq [v] \Leftrightarrow (u) \subseteq (v) \Leftrightarrow u / v \in R^*$$

但し、 $[u], [v]$ などはそれぞれ u, v の属する同値類 (= 剰余類 I_u, I_v) を表すものとする。

さて、これまでは K^* / I は乗法群であると考えて来たが、これからは、可換群なので、それを加法群と見做しても、十分注意すれば、論理的には何の問題も起こらない筈である。(環 R 、体 K には乗法の他に加法もあるが、それは K^* / I の算法には何の影響も与えていないからである。) すなわち K^* / I の単位元 I は 0 と書かれ、 K^* / I での算法 $+$ は

$$[u] + [v] := [uv]$$

と定義される。

上で導入された順序 $\leq$ に関して、 0 より大きい K^* / I の元は正元と呼ばれ、 0 より小さい元は負元と呼ばれる。出発点の半群 R^* / I は非負元の全体であり、従って

$$P := R^* / I - \{0\}$$

は正元の全体である。上で既約類の概念を導入したが、それは順序 $\leq$ に関する、 P の中の極小元と新たに特徴付けられる。 P における極小元全体の集合を記号

Λ

で表すことにしよう。

これだけの準備の上で、ようやく R が UFD であることを定義することができる。

(第 II 部に続く。)

4. 楕円積分

斎藤恭司

楕円積分の研究は加法定理の発見(オイラー1751)以来長い歴史があるが(文献 14) 参照)、本節では天下りのモジュライパラメータに関わる幾つかの結果を原始形式の積分の立場から要約してみる(文献 9)-12) 参照)。

§1 まず次の三種の方程式で定まる楕円曲線の族を三つ考えよう。

$$A_2: F_{A_2}(x, y, \underline{g}) := y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3). \quad (0.1)$$

$$B_2: F_{B_2}(x, y, \underline{g}) := y^2 - (x^4 + g_2x^2 + g_4 + g_2^2/8). \quad (0.2)$$

$$G_2: F_{G_2}(x, y, \underline{g}) := x(x^2 - y^2) + g_2(3x^2 + y^2) + g_6 - 2g_2^3. \quad (0.3)$$

これ等は歴史的には各々Weierstrass、JacobiそしてHesseの標準型として良く知られている(正確にはそれ等を原始形式の立場から座標変換を施している)。それを改めてrank 2のルート系の名を用いて A_2 -型、 B_2 -型そして G_2 -型と名付ける。その理由を以下に述べよう。

まず、式中の $\underline{g}$ は下付き数字で示したウェイトを持つ複素二変数パラメータ空間 $\mathbb{C}^2$ (それ等を型に応じて S_{A_2} , S_{B_2} 又は S_{G_2} と名付ける) の点を動くものとする。天下りであるが、判別式を

$$\begin{aligned} \Delta_{A_2} &:= -g_3^2 + g_2^3, & \Delta_{B_2} &:= -g_4^2 + g_2^4/64, \\ \Delta_{G_2} &:= -g_6^2 + 4g_2^6 \end{aligned} \quad (0.4)$$

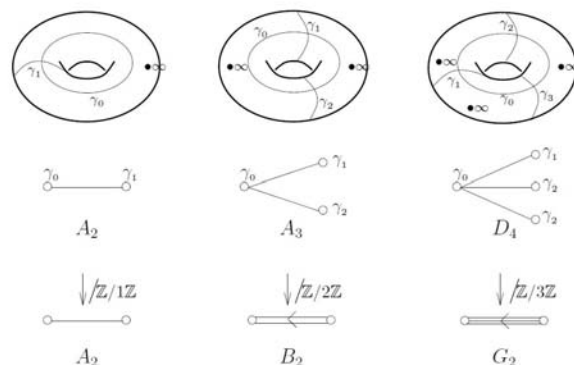
と置きその零面を D_{A_2} , D_{B_2} 及び D_{G_2} と記しディスクリミナントと呼ぶ。すると、補集合の各点 $\underline{g} \in S_{A_2} \setminus D_{A_2}$, $S_{B_2} \setminus D_{B_2}$ 又は $S_{G_2} \setminus D_{G_2}$ に対し、方程式 (0.1), (0.2), (0.3) の零面が複素 xy 平面に定めるアフィン曲線 $E_{\underline{g}}$ は各々穴が一個、二個又は三個あいた楕円曲線となる。複素楕円曲線は位相空間としては2次元トーラスなので、下図の第一段のように表示しておく。更に複素 xy 平面の自己同型写像 σ を

$$\sigma_{A_2}(x, y) := (x, y),$$

$$\sigma_{B_2}(x, y) := (-x, y), \quad \sigma_{G_2}(x, y) := \left(-\frac{x+y}{2}, \frac{3x-y}{2} \right)$$

と置くと、各々、対応する楕円曲線の定義方程式を不変にする位数1、2及び3の巡回群 $\langle \sigma \rangle$ を生成し、楕円曲線の穴に推移的作用する事が分かる。

ここで楕円曲線の1次元ホモロジー群 $H_1(E_{\underline{g}}, \mathbb{Z})$ を考えると、夫々の型に応じて、次の図の一段目の様に γ_i ($0 \leq i \leq 2, 3, 4$) という基底が取れ、各々階数が2、3又は4の自由加群である。次の図の二段目はそれ等の基底の交叉状況のダイアグラム表示を与えたものであるが、



夫々 A_2 -型、 A_3 -型そして D_4 -型のディンキン図式に成る事が見て取れる。この事により、 $H_1(E_{\underline{g}}, \mathbb{Z})$ は対応するルート系のルート束に同一視される。ここで自己同型写像 σ は基底の集合であるディンキン図式の自己同型も引き起こしている。その自己同型により、ディンキン図式を折り畳んだ結果の図が上図最下段に与えられている。直ぐ見て取れる様に、夫々 A_2 -型、 B_2 -型そして G_2 -型のディンキン図式に成る事が見て取れる。この折り畳まれたダイアグラムの二個の頂点が、不変部分群 $H_1(E_{\underline{g}}, \mathbb{Z})^\sigma$ の基底を記述している。これが、夫々の楕円曲線族に上記の名前を与えた理由である。以降三つの型を統一的に扱うために、 $A_2 = I_2(3)$, $B_2 = I_2(4)$ および $G_2 = I_2(6)$ と置く。¹

以上が意味ある方程式を見つけるという §1 に対応する。次に §2 及び §3 を考えよう。

§2 a) 天下りであるが、被積分微分形式として前 §1 の三つの楕円曲線族の各型 $I_2(p)$ ($p=3, 4$ 又は 6) 各々に対し次のシンボルを考える。

$$\zeta_{I_2(p)} := \text{Res} \left[\frac{dx dy}{F_{I_2(p)}(x, y, \underline{g})} \right] \quad (0.5)$$

その意味は次の通りである。各点 $\underline{g}$ を固定すると右辺の括弧の中身は xy 平面上の有理係数の2-微分形式で丁度楕円曲線 $E_{\underline{g}}$ に一位の極を持つ。それに対しResidue (剰余) と呼ばれる $E_{\underline{g}}$ 上の1-微分形式が定まる。

それは xy 座標を用いる事により $\frac{dx}{\partial F_{I_2(p)} / \partial y}$ と表示される (ただし、 x, y は $F_{I_2(p)}(x, y, \underline{g}) = 0$ なる関係を満たしている)。即ち $\zeta_{I_2(p)}$ は $\underline{g}$ でパラメトライズされた1-微分形式の族である。少し計算すると、この $\zeta_{I_2(p)}$ は穴も含めた全楕円曲線の上で正則(極を持たない、即ち第一種)となる事もすぐ分かる。この $\zeta_{I_2(p)}$ が原始形式の古典的な例となる(文献 9), 14) 参照)。

b) 次に原始形式 $\zeta_{I_2(p)}$ を積分するサイクルのなす加

群として各点 $\underline{g}$ 毎に、 $H_1(E_{\underline{g}}, \mathbb{Z})$ の中の巡回群不変な階数 2 の部分加群を考える。すでに脚注 1 で述べたように、それは束 $L_{I_2(p)}$ と同型であるが、同型写像（即ち基底 e_1, e_2 に対応する $H_1(E_{\underline{g}}, \mathbb{Z})$ の元の取り方）は点 $\underline{g}$ のみでは決まらない（実際は点 $\underline{g}$ とディスクリミナントの二つの分岐とを結ぶ道に依存して決まる）。即ち或起点 $\underline{g}_0$ で同型を一つを固定してやると、あとはそこから点 $\underline{g}$ までの $S_{I_2(p), \mathbb{C}} \setminus D_{I_2(p), \mathbb{C}}$ 内の道 g に沿っての平行移動により決まることが分かる。又、その決まり方は道 g のホモトピー類にのみよる。この記述の帰結として次の二つの写像が構成された。

モノドロミー表現：

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(S_{I_2(p), \mathbb{C}} \setminus D_{I_2(p), \mathbb{C}}, \underline{g}_0) &\rightarrow \text{Aut}(L_{I_2(p)}), \\ g &\mapsto \{\gamma \in L_X \mapsto g\gamma := \text{道 } g \text{ に沿った } \gamma \text{ の平行移動}\}. \end{aligned}$$

周期写像：

$$\begin{aligned} (S_{I_2(p), \mathbb{C}} \setminus D_{I_2(p), \mathbb{C}}, \underline{g}_0)^\sim &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_{I_2(p)}, \mathbb{C}), \\ \tilde{g} &\mapsto \{\gamma \in L_{I_2(p)} \mapsto \int_{\tilde{g}\gamma} \zeta_{I_2(p)} \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

先に行く前に基本群 $\pi_1(S_{I_2(p), \mathbb{C}} \setminus D_{I_2(p), \mathbb{C}}, \underline{g}_0)$ を決定しておく。Zariski van Kampen の古典的方法を (0.4) のディスクリミナントの定義方程式に適用することにより、基本群は以下の生成系と関係式で決まる。

$$G_{I_2(p)} := \langle a, b \mid ab \cdots = ba \cdots \rangle$$

（ここで、定義関係式の両辺は各々文字 a 及び b が交代的に現れる長さ p の語である。現在の言葉ではこの群は $I_2(p)$ -型の Artin 群である（文献 3), 12) 参照）。²

§3 以上の §1 及び §2 をふまえて、周期写像を考察する（このセクションの詳細については文献 12) §6 を参照）。

定理 a) モノドロミー表現は次の完全列で与えられる：

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G_{I_2(p)} \xrightarrow{p} \Gamma_1([p/2]) \rightarrow 1 \quad (0.6)$$

但し $\mathbb{Z}$ は元 $(ab)^{k(p)} = (ba)^{k(p)}$ ($k(3) = 12$, $k(4) = 8$, $k(6) = 6$) で生成される無限巡回群であり、 $\Gamma_1([p/2])$

は対応 $a \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -[p/2] & 1 \end{bmatrix}$ により束

$(L_{I_2(p)}, -J_{I_2(p)} + J_{I_2(p)})$ の自己同型群の主合同部分群に埋め込まれる。

定理 b) 周期写像は次の $\Gamma_1([p/2])$ -同変な双正則同相写像を引き起こす。

$$(S_{I_2(p), \mathbb{C}} \setminus D_{I_2(p), \mathbb{C}}, \underline{g}_0)^\sim / \mathbb{Z} \simeq \tilde{\mathcal{H}}_{I_2(p)}.$$

但し周期写像の像領域は次のように与えられる。

$$\tilde{\mathcal{H}}_{I_2(p)} := \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_{I_2(p)}, \mathbb{C}) \mid \text{Im}(\varphi(e_1) / \varphi(e_2)) > 0\}.$$

定理 c) デデキントのエータ関数 $\eta(\tau)$ を用いて $\tilde{\mathcal{H}}_{I_2(p)}$ 上の関数を

$$\begin{aligned} \lambda_{I_2(p)} &:= \eta(\tau)\eta([p/2]\tau)\varphi(e_2) \\ &\quad (\text{但し } \tau := \varphi(e_1) / \varphi(e_2)) \end{aligned} \quad (0.7)$$

と定義する。すると $\lambda_{I_2(p)}$ は主合同部分群 $\Gamma_1([p/2])$ 上のキャラクター

$$\vartheta_{I_2(p)} : \Gamma_1([p/2]) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad a, b \mapsto \exp\left(\pi\sqrt{-1} / k(p)\right)$$

をもつウエイト 1 のカスプ形式であり、かつ判別式の次の巾根を与える：

$$\Delta_{I_2(p)} = \lambda_{I_2(p)}^{2k(p)} \quad (0.8)$$

3

ここで $k(3) = 6$, $k(4) = 4$ 及び $k(6) = 3$ である。

注. 楕円積分がそれ以前の弧長積分と比較して注意を引いたのは Fagnano によるレムニスケート曲線の弧長の倍化点の代数性の発見 (1718) そしてそれを一般化した Euler による加法公式の発見 (1751) による。即ち、指数関数（三角関数）を超えた加法性を持つ関数の発見に繋がったからである。これがその後の Abel-Jacobi の理論へと、そして更には、現代の Hodge 構造の理論へと発展していく様はまさに壮観である。他方、同じ楕円積分が、加法性とは別の視点である同次元性や原始性の立場からも、あらたな古典としてよみがえり新しい数学を導いている様に見える。偶然と言うには深い驚きであり、魅力的に思える。

¹ 同一視の意味を説明しよう。曲線 $E_{\underline{g}}$ のパラメータ $\underline{g}$ をディスクリミナントに近付けるとその経路に応じて $H_1(E_{\underline{g}, \mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ の元が潰れ、その（生成）元は消滅サイクルと呼ばれる。今ディスクリミナント $D_{I_2(p)}$ の原点における重複度二なので、その二つの分岐に対応し取れる消滅サイクルを e_1, e_2 とすると、 $H_1(E_{\underline{g}, \mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ の $\sigma_{I_2(p)}$ -不変な部分加群の基底を与える。更に e_1, e_2 間の Seifert 形式 (link 数) は（一方の分岐の重複度が $[p/2]$ である事から計算でき）

$$J_{I_2(p)} = \begin{bmatrix} 1 & -[p/2] \\ 0 & [p/2] \end{bmatrix} \text{ となる。すると、加群 } L_{I_2(p)} := \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 \text{ は}$$

ホモロジー群としての交叉形式は反対称形式 $-{}^t J_{I_2(p)} + J_{I_2(p)}$ を持つが、他方、対称内積 ${}^t J_{I_2(p)} + J_{I_2(p)}$ に関し e_1, e_2 を単純ルート基底とする $I_2(p)$ 型のルート束と見なせる。

² 群の生成系である a, b を与える道と消滅サイクル e_1, e_2 を与える為に選んだ道とは互いに“連動”しているのであるがここでは説明は省略する⁵⁾。

³ この様に、判別式の高位の巾根がキャラクター付カスプ形式で与えられる事の単純な幾何的説明は今のところない。その本格的理解には鏡像対称性が必要となると思われる。

一般に、任意の有限ルート系 X に対して、周期領域 $\tilde{\mathcal{H}}_X$, シンプレ

クテック・ディスクリート群 $\Gamma(X)$ 、位数 $k(X) \in \mathbb{Z}_{>0}$ 、キャラクター $\vartheta_X : \Gamma_X \rightarrow \mathbb{Z} / (2k(X)\mathbb{Z}) \subset \mathbb{C}$ 等が定義される(文献 2) 参照)。この時、判別式 Δ_X の $2k(X)$ 位の巾根を与えるキャラクター ϑ_X 付の Γ_X 付のカスプ形式 λ_X が存在するであろうと予想されているが¹³⁾、今のところ検証されているのは楕円積分に帰着できる上記の A_2 , B_2 , G_2 及び B_3 型のみである。

参考文献

- 1) Borchers, Richard: Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products. *Inventiones Math.* **120** (1995) 161-213.
- 2) Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique*, Fasc. XXXIV, Groupes et algèbres de Lie, Chs. 4-6. Hermann, Paris 1968.
- 3) Brieskom, Egbert: Singular elements of semi-simple algebraic groups. *Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970)*, vol. 2, 1971, pp. 279-284.
- 4) Brieskom, Egbert: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. *Manuscripta Math.* **2** 1970 103-161.
- 5) Frenkel, Igor B.: Representations of Kac-Moody Algebras and Dual Resonance Models. *Lect. Appl. Math.* **21** (1985) 325-353.
- 6) Gonzalez-Springberg and J.-L. Verdier: Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (4) (1983) 409-449.
- 7) McKay, John: Affine diagrams and character tables. Santa Cruz, 1979.
- 8) Mumford, David: *Tata Lectures on Theta II (Jacobian theta functions and Differential equations)*. Birkhäuser, 1984.
- 9) Saito, Kyoji: Period Mapping Associated to a Primitive form. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983) 1231-1264.
- 10) Saito, Kyoji: Around the Theory of the Generalized Weight System: Relations with Singularity Theory, the Generalized Weyl Group and Its Invariant Theory, Etc. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **183** (1998) 101-143.
- 11) Saito, Kyoji: Primitive Automorphic Forms, *Mathematics unlimited: 2001 and beyond*/ Bjorn Enquist, Wilfried Schmid, editors (Springer Verlag).
- 12) Saito, Kyoji: Uniformization of the orbifold of a finite reflection group. *Frobenius manifolds*, 265-320, *Aspects Math.*, E36, Vieweg Wiesbaden, 2004. (20F55 32S30 32S40).
- 13) Saito, Kyoji: Jugendtraum of a mathematician. *Asia Pac. Math. Newsl.* **1** (2011), no. 3, 1-6. 11R04.
- 14) Siegel, Carl Ludwig: *Topics in Complex Function Theory*, Vols. I, II and III. Wiley, 1969.