

曲線の特異点に付随する局所環の余次元による イデアルの分類についての注意

渡利正弘*

Remarks for a classification of ideals with fixed codimension in the local rings for irreducible curve singularities

Masahiro Watari

We discuss a classification problem of ideals by codimension in case the ring is the local ring for irreducible curve singularity. Our aim is to introduce an effective method for computing order sets for fixed codimension. The order sets admit us to decompose the set of all ideals with given codimension into some families. We determine the normal forms of such families for the A_{2d} singularity.

Key words: local ring, ideal, codimension, irreducible curve singularity

大イデアルを $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ で表す. 局所環 $\mathcal{O}$ の元の位数の集合

$$\Gamma := \{\text{ord}(f) \mid f \in \mathcal{O}\}$$

1. 導 入

基礎体 k を標数 0 の代数閉体とする. 既約特異曲線の特異点に付随する局所環 $\mathcal{O}$ を考える. 本稿では, $\mathcal{O}$ は完備であるとし, 余次元による局所環 $\mathcal{O}$ のイデアルの分類問題を考える. このようなイデアルの分類は, r 点のヒルベルトスキームの研究にとってとても重要である. (r 点のヒルベルトスキームについては, 参考文献 1) と 4) を参照.) 特に $\mathcal{O}$ が実際に与えられた時, 与えられた余次元を持つイデアルをどのようにして求めていくかが問題となる. このような計算は, 参考文献 2) や 3) において実行されているがそのやり方については詳しい説明がなされなかった. 本稿ではその方法を紹介する.

まず第 2 節では記号や補題の準備を行なう. またイデアルの位数集合を定義し, 与えられた余次元に対してその余次元を実現するイデアルの位数集合は有限個しかないことを証明する. 第 3 節では位数集合の Γ -加群としての生成元の計算アルゴリズムと余次元が i のイデアル全体の位数集合から余次元が $i+1$ のイデアル全体の位数集合を求めるアルゴリズムを紹介する. 最後に第 4 節で具体例として A_6 型の特異点を考え, 前節までの結果を使って局所環 $\mathcal{O}$ のイデアルの余次元による分類を考える.

2. 準 備

まず最初に記号の準備をする. 局所環 $\mathcal{O}$ の正規化を $\overline{\mathcal{O}}$ と表す. すなわち $\overline{\mathcal{O}} = k[[t]]$ である. 局所環 $\mathcal{O}$ の極

を, 局所環 $\mathcal{O}$ に付随する半群と呼ぶ. 半群 Γ の部分集合 S が Γ -加群であるということを, 次の 2 つの条件を満たすことで定義する.

- (i) $s_1 + s_2 \in S$ for $\forall s_1, s_2 \in S$,
- (ii) $s + \gamma \in S$ for $\forall s \in S, \forall \gamma \in \Gamma$.

Γ -加群 S が, Γ -加群として集合 $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ によって生成されるとき (i.e. $S = \{\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mid \gamma \in \Gamma\}$), $S = \langle A \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ と表す. Γ の導体を, $c := \min \{n \mid \bar{I}(n) \subset \mathcal{O}\}$ により定義する. I を 0 でない $\mathcal{O}$ のイデアルとする. この時, $\tau(I) := \dim_k \mathcal{O}/I$ を, I の余次元という. 余次元が r である $\mathcal{O}$ のイデアルの集合を

$$\mathcal{I}_r := \{I \mid I \text{ は } \tau(I) = r \text{ を満たす } \mathcal{O} \text{ のイデアル}\}$$

とおく. また $\Gamma(I) := \{\text{ord}(f) \mid f \in I\}$ をイデアル I の位数集合と呼び, $G(I) := \Gamma \setminus \Gamma(I)$ とおく. 位数集合 $\Gamma(I)$ は, Γ -加群の構造を持つことに注意する.

補題 1. イデアル I の余次元が r であることと, $\sharp G(I) = r$ であることは同値である.

Proof. イデアル I の余次元が r であることは, 次の条件が成り立つことと同値.

$$(1) \quad \mathcal{O}/I = \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} a_i t^{d_i} \mid a_i \in k, d_0 = 0, d_i < d_{i+1} \right\}$$

条件 (1) は, $\sharp G(I) = r$ を意味する. □

原稿受付 平成 23 年 8 月 31 日

*専門学科共通科目

補題 2. $\mathcal{I}_r$ の元の位数集合と成り得る Γ -加群は有限個である。

Proof. 任意の $\mathcal{I}_r$ の元 I に対して, $G(I) = \{0, d_1, \dots, d_{r-1}\}$ は条件 (1) を満たす. 明らかにこのような数 $d_1, \dots, d_{r-1}$ は有限個であるから, $\Gamma(I) = \Gamma \setminus G(I)$ も有限個である. $\square$

Γ -加群 S を位数集合として持つようなイデアル全体を $\mathcal{I}(S)$ で表す. この時, $\mathcal{I}(S)$ に属する任意のイデアルは全て同じ余次元を持つ事に注意する. $\mathcal{I}_r$ の元の位数集合と成り得る Γ -加群を $S_1, \dots, S_l$ とすると, $\mathcal{I}_r$ は次の様に分解される.

$$(2) \quad \mathcal{I}_r = \bigcup_{i=1}^l \mathcal{I}(S_i).$$

ここで $i \neq j$ ならば, $\mathcal{I}(S_i) \cap \mathcal{I}(S_j) = \emptyset$. 分解 (2) に対して, $\mathcal{I}_r$ の位数集合全体を

$$(3) \quad \mathfrak{S}_r := \{S_1, \dots, S_l\}$$

と表す. また各 S_i の生成集合を A_i としたとき, その全体を $\mathfrak{A}_r := \{A_1, \dots, A_l\}$ と表す.

I を, $I \neq (1)$ かつ $I \neq (0)$ を満たす $\mathcal{O}$ のイデアルとする. $G_1(I) := G(I) \setminus \{0\}$ とおく. $b_1 := \min\{G_1(I)\}$ に対して, 集合 $B_1(I) := G_1(I) \cap (b_1 + \Gamma)$ を考える. もし $G_1(I) \neq B_1(I)$ であれば, $b_2 := \min\{G_1(I) \setminus B_1(I)\}$, $B_2 := \{G_1(I) \setminus (b_1 + \Gamma)\} \cap (b_2 + \Gamma)$ とおく. 以下, この過程を帰納的に繰り返す. すなわち $G_1(I) \neq \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i(I)$ であれば, $b_j := \min\{G_1(I) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i(I)\}$ かつ $B_j(I) := \{G_1(I) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i(I)\} \cap (b_j + \Gamma)$ とおく. $\sharp G_1(I) < \infty$ であるから, ある正整数 n が存在して, $G_1(I) = \bigcup_{i=1}^n B_i(I)$ となる. このとき各 i に対して, $d_i := \max\{B_i(I)\}$ とする.

3. 位数集合の計算法

Γ -加群の生成元の計算法 (以下, 計算法として参照)
与えられた Γ -加群 S の (Γ -加群としての) 生成元を求める. まず $\alpha_1 := \min\{S\}$ に対して, 集合 $\alpha_1 + \Gamma = \{\alpha_1 + \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ を考える. もし $S \neq \alpha_1 + \Gamma$ であれば, $\alpha_2 := \min\{S \setminus (\alpha_1 + \Gamma)\}$ とおき, 集合 $\bigcup_{i=1}^2 (\alpha_i + \Gamma)$ を考える. もし $S \neq \bigcup_{i=1}^2 (\alpha_i + \Gamma)$ であれば, $\alpha_3 := \min\{S \setminus \bigcup_{i=1}^2 (\alpha_i + \Gamma)\}$ を考える. この操作を帰納的に繰り返していく. つまり $S \neq \bigcup_{i=1}^{j-1} (\alpha_i + \Gamma)$ であれば, $\alpha_j := \min\{S \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} (\alpha_i + \Gamma)\}$ とおき, 集合 $\bigcup_{i=1}^j (\alpha_i + \Gamma)$ を考える. この結果, 次のような降下列を得る.

$$S \supsetneq S \setminus (\alpha_1 + \Gamma) \supsetneq \dots \supsetneq S \setminus \bigcup_{i=1}^j (\alpha_i + \Gamma) \supsetneq \dots$$

今, 無限集合 $\{a \in \mathbb{N} \mid a \geq \alpha_1 + c\}$ が S と $\alpha_1 + \Gamma$ の両方に含まれることから, $\sharp\{S \setminus (\alpha_1 + \Gamma)\} < \infty$ であるこ

とが従う. よって $S = \bigcup_{i=1}^m (\alpha_i + \Gamma)$ を満たす正整数 m が存在する. この操作で得られた $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ が, $S = \langle A \rangle$ となる最小の生成集合であることは明らかである.

ここで次の補題を証明する.

補題 3. 位数集合 $\Gamma(I) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ を持つ $\mathcal{I}_{r-1}$ の元 I に対して, $G(I') = G(I) \cup \{\alpha_i\}$ (i は任意) となるイデアル I' が $\mathcal{I}_r$ の元として存在する. 逆に $G_1(J) = \bigcup_{i=1}^n B_i(J)$ を満たす, $\mathcal{I}_r$ の元 J を考える. 各 i に対して, $G(J') = G(J) \setminus \{d_i\}$ を満たすような J' が $\mathcal{I}_{r-1}$ の中に存在する.

Proof. I を $\Gamma(I) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ をもつ $\mathcal{I}_{r-1}$ の元とする. 任意の i に対して

$$S = [\Gamma(I) \setminus \{\alpha_i\}] \cup \{\alpha_i + \gamma \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}\}$$

は, Γ -加群の構造をもつ. ここで

$$f_\gamma = t^\gamma \quad (\gamma \in S)$$

全体で生成されるイデアルを I' とすると, 明らかに $\Gamma(I') = S$ である. つまり $G(I') = G(I) \setminus \{\alpha_i\}$. $I \in \mathcal{I}_{r-1}$ であることから, 補題 1 により $\sharp G(I) = r - 1$ である. よって $\sharp G(I') = r$. 再び補題 1 より, $I' \in \mathcal{I}_r$ を得る.

次に J を $\mathcal{I}_r$ の元で, $G(J) = \bigcup_{i=1}^n B_i(J)$ を満たすものとする. ここで各 i に対して $\Gamma(J) \cup \{d_i\}$ は, Γ -加群となることに注意する. この時,

$$f_\gamma = t^\gamma \quad (\gamma \in \Gamma(J) \cup \{d_i\})$$

で生成されるイデアル J' を考えれば, $\Gamma(J') = \Gamma(J) \cup \{d_i\}$ かつ $G(J') = r - 1$ を満たしている. 補題 1 により $J' \in \mathcal{I}_{r-1}$ となる. $\square$

補題 3 を用いて, $\mathcal{I}_{r-1}$ の位数集合全体 $\mathfrak{S}_{r-1}$ から $\mathcal{I}_r$ の位数集合全体 $\mathfrak{S}_r$ を求める方法を考える.

$\mathfrak{S}_{r-1}$ からの $\mathfrak{S}_r$ 構成法 (以下, 構成法として参照)

$\mathfrak{S}_{r-1} = \{S_1, \dots, S_l\}$ が与えられたとき, 各元 S_i の生成集合を計算法により求めておく. それを $A_i = \{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m(i)}\}$ ($i = 1, \dots, l$) と表す. 補題 3 の証明にあるように, 各 $i \in \{1, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, m(i)\}$ に対して,

$$(4) \quad S := [S_i \setminus \{\alpha_{i,j}\}] \cup \{\alpha_{i,j} + \gamma \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}\}$$

を考えれば, これは $\mathfrak{S}_r$ の元である. 再び補題 3 の証明より, $\mathcal{I}_r$ の元 I の位数集合 $\Gamma(I)$ に対して, $\Gamma(I) \cup \{d_i\}$ は $\mathcal{I}_{r-1}$ に対する位数集合であったから $\mathfrak{S}_r$ は, (4) の形の元でつくされる.

計算法と構成法を組合わせることにより、余次元 r に対する位数集合全体 $\mathfrak{S}_r$ を次の定理により求めることができる。

定理 4 ($\mathfrak{S}_r$ の計算法). 集合 $\mathfrak{S}_r$ は次の操作 1 と操作 i から、帰納的に得られる。

操作 1 $\mathfrak{S}_1 = \{\Gamma(\mathbf{m}_O)\}$ とおき、計算法により $\Gamma(\mathbf{m}_O)$ の生成集合を求める。

操作 i ($i = 2, \dots, r$): $\mathfrak{S}_{i-1}$ から、構成法を用いて $\mathfrak{S}_i$ を求める。次に $\mathfrak{A}_i$ を計算法により求める。

Proof. 明らかに $\mathcal{I}_1 = \{\mathbf{m}_O\}$ である。よって $\mathfrak{S}_1 = \{\Gamma(\mathbf{m}_O)\}$ 。その他の部分は、計算法と構成法から従う。 $\square$

定理 4 により求められた $\mathfrak{S}_r$ に対して、 $\mathfrak{S}_r$ の各元を位数集合に持つようなイデアルを決定する必要があるが一般にこれは簡単でない。だが A_{2d} 型の特異点に付随する局所環 $k[[t^2, t^{2d+1}]]$ のイデアルに関して、次の補題が成り立つ。

補題 5. 局所環 $k[[t^2, t^{2d+1}]]$ のイデアル I に対して、 $\Gamma(I) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) であれば、 I は

$$(5) \quad f_1 = t^{\alpha_1} + \sum_{j \in G(I), j > \alpha_1} a_j t^j, \quad f_2 = t^{\alpha_2}.$$

により生成される。他方、もし $\Gamma(I) = \langle \alpha_1 \rangle$ であれば、 I は上記の f_1 のみで生成される。

4. 例

前章までの結果を使い、 A_6 型の特異点に付随する局所環 $k[[t^2, t^7]]$ のイデアルを、 $1 \leq \tau \leq 6$ の余次元に関して分類する。この節では Γ -加群の集合 (3) を

$$\mathfrak{S}_r = \{S_{r,1}, \dots, S_{r,l}\}$$

と表し、この表記に対して $\mathcal{I}_r$ の分解 (2) の要素を

$$\mathcal{I}_{r,i} = I(S_{r,i}) \quad (i = 1, \dots, l)$$

とおくことにする。今、 $\Gamma = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, \dots\}$ である。

定理 4 を用いることにより、次の表を得る。

τ	order sets
1	$S_{1,1} = \langle 2, 7 \rangle$
2	$S_{2,1} = \langle 4, 7 \rangle, S_{2,2} = \langle 2 \rangle$
3	$S_{3,1} = \langle 6, 7 \rangle, S_{3,2} = \langle 4, 9 \rangle$
4	$S_{4,1} = \langle 7, 8 \rangle, S_{4,2} = \langle 6, 9 \rangle, S_{4,3} = \langle 4 \rangle$
5	$S_{5,1} = \langle 8, 9 \rangle, S_{5,2} = \langle 7, 10 \rangle, S_{5,3} = \langle 6, 11 \rangle$
6	$S_{6,1} = \langle 9, 10 \rangle, S_{6,2} = \langle 8, 11 \rangle, S_{6,3} = \langle 7, 12 \rangle$ $S_{6,4} = \langle 6 \rangle$

上記の表の位数集合に対して、補題 5 を用いることにより次の分類結果を得る。

τ	ideals
1	$\mathcal{I}_{1,1} = (t^2, t^7)$
2	$\mathcal{I}_{2,1} = (t^4, t^7), \mathcal{I}_{2,2} = (t^2 + at^7)$
3	$\mathcal{I}_{3,1} = (t^6, t^7), \mathcal{I}_{3,2} = (t^4 + at^7, t^9)$
4	$\mathcal{I}_{4,1} = (t^7, t^8), \mathcal{I}_{4,2} = (t^6 + at^7, t^9)$ $\mathcal{I}_{4,3} = (t^4 + at^7 + bt^9)$
5	$\mathcal{I}_{5,1} = (t^8, t^9), \mathcal{I}_{5,2} = (t^7 + at^8, t^{10})$ $\mathcal{I}_{5,3} = (t^6 + at^7 + bt^9, t^{11})$
6	$\mathcal{I}_{6,1} = (t^9, t^{10}), \mathcal{I}_{6,2} = (t^8 + at^9, t^{11}),$ $\mathcal{I}_{6,3} = (t^7 + at^8 + bt^{10}, t^{12})$ $\mathcal{I}_{6,4} = (t^6 + at^7 + bt^9 + ct^{11})$

参考文献

- 1) G. Pfister, J.H.M. Steenbrink: Reduced Hilbert schemes for irreducible curve singularities, J. Pure and Applied Algebra. (1992) **77** 103-116
- 2) 相馬芳紀: 平面曲線の単純特異点に対する r 点のヒルベルトスキーム, 埼玉大学理工学研究科数理電子情報専攻 修士論文 (2010)
- 3) 相馬芳紀, 渡利正弘: Punctual Hilbert schemes for irreducible curve singularities of E_6 and E_8 types, arXiv:math.AG/1109.4991
- 4) 渡利正弘: 単項曲線の特異点に対する r 点のヒルベルトスキームについて, 津山高専紀要 (2010) 63-65