

打ち切り多項式環のホッホシルト・ホモロジー

横谷 正明*

Hochschild Homology of Truncated Polynomial Algebra

Masaaki YOKOTANI

Let K be an arbitrary field of characteristic zero. Where the case $|\alpha|$ is an even number, we want to determine the iterated Hochschild homology $HH_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ and the iterated cyclic homology $HC_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ of the truncated polynomial algebra $K[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ together with the trivial differential. In order to get a clue, first of all we compute $HH_*^{(1)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ for the iteration degree $l=1$ in this paper. The minimal Sullivan model of the complex is given by $\Lambda(\alpha, q)$; $d\alpha=0$, $dq=\alpha^{n+1}$. It is the minimal Sullivan model for the even dimensional sphere S^{2k} especially for $|\alpha|=2k$, $dq=\alpha^2$, or the complex projective space $\mathbb{CP}^n$ especially for $|\alpha|=2$, $dq=\alpha^{n+1}$. Therefore we can obtain the explicit forms of the cohomology $H^*(map(\mathbb{T}, X); K)$ of the mapping space $map(\mathbb{T}, X)$ for $X=S^{2k}$ or $\mathbb{CP}^n$, where $\mathbb{T}$ is the circle.

Key Words: Iterated Hochschild Homology, Iterated Cyclic Homology

1. はじめに

K を標数 0 の体とする. $|\alpha|$ が偶数のとき, 自明な微分をもつ K 上の α により生成される打ち切り多項式環 $K[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ の累次次数 l のホッホシルト・ホモロジー $HH_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ とサイクリック・ホモロジー $HC_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ を決定したい. 本論文では, そのための足がかりとして, まずは累次次数 $l=1$ のホッホシルト・ホモロジー $HH_*^{(1)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ を決定する.

複体 $K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0$ の極小 Sullivan モデルは,

$$\Lambda(\alpha, q); \quad d\alpha=0, \quad dq=\alpha^{n+1}$$

で与えられる. とくに, $|\alpha|=2k$, $|q|=4k-1$, $dq=\alpha^2$ のときは偶数次元球面 S^{2k} の極小 Sullivan モデルであり, $|\alpha|=2$, $|q|=2n+1$, $dq=\alpha^{n+1}$ のときは複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の極小 Sullivan モデルである. したがって $X=S^{2k}$ または $\mathbb{CP}^n$ に対して, 写像空間 $map(\mathbb{T}, X)$ のコホモロジー $H^*(map(\mathbb{T}, X); K)$ を求めたことになる¹⁾. ここで $\mathbb{T}$ はサークルである.

なお次数つき微分多元環のホモロジーを計算するに当たり, Kuribayashi, Mimura, Nishimoto の解説²⁾を参考にした.

2. ホッホシルト・ホモロジーの定義

以下, 次数つき微分多元環 (以後 DGA とあらわす) は可換, かつ標数 0 の体 K 上で定義されているものとする. そして ΛV または $K[V]$ により, 次数つきベクトル空間 V で生成される自由多元環をあらわす. $(\Lambda V, d)$ を自由 DGA, (B, d_B) を DGA とする.

DGA (B, d_B) に対して, $q \leq 0$ であるときに $B_q = \text{Hom}(B^{-q}, K)$ として次数つき微分双対多元環 B_* を定義する. すなわち B_* には, B の積の双対である双対積 D と, d_B の双対 d_{B^*} が微分として与えられている. さらに $a_1, a_2 \in \Lambda V$, $\beta \in B_*$ かつ $D(\beta) = \sum_i \beta'_i \otimes \beta''_i$ のとき, 自由多元環 $K[\Lambda V \otimes B_*]$ において $1 \otimes 1 - 1$ とすべての

$$a_1 a_2 \otimes \beta - \sum_i (-1)^{|a_2||\beta'_i|} (a_1 \otimes \beta'_i)(a_2 \otimes \beta''_i)$$

の形の元で生成されるイデアルを I とする. $K[\Lambda V \otimes B_*]$ は, 微分 $d \otimes 1 \pm 1 \otimes d_{B^*}$ をもつ DGA である.

Brown と Szczarba の結果³⁾における Theorem 3.3 により, 微分 $d \otimes 1 \pm 1 \otimes d_{B^*}$ はイデアル I を保つ. すなわち

$$(d \otimes 1 \pm 1 \otimes d_{B^*})(I) \subset I$$

である. さらに, 同³⁾Theorem 3.5 により連結写像

$$\begin{aligned} \rho_V : K[V \otimes B_*] &\xrightarrow{\text{inclusion}} K[\Lambda V \otimes B_*] \\ &\xrightarrow{\text{projection}} K[\Lambda V \otimes B_*]/I \end{aligned}$$

は次数つき多元環の同型写像である. したがって, $\tilde{d}$ が $d \otimes 1 \pm 1 \otimes d_{B^*}$ により誘導される $K[\Lambda V \otimes B_*]/I$ 上の微

分のとき, $\rho_V^{-1}\tilde{d}\rho_V$ により $K[V \otimes B_*]$ 上の微分 δ を定義することができる:

$$\begin{array}{ccc} K[V \otimes B_*] & \xrightarrow{\delta} & K[V \otimes B_*] \\ \rho_V \downarrow \cong & & \rho_V \downarrow \cong \\ K[\Lambda V \otimes B_*]/I & \xrightarrow{d} & K[\Lambda V \otimes B_*]/I. \end{array}$$

以上の構成法を, B が自明な微分をもつ DGA $\Lambda(t_1, \dots, t_l)$ の場合に適用する. ただし, 任意の i に対して $|t_i| = 1$ である. 以後 $t_1^{e_1} \dots t_l^{e_l}$ の双対基を $(t_1^{e_1} \dots t_l^{e_l})_*$ であらわす.

自由 DGA $(\Lambda V, d)$ に対する累次次数 l の累次ホッホシルト・ホモロジー $HH_*^{(l)}(\Lambda V, d)$ は, 複体 $(K[V \otimes B_*], \delta)$ のホモロジーとして定義される.

3. $HH_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ の決定

ホッホシルト・ホモロジーの定義により

$$\begin{aligned} HH_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0) \\ = H(K[K\{\alpha, q\} \otimes \Lambda(t_1)_*], \delta). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & K[K\{\alpha, q\} \otimes \Lambda(t_1)_*] \\ &= K[\alpha \otimes 1, \alpha \otimes t_{1*}, q \otimes 1, q \otimes t_{1*}] \\ &= K[\alpha \otimes 1, q \otimes t_{1*}] \otimes \Lambda(\alpha \otimes t_{1*}, q \otimes 1) \end{aligned}$$

である. 簡単のために, $\alpha \otimes 1$, $\alpha \otimes t_{1*}$, $q \otimes 1$, $q \otimes t_{1*}$ をそれぞれ α , $\bar{\alpha}$, q , $\bar{q}$ と略記する. すなわち

$$HH_*^{(l)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0) = H(K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q), \delta)$$

である.

命題 3.1. 複体 $(K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q), \delta)$ の微分

$$\delta: K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q) \rightarrow K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q)$$

について

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= 0, \quad \delta(\bar{\alpha}) = 0, \\ \delta(q) &= \alpha^{n+1}, \quad \delta(\bar{q}) = (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 複体 $(\Lambda(\alpha, q), d)$ の微分 $d: \Lambda(\alpha, q) \rightarrow \Lambda(\alpha, q)$ について,

$$d(\alpha) = 0, \quad d(q) = \alpha^{n+1}. \quad (3.1)$$

また, $\Lambda(t_1)$ の微分は自明だから

$$d_{\Lambda(t_1)_*} = 0: \Lambda(t_1)_* \rightarrow \Lambda(t_1)_*.$$

で,

$$d \otimes 1 \pm 1 \otimes d_{\Lambda(t_1)_*} = d \otimes 1 \pm 1 \otimes 0 = d \otimes 1 \quad (3.2)$$

となる.

定義より $\delta = \rho_{K\{\alpha, q\}}^{-1} \tilde{d} \rho_{K\{\alpha, q\}}$ だから, 式 (3.2), (3.1) により

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= \delta(\alpha \otimes 1) = d\alpha \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0, \\ \delta(\bar{\alpha}) &= \delta(\alpha \otimes t_{1*}) = d\alpha \otimes t_{1*} = 0 \otimes t_{1*} = 0 \end{aligned}$$

である. また $\Lambda(t_1)$ の積の双対積 D に対して,

$$D^n: \Lambda(t_1)_* \rightarrow \overbrace{\Lambda(t_1)_* \otimes \dots \otimes \Lambda(t_1)_*}^{n+1}$$

は

$$D^n(1) = \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^{n+1}$$

だから, (3.2), (3.1) により

$$\begin{aligned} \delta(q) &= \delta(q \otimes 1) = dq \otimes 1 \\ &= \alpha^{n+1} \otimes 1 = (\alpha \otimes 1)^{n+1} = \alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

さらに,

$$D^n(t_{1*}) = \underbrace{t_{1*} \otimes \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^n + \dots + \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^n \otimes t_{1*}}_{n+1}$$

だから, (3.2), (3.1) により

$$\begin{aligned} \delta(\bar{q}) &= \delta(q \otimes t_{1*}) = dq \otimes t_{1*} = \alpha^{n+1} \otimes t_{1*} \\ &= (\alpha \otimes t_{1*}) \overbrace{(\alpha \otimes 1) \dots (\alpha \otimes 1)}^n + \\ &\quad \underbrace{\dots + \overbrace{(\alpha \otimes 1) \dots (\alpha \otimes 1)}^n (\alpha \otimes t_{1*})}_{n+1} \\ &= \underbrace{\bar{\alpha} \alpha \dots \alpha + \dots + \alpha \dots \alpha \bar{\alpha}}_{n+1} = \underbrace{\bar{\alpha} \alpha^n + \dots + \alpha^n \bar{\alpha}}_{n+1} \\ &= (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \end{aligned}$$

である.

よって命題が成り立つ. □

ここで $K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q)$ の生成元のウェイトを

$$w(\alpha) = 0, \quad w(\bar{\alpha}) = 0, \quad w(q) = 0, \quad w(\bar{q}) = -1$$

として, フィルトレーションを与える (図 3.1). そして, このフィルトレーションにより与えられるスペクトル系列を考える.

補題 3.2. スペクトル系列の E_1 - 項は

$$E_1 = K[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \otimes \Lambda(\bar{\alpha}) \otimes K[\bar{q}]$$

で与えられる.

証明. E_0 - 項について

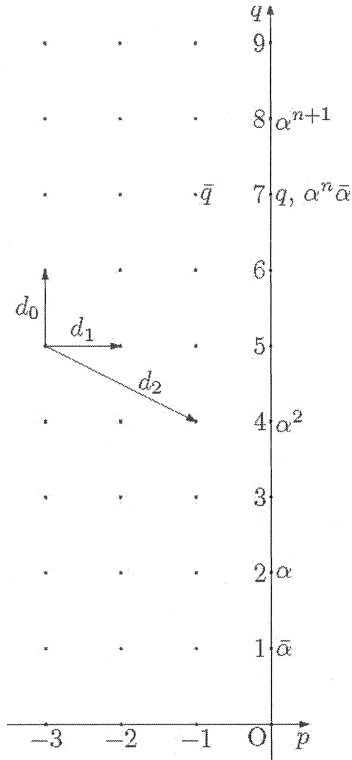


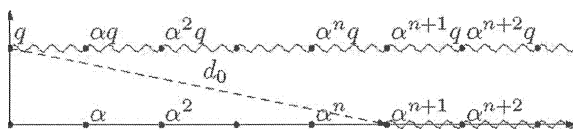
図 3.1 フィルトレイション

$$\begin{aligned} E_0 &= K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q) \\ &= (K[\alpha] \otimes \Lambda(q)) \otimes (\Lambda(\bar{\alpha}) \otimes K[\bar{q}]) \end{aligned}$$

であり, 命題 3.1, 図 3.1 により E_0 - 項の微分 d_0 は

$$d_0(\alpha) = 0, \quad d_0(\bar{\alpha}) = 0, \quad d_0(q) = \alpha^{n+1}, \quad d_0(\bar{q}) = 0$$

だから, 次の図式が成り立つ (図 3.2).


 図 3.2 E_0 - 項の微分 d_0

すなわち, 微分 d_0 により上の水平線上の点列が下の水平線上の点列に当たる. これより補題が成り立つ. $\square$

命題 3.1, 図 3.1 により, E_1 - 項の微分 d_1 は

$$\begin{aligned} d_1(\alpha) &= 0, \quad d_1(\bar{\alpha}) = 0, \\ d_1(\bar{q}) &= (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる.

補題 3.3. 任意の $i=1, 2, \dots$ に対して

$$d_1(\bar{q}^i) = i(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{i-1} \quad (3.4)$$

である.

証明. i に関する帰納法で示す.

$i=1$ のとき, 式 (3.3) により

$$d_1(\bar{q}^1) = d_1(\bar{q}) = (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} = 1 \cdot (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{1-1}$$

だから, 式 (3.4) が成り立つ.

$i=k$ のとき (3.4) が成り立つとすると

$$d_1(\bar{q}^k) = k(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1}$$

だから, (3.3) により

$$\begin{aligned} d_1(\bar{q}^{k+1}) &= d_1(\bar{q}^k \cdot \bar{q}) \\ &= d_1(\bar{q}^k) \bar{q} + (-1)^{|\bar{q}^k|} \bar{q}^k \cdot d_1(\bar{q}) \\ &= k(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1} \cdot \bar{q} + \bar{q}^k \cdot (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \\ &= k(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^k + (n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^k \\ &= (k+1)(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^k \\ &= (k+1)(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{(k+1)-1}. \end{aligned}$$

よって, $i=k+1$ のときも式 (3.4) が成り立つ.

したがって, 任意の $i=1, 2, \dots$ に対して式 (3.4) が成り立つ. $\square$

命題 3.4. スペクトル系列の E_∞ - 項は

$$E_\infty = (K[\beta_0, \beta_1, \dots] \otimes \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \dots)) / I,$$

ただし, I は $K[\beta_0, \beta_1, \dots] \otimes \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ のイデアルで

$$\begin{aligned} I &= (\beta_k \beta_l - \beta_{k+l} \beta_0, \beta_0^n \beta_k, \beta_k \gamma_l - \beta_{k+l} \gamma_0, \\ &\quad \beta_0^n \gamma_k, \gamma_k \gamma_l \mid k, l = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

とする.

証明. 式 (3.3), 補題 3.3 により, 次の図式が成り立つ (図 3.3). すなわち E_1 - 項の微分 d_1 により, 点列 $\bar{q}^k$ ($k=1, 2, \dots$) が点列 $\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1}$ ($k=1, 2, \dots$) に当たる. よって $\beta_k = \alpha \bar{q}^k$, $\gamma_k = \bar{\alpha} \bar{q}^k$ ($k=0, 1, \dots$) とおくと, E_2 - 項は

$$E_2 = (K[\beta_0, \beta_1, \dots] \otimes \Lambda(\gamma_0, \gamma_1, \dots)) / I,$$

ただし

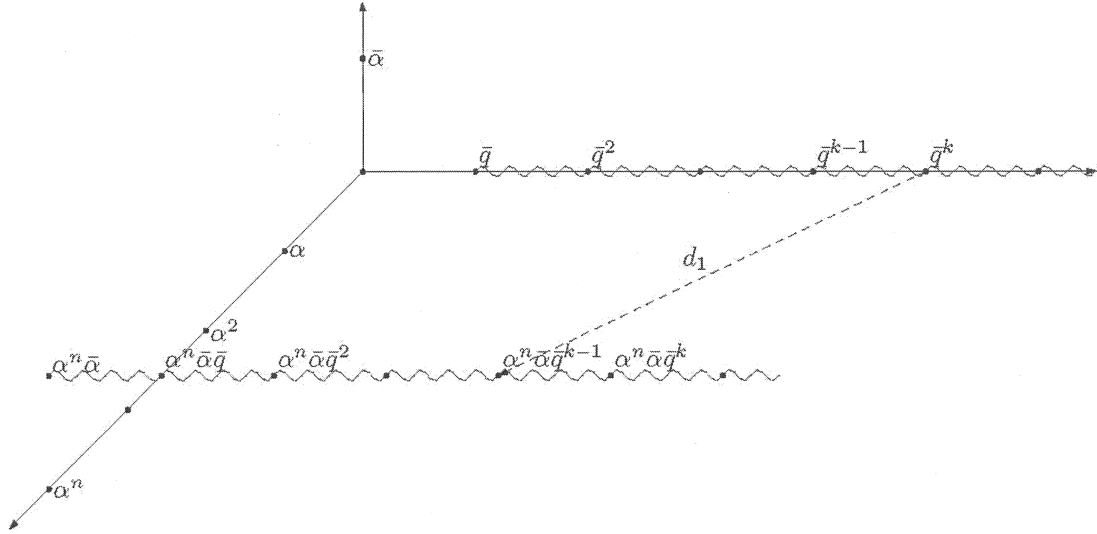
$$\begin{aligned} I &= (\beta_k \beta_l - \beta_{k+l} \beta_0, \beta_0^n \beta_k, \beta_k \gamma_l - \beta_{k+l} \gamma_0, \\ &\quad \beta_0^n \gamma_k, \gamma_k \gamma_l \mid k, l = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

さらに図 3.1 により $d_2 = d_3 = \dots = 0$ だから, $E_\infty = E_2$ が成り立つ.

したがって命題が証明された. $\square$

補題 3.3 と同様にして, 複体 $K[\alpha, \bar{q}] \otimes \Lambda(\bar{\alpha}, q)$ の微分

δ について, 次の補題を得る.


 図 3.3 E_1 - 項の微分 d_1

補題 3.5. 任意の $i=1, 2, \dots$ に対して

$$\delta(\bar{q}^i) = i(n+1)\alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{i-1}$$

である.

定理 3.6. 打ち切り多項式環 $(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0)$ の累次次数 1 のホッホシルト・ホモロジーは

$$\begin{aligned} HH_*^{(1)}(K[\alpha]/(\alpha^{n+1}), 0) \\ = (K(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots) \otimes \Lambda[\gamma_0, \gamma_1, \dots]) / I, \end{aligned}$$

ただし, I は $K(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots) \otimes \Lambda[\gamma_0, \gamma_1, \dots]$ のイデアルで

$$\begin{aligned} I = (\tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_l - \tilde{\beta}_{k+l} \tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_0^n \tilde{\beta}_k, \tilde{\beta}_k \gamma_l - \tilde{\beta}_{k+l} \gamma_0, \\ \tilde{\beta}_0^n \gamma_k, \gamma_k \gamma_l \mid k, l = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

とする.

証明. 命題 3.1, 補題 3.5 により

$$\begin{aligned} \delta(\beta_k) &= \delta(\alpha \bar{q}^k) \\ &= \delta(\alpha) \bar{q}^k + (-1)^{|\alpha|} \alpha \cdot \delta(\bar{q}^k) \\ &= 0 \cdot \bar{q}^k + \alpha \cdot k(n+1) \alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1} \\ &= k(n+1) \alpha^{n+1} \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

さらに補題 3.5, 命題 3.1, $\bar{\alpha}^2 = 0$ により

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}) &= \delta(\bar{\alpha} q) \bar{q}^{k-1} + (-1)^{|\bar{\alpha} q|} \bar{\alpha} q \cdot \delta(\bar{q}^{k-1}) \\ &= \{\delta(\bar{\alpha}) q + (-1)^{|\bar{\alpha}|} \bar{\alpha} \cdot \delta(q)\} \bar{q}^{k-1} \\ &\quad - \bar{\alpha} q \cdot (k-1)(n+1) \alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{k-2} \\ &= (0 \cdot q - \bar{\alpha} \alpha^{n+1}) \bar{q}^{k-1} \\ &\quad + (k-1)(n+1) \alpha^n \bar{\alpha}^2 q \bar{q}^{k-2} \\ &= -\alpha^{n+1} \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

よって, $\tilde{\beta}_k = \beta_k + k(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}$ とおくと (3.5), (3.6) により $\delta(\tilde{\beta}_k) = 0$, すなわち $\tilde{\beta}_k \in \text{Ker } \delta$ となる. また, 命題 3.1, 補題 3.5, $\bar{\alpha}^2 = 0$ により

$$\begin{aligned} \delta(\gamma_k) &= \delta(\bar{\alpha} \bar{q}^k) \\ &= \delta(\bar{\alpha}) \bar{q}^k + (-1)^{|\bar{\alpha}|} \bar{\alpha} \cdot \delta(\bar{q}^k) \\ &= 0 \cdot \bar{q}^k - \bar{\alpha} \cdot k(n+1) \alpha^n \bar{\alpha} \bar{q}^{k-1} \\ &= -k(n+1) \alpha^n \bar{\alpha}^2 \bar{q}^{k-1} = 0, \end{aligned}$$

すなわち $\gamma_k \in \text{Ker } \delta$ である.

つぎに, $\bar{\alpha}^2 = 0$, $q^2 = 0$ より

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_l - \tilde{\beta}_{k+l} \tilde{\beta}_0 &= \{\beta_k + k(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}\} \{\beta_l + l(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{l-1}\} \\ &\quad - \{\beta_{k+l} + (k+l)(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1}\} \beta_0 \\ &= \{\alpha \bar{q}^k + k(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}\} \{\alpha \bar{q}^l + l(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{l-1}\} \\ &\quad - \{\alpha \bar{q}^{k+l} + (k+l)(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1}\} \alpha \\ &= \alpha^2 \bar{q}^{k+l} + l(n+1) \alpha \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1} \\ &\quad + k(n+1) \alpha \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1} - kl(n+1)^2 \bar{\alpha}^2 q^2 \bar{q}^{k+l-2} \\ &\quad - \alpha^2 \bar{q}^{k+l} - (k+l)(n+1) \alpha \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1} \\ &= \alpha^2 \bar{q}^{k+l} + l(n+1) \alpha \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1} \\ &\quad + k(n+1) \alpha \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1} - 0 \\ &\quad - \alpha^2 \bar{q}^{k+l} - (k+l)(n+1) \alpha \bar{\alpha} q \bar{q}^{k+l-1} \\ &= 0 = \delta(0), \end{aligned}$$

すなわち $\tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_l - \tilde{\beta}_{k+l} \tilde{\beta}_0 \in \text{Im } \delta$ となる. また

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0^n \tilde{\beta}_k &= \beta_0^n \{\beta_k + k(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}\} \\ &= \alpha^n \{\alpha \bar{q}^k + k(n+1) \bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}\} \\ &= \alpha^{n+1} \bar{q}^k + k(n+1) \alpha^n \bar{\alpha} q \bar{q}^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

命題 3.1, 補題 3.5 により,

$$\begin{aligned}\delta(q\bar{q}^k) &= \delta(q)\bar{q}^k + (-1)^{|q|}q \cdot \delta(\bar{q}^k) \\ &= \alpha^{n+1}\bar{q}^k - q \cdot k(n+1)\alpha^n\bar{\alpha}\bar{q}^{k-1} \\ &= \alpha^{n+1}\bar{q}^k + k(n+1)\alpha^n\bar{\alpha}q\bar{q}^{k-1}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

よって, 式 (3.7), (3.8) により $\tilde{\beta}_0^n\tilde{\beta}_k = \delta(q\bar{q}^k)$ だから,
 $\tilde{\beta}_0^n\tilde{\beta}_k \in \text{Im } \delta$ となる. さらに, $\bar{\alpha}^2 = 0$ より

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_k\gamma_l - \tilde{\beta}_{k+l}\gamma_0 &= \{\beta_k + k(n+1)\bar{\alpha}\bar{q}\bar{q}^{k-1}\}\bar{\alpha}\bar{q}^l \\ &\quad - \{\beta_{k+l} + (k+l)(n+1)\bar{\alpha}q\bar{q}^{k+l-1}\}\bar{\alpha} \\ &= \{\alpha\bar{q}^k + k(n+1)\bar{\alpha}q\bar{q}^{k-1}\}\bar{\alpha}\bar{q}^l \\ &\quad - \{\alpha\bar{q}^{k+l} + (k+l)(n+1)\bar{\alpha}q\bar{q}^{k+l-1}\}\bar{\alpha} \\ &= \alpha\bar{\alpha}\bar{q}^{k+l} - k(n+1)\bar{\alpha}^2q\bar{q}^{k+l-1} \\ &\quad - \alpha\bar{\alpha}\bar{q}^{k+l} + (k+l)(n+1)\bar{\alpha}^2q\bar{q}^{k+l-1} \\ &= \alpha\bar{\alpha}\bar{q}^{k+l} - 0 - \alpha\bar{\alpha}\bar{q}^{k+l} + 0 = 0 = \delta(0)\end{aligned}$$

だから, $\tilde{\beta}_k\gamma_l - \tilde{\beta}_{k+l}\gamma_0 \in \text{Im } \delta$ である. また

$$\tilde{\beta}_0^n\gamma_k = \beta_0^n\bar{\alpha}\bar{q}^k = \alpha^n\bar{\alpha}\bar{q}^k. \quad (3.9)$$

補題 3.5 により

$$\delta(\bar{q}^{k+1}) = (k+1)(n+1)\alpha^n\bar{\alpha}\bar{q}^k. \quad (3.10)$$

(3.9), (3.10) により,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_0^n\gamma_k &= \frac{1}{(k+1)(n+1)}\delta(\bar{q}^{k+1}) \\ &= \delta\left(\frac{1}{(k+1)(n+1)}\bar{q}^{k+1}\right),\end{aligned}$$

すなわち $\tilde{\beta}_0^n\gamma_k \in \text{Im } \delta$ である. そして, $\bar{\alpha}^2 = 0$ より

$$\gamma_k\gamma_l = \bar{\alpha}\bar{q}^k \cdot \bar{\alpha}\bar{q}^l = \bar{\alpha}^2\bar{q}^{k+l} = 0 = \delta(0)$$

だから, $\gamma_k\gamma_l \in \text{Im } \delta$ である.

ゆえに定理が成り立つ. $\square$

参 考 文 献

- 1) K. Kuribayashi and M. Yokotani, Iterated Cyclic Homology, Kodai Mathematical Journal, **30**(2007), 19-40.
- 2) K. Kuribayashi, M. Mimura and T. Nishimoto, Twisted tensor products related to the cohomology of the classifying spaces of loop groups, Mem. Amer. Math. Soc., March 2006, Vol. 180, Num. 849.
- 3) E. H. Brown Jr and R. H. Szczarba, Rational homotopy type of function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **349**(1997), 4931-4951.

