

水平線俯角による地球半径測定

岡本成二*, 佐藤誠**

Estimation of the earth's radius by measuring depressive angle of the horizon

Seiji OKAMOTO and Makoto SATO

Estimating the earth's radius from depressive angle of the horizon is not thought to be effective because of refraction in the atmosphere. Actually a measured depressive angle of horizon in our field work at Mt. Daisen is much smaller than a geometrically estimated value. However, after calculating angle shift by refraction in the atmosphere, observed depressive angle can be corrected with an error of 0.01 degree which gives an accuracy of a few percent to the earth's radius.

Key words : earth's radius, depressive angle, horizon, refraction

1. はじめに

平成22年度チャレンジゼミナールのテーマとして太陽の質量と直径を、実際に自分たちで測定できる物理量から求めることを設定した。目的を達成するためのシナリオは、Fig.1に示すように、地球半径の測定から出発して、月までの距離、太陽までの距離を順に求め、これに重力定数 G と地球の公転周期を加えることで、最終的に、太陽の直径と質量を求める構成である。このシナリオでは地球半径が最も基本的な数値であり、これを2桁程度の精度で求めることが要求される。

ゼミ参加の学生に地球半径 R の測定方法の提案を課して調査させ、以下のアイデアが挙がった。

(1) 同一経度の二点間の距離 L と緯度の差 δ から

R を求める ($R = L/\delta$)

(2) 高い山 (高度 h) から水平線を見たときの俯角 θ から R を求める ($R = h \cos \theta / (1 - \cos \theta)$)

(3) 朝夕の太陽光のスペクトルシフト $\Delta v/v_0$

(ドップラー効果) から R を求める ($R = c \Delta v / (2 \omega v_0)$, c は真空中の光速, ω は地球の自転角速度)

最初のアイデア (1) は、最もオーソドックスな方法で、エラトステネスが、初めて地球の半径を求めた方法である。すなわち、夏至時にアスワンでは井戸の底まで太陽光が届くという見聞から、アスワンのほぼ真北に位置するアレクサンドリアでの夏至時の影角度を測定し、両都市間の距離 800Km から地球半径を決定した。我々はこれを実行的に行うため、同経度でない任意の2地点間で行える計算を用い、2地点の緯度経度は、GPSを用いて決定する方

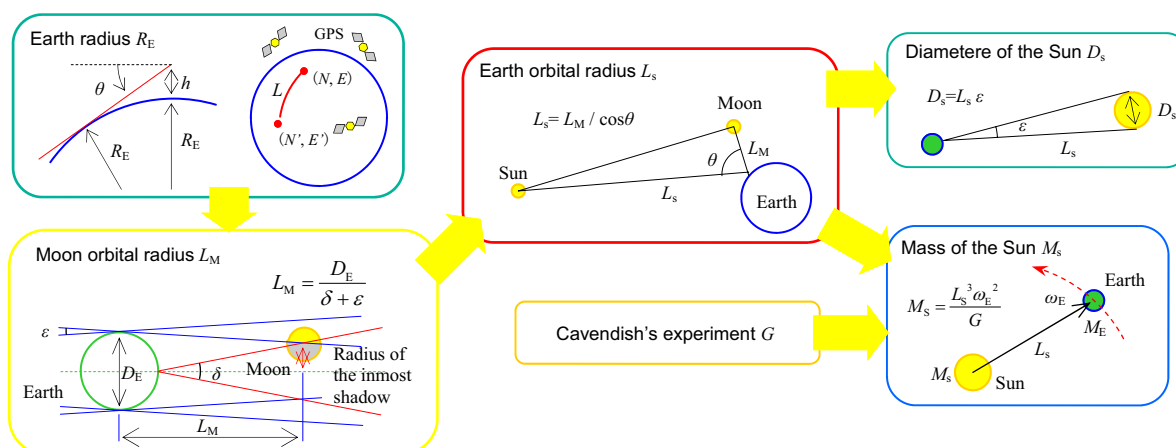


Fig.1 A scenario for the estimation of radius and mass of the Sun.

原稿受付 平成23年8月31日

*一般科目非常勤講師

**一般科目

法を採用した。携帯電話等に組み込まれているGPSは0.1秒程度の精度があり、数百m程度の2点間の距離をもとに2桁程度の精度で地球半径を求められると推測された。水平で数百mの直線距離を安全に計測できる場所として、本校の北西に位置するグリーンヒルズ公園内を横切る直線道路を選定した。

2番目の方法は、思いつき易い方法だが、実際にこの方法で実測したという報告は無い。大気による屈折が邪魔をして測定できないのではないかとこの疑念はあったが、やってみないと分からないだろうということで、山陰の大山に登り測定を試みた。本報告はその結果と考察である。

3番目の方法については、自転速度で見積もられるドップラーシフト量が、 $\Delta v/v_0 = 3.1 \times 10^{-6}$ と極めて小さく、高分解能の分光器でも検出は困難であることが判明し断念した。公転速度であればドップラーシフトを検出可能なので、公転軌道半径を求めることには利用できるだろう。

2. GPSによる測定

直線距離400mを50m長の金属製巻尺で測り、開始点と終点の経緯度をGPSで確認した。2点の経緯度は、 $(\theta, \phi) = (35^\circ 5' 34.8'', 134^\circ 0' 38.5'')$, $(\theta', \phi') = (35^\circ 5' 46.0'', 134^\circ 0' 46.6'')$ であった。地球中心からの開き角は、 $\eta = 0.0038^\circ$ と算出され、地球半径は、 $R = 6.26 \times 10^6 \text{m}$ と見積もることができた。

開き角 η はベクトル内積より、以下の計算式で2点の経緯度より算出される。

$$\eta = \cos^{-1} \left(\begin{aligned} &\cos \theta \cos \phi \cos \theta' \cos \phi' \\ &+ \cos \theta \sin \phi \cos \theta' \sin \phi' \\ &+ \sin \theta \sin \theta' \end{aligned} \right) \quad (1)$$

さらに、開き角 η と2点間距離 L から、地球半径 R は、次のように算出される。

$$R_E = \frac{L}{\eta} \quad (2)$$

GPSで高度も同時に記録し、2点間の高度差7.2mを確認したが、直線距離を補正したところ、ほとんど影響は無い (Fig.2)。

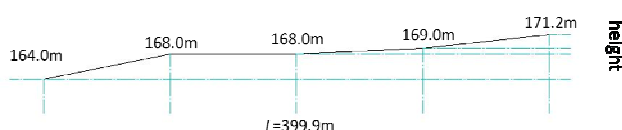


Fig. 2 Height map. Every distance to each neighbor point is 50.0m.

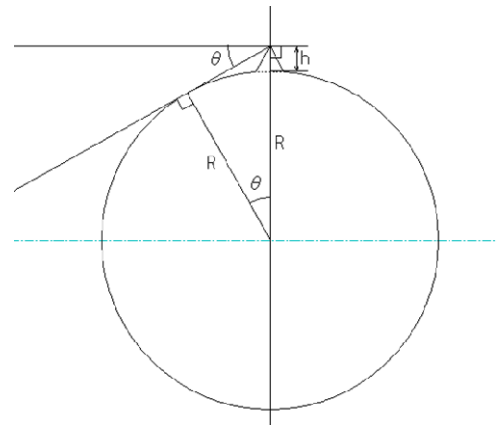


Fig. 3 Geometrical relation between a depressive angle of the horizon θ and the earth's radius R .

この方法で、2%程度の精度で地球半径を求めることができた。2点間距離をさらに大きくとることで、3桁の精度を得られるように改善したい。GPSの精度は0.1秒なので、これに対応する地表での距離が約3mとなる。2点間距離400mの場合、約1%の精度と見積もられ、今回得た値の誤差が妥当であることがわかる。3桁の精度を得るには、最低3kmの距離を3m程度の精度で計測する必要がある。2点間の距離が1kmを超えると三角測量を行うことになるが、距離を3桁の精度で求めるのは難しい。これは、今後の課題とした。

3. 水平線俯角測定

地球が丸いことの証として、海岸に近づく船は水平線上にマストから見えてくることが挙げられる。著者はそのような情景を残念ながら見たことはないが、那岐山頂上 (標高1255m) から日本海を望んだとき、水平線がペットボトル内の水面で確認した水

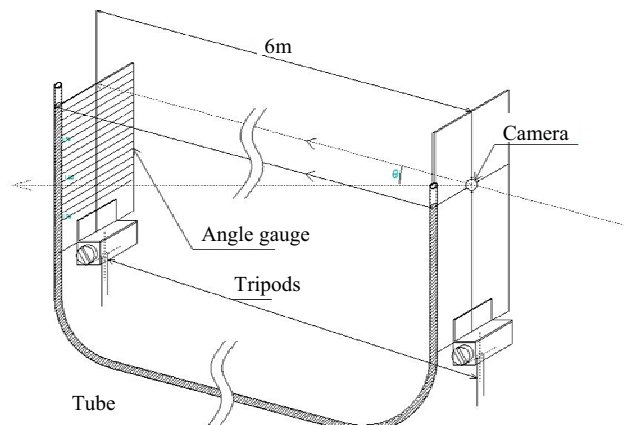


Fig. 4 A gauge for measuring depressive angle of the horizon. Water level is given by water in a tube.

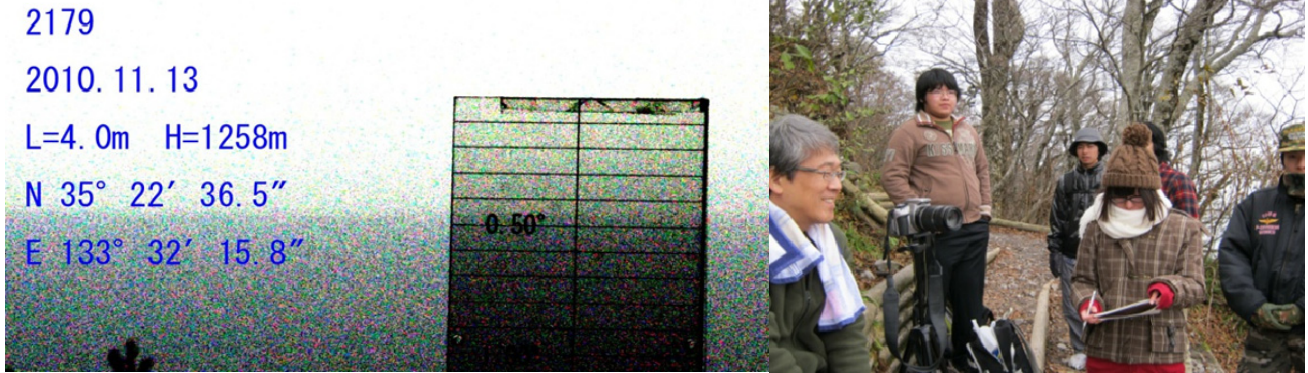


Fig. 5 Left: A photograph of the horizon and an angle gage, whose contrast is extremely enhanced. Right: A snapshot of our field work at 1258m in height on the summer climbing route of Mt. Daisen.

平面より1度程度下方に見えることを経験したことがある。水平線が低く見えるのは、Fig.3に説明するように、地球が丸いからで、この水平線の俯角（水平から下方への角度）と観測位置の高度がわかれば地球半径を求めることができる（ $R = h \cos \theta / (1 - \cos \theta)$ ）。しかし、蜃気楼などの現象からも分かるように、大気中では見える角度と実際の角度が大きく異なることは普通に起きうること、また、途中の大気の状態、すなわち温度や湿度、気圧（これらは空気の屈折率に関係する）を把握できないため、水平線の俯角を実測から補正して求めることは困難だろうと推測された。

しかし、地球半径の決定に不向きな方法であることを確認することも重要と考え、実際にずれを測ってみることにした。チャレンジゼミナールの受講生6名と準備し、フィールドワーク登山を2011年11月13日に実施した。測定に用いるゲージは、透明アクリル板に6m離れた位置での角度目盛りを刻んだものである（Fig.4）。6mでは0.1度はおよそ1cmになり、山頂（標高1720m）での測定を想定し、2.0度までの目盛りを準備した。水平はビニルチューブ内の水面を利用して決定することにした。チューブ内の水の濡れを良くし、両端での水面高さにずれが生じないように、泡立たない程度に洗剤を添加した。

あいにく当日は黄砂の影響で遠方の景色がかすみ、水平線を肉眼で確認することが難しく、記録用に撮影した写真を後日解析することにより、水平線俯角を決定した。撮影時は、カメラの光軸を水平にするため、目盛りの0度とカメラレンズの中央を同じ高さに保ち、目盛りの0度を画面の中央において撮影した（Fig.5）。また、山腹では6mの距離を確保することができず、距離を4mに短縮して計測を行った。距離6m用の目盛りで読み取った角度

（0.48°）を、6/4倍して正しい読み（0.72°）に換算した。GPSによる位置座標は、N35°22'36.5"、E133°32'15.8"、標高は1258mであった。

測定された水平線俯角0.72°は、地球半径 6360km

として見積もられる1.14°に比べ0.42°も小さく、水平線がかなり高く見えていたことになる。

4. 測定誤差

前節の結果から、水平線俯角から地球半径を求めるのは無理と直ちに結論付けることも可能であるが、さらに検討してみる。まず、測定の精度について考察する。

俯角測定の精度 $d\theta$ と地球半径精度 dR/R の関係は、次の式で近似できる。

$$\frac{dR}{R} = -\frac{4h}{R\theta^3} d\theta \quad (3)$$

今回の計測では、0.01°の角度読み取り精度なので R については2%程度の誤差と推定される。

同様に、標高測定の精度 dh による誤差は、次の式に近似される。

$$\frac{dR}{R} = \frac{2}{R\theta^2} dh \quad (4)$$

2桁の精度すなわち $dR/R = 0.01$ を確保するには、 $dh = 13m$ の精度で十分であることが分かる。ただし、上記誤差の見積もりには、 $R = 6.36 \times 10^6 m$ 、 $\theta = 1.14^\circ$ 、 $h = 1258m$ の値を用いた。

水平線までの距離は $R\theta$ で算出され、上記条件では約130kmとなる。水平線が界面に漂う霧などで高めに観測される可能性もある。130km先の100mは、角度にして0.04°に相当するので、今回の測定のずれをすべてこれが原因とすると、海面から1km高い位置を海面と見誤っていたことになる。海上の様子が分からないので、可能性は排除できない。

5. 大気の屈折の影響

空気の屈折率は、圧力、温度、湿気で変化するが、高い位置から水平線を観測する場合、高度によ

る圧力変化が最も俯角測定に影響を与えと考えられる。なぜなら高度による空気の密度変化が他の要因より大きいからである。ここでは、まず高度による気圧変化を考慮し、観測高度と観察される水平線俯角の関係を明らかにする。そののち、温度変化と湿度の影響を考慮する。

空気の屈折率 n は、圧力 P 、温度 T 、水蒸気分圧 F から次の式により算出することができる¹⁾。

$$(n-1) \times 10^8 = C(\lambda) \times \frac{P}{T} \left[1 + P \left\{ 57.90 \times 10^{-8} - 9.3250 \times 10^{-4} \times \frac{1}{T} + 0.25844 \times \frac{1}{T^2} \right\} \right] \times \left(1 - 0.16 \times \frac{F}{P} \right) \quad (5)$$

ここで、

$$C(\lambda) = 2371.34 + 683939.7 \left(130 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} + 4547.3 \left(38.9 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} \quad (6)$$

である。式中の単位は、それぞれ、温度 T は K、圧力 P 、水蒸気分圧 F は hPa、波長 λ は μm である。この式は屈折率の1からのずれを、波長に関する要因、圧力と温度による要因、水蒸気分圧による要因の3つの積から構成されている。したがって、湿度の影響を考慮しない場合は3番目の項を1として計算すればよい。湿度100%であれば、その温度における飽和水蒸気圧を水蒸気圧として算出する。

任意の標高 h での気圧 P は、国際民間航空機関 (ICAO) が定めた ICAO 標準大気では、以下の式で算出される²⁾。

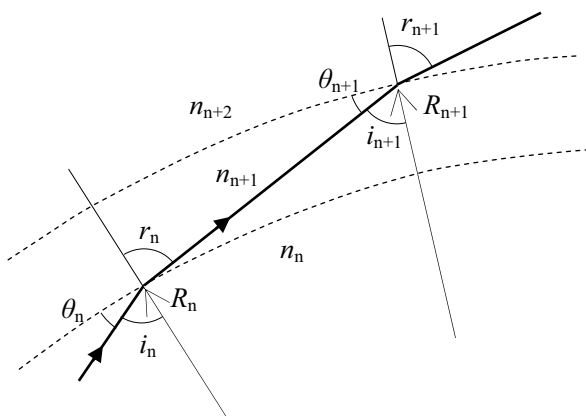


Fig.6 Layered model of atmosphere with gradient of refractive index along height for calculating depressive angle of the horizon.

$$P = P_0 \left(1 - \frac{\alpha h}{T_0} \right)^{5.25588} \quad (7)$$

ここで P_0 、 T_0 は標高 0m での気圧と温度、 α は温度の低減率である。この計算式は気圧高度計で用いられる関係式である。気温は 100m あたり 0.65K 低下すると仮定している。式(6)中の水蒸気圧の設定が不明なので、屈折率の算出に不安はあるが、湿度の影響は無視し、表計算ソフトで標高 0m より 10m 刻みで水平線俯角を計算した。計算方法は、Fig.6のように高度毎に同心円状の屈折率の異なる層を仮定し、水平線から水平に出た光線が各層の境界で順次屈折するとして、観測する高度における水平線俯角を逐次計算で求めた。標高 0m では、水平線俯角は 0 である。地球の曲率を考慮した計算である。高度に対する気圧の計算結果を Fig.7 に示す。標高 0m での気圧を $P_0 = 1013.25\text{hPa}$ 、気温を $T_0 = 15^\circ\text{C}$ とした。これらの条件設定は測定当日の状況にほぼ一致している。また、高度の刻みを 5m と 2m に変更して同様の計算を行ったが同じ値が得られることを確認している。

蒸気圧の影響を無視して計算すると、 $h = 1258\text{m}$ での俯角は、 $\theta = 1.040^\circ$ と算出される。高度による気圧の変化により、見かけ上、角度にして 0.10° ほど水平線俯角が減少すると見積もられる。

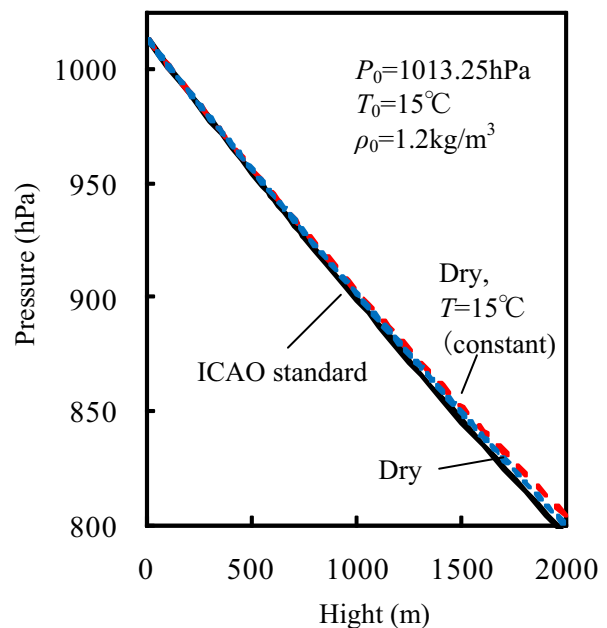


Fig.7 Calculated atmospheric pressure. Solid line: ICAO standard atmosphere. Red broken line: dry and constant temperature condition. Blue broken line: dry air. $P_0 = 1013.25\text{ hPa}$, $T_0 = 15^\circ\text{C}$, $\alpha = 0.0065\text{K/m}$.

6. 温度と湿度の影響

ICAO標準大気は、実用的な気圧の算出式であるが、温度の影響や湿度の影響が式中に陰に含まれる経験式なので、それらの影響を抽出して調べるには都合が悪い。ここでは、まず温度と湿度の影響を無視した気圧の高度分布を求め、その後、温度の影響、湿度の効果を加えてその影響を見積もることにする。湿度、温度に関係なく、空気の密度 ρ は、マックスウェル分布として次式のように高度 h の関数として与えることができる。

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{P_0}\right) \quad (8)$$

ここで、 ρ_0 , P_0 は標高 0m での空気の密度と大気圧である。屈折率の1からの変位は密度に比例するので、任意の高度 h における空気の屈折率 n は、次式に表せる。

$$n - 1 = \frac{\rho}{\rho_0} (n_0 - 1) \quad (9)$$

標準大気については水平線の俯角の計算を大気を高度毎に層に分けて順次屈折することで行ったが、Fig.6の入射角 i の漸化式から、面白いことに途中の空気層の屈折率分布に関わりなく、高度 0m での屈折率 n_0 と観測高度での屈折率 n だけから水平線の俯角が決定されることが分かった。すなわち次のようである。

n 番目の層境界での屈折の関係式は、

$$n_n \sin i_n = n_{n+1} \sin r_n \quad (10)$$

であり、また、余弦定理より、

$$R_{n+1} \sin i_{n+1} = R_n \sin(\pi - r_n) \quad (11)$$

なので、入射角 i_n の漸化式は、

$$\sin i_{n+1} = \frac{R_n}{R_{n+1}} \frac{n_n}{n_{n+1}} \sin i_n \quad (12)$$

となる。初項は水平線なので $i_0 = \pi/2$ であり、 n 項目は、

$$\sin i_n = \frac{n_0}{n_n} \frac{R_0}{R_n} \quad (13)$$

と表すことができる。したがって、高度 h における水平線の俯角 θ は途中の屈折率分布に関係なく、高度 0m での空気の屈折率 n_0 と観測高度での空気の屈折率 n から直接に算出できることが分かる。地球半径を R とすると次のように表せる。

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{n_0}{n} \frac{R}{R+h} \quad (14)$$

式(8)を用い、高度 0m から順次積算して求めた乾燥空気の場合の気圧と高度の関係を、温度変化を考慮した場合と温度変化がない場合についてFig.7に示す。ICAO標準大気に比べ、気圧の変化がわずかに少ない。高度による温度変化、および湿度の影響は気圧の変化をわずかだが増加させることが分かる。気圧の変化が大きいほど、屈折の影響も大きくなるように思えるが、式(5)に温度と湿度を考慮して屈折率を算出し、式(14)にしたがって水平線の俯角を計算すると、温度変化は屈折の影響を強めるが、湿度は逆に弱めるようである(Table 1)。しかし、その影響はわずかで、今回の測定条件では、俯角に対して温度の影響は、 -0.002° 、湿度の影響は最大で $+0.021^\circ$ と見積もられる。計算の条件は、波長 $\lambda=550\text{nm}$ である。湿度の影響が最も強く表れるのは、高度 0m で乾燥、観測高度で湿度 100% の場合である。湿度を考慮した俯角計算では、この条件で行った。飽和水蒸気圧は理科年表に依った。

以上のように、水平線の俯角は、大気による屈折で 0.10° ほど低く観測され、湿度の影響は一桁小さく、温度の影響はさらに一桁低いことがわかった。大気圧の高度変化は一か所の高度での気圧を与えれば計算でもとまるので、水平線俯角を測定する際に、観測高度での気圧を記録しておけば湿度や温度分布などの情報がなくても、大気の屈折の影響は 0.01° 程度の精度で補正可能であると結論される。

今回の計測では、この補正を施してもなお 0.30° ほど水平線が高く見えていることになる。考えられる原因として、一つには、前述したように、海上に漂う厚い霧の上面を水平線と見做した可能性が挙げられる。また、計測作業で最も不安を感じるの

Table 1 Estimated depression angle of horizon.

θ at 1258m		temperature	
		fix	considered
humidity	dry	1.036°	1.034°
	considered	1.057°	1.055°

(1.14° for no refraction, and 1.040° for ICAO standard)

が、カメラ中心と角度ゲージの原点の水平設定である。今回の測定では、水を入れた 10m 長の内径 5mm のビニールチューブを用いている。両端で 1cm 以上水面がずれるとは考えにくいではあるが、最初の調整のみで、チューブをゲージやカメラに常時固定しなかったため、水平位置が保たれていなかったか確信が持てないのも事実である。角度 0.3° は 4m の距離では水平の 2cm のずれに対応しており、水平調整のミスの可能性も否定できない。

さらに、ここでは考慮していない他の原因がないとも限らない。たとえば、上記の考察では地球は真球と仮定しているが、実際には自転の影響のため赤道付近が膨らんだ回転楕円体である。このことを考慮すると南北方向に水平線を観察する場合、高緯度では水平線が高く、低緯度では低く見えることが予想される。大山からの観測では、北の方向に日本海を望む形になっているので影響があるかもしれない。これに関連して北緯 35° 付近では、遠心力で重力の方向が地球中心に対して 0.1° 程度外側へずれており、その影響で水平の基準がずれている懸念もある。計算の詳細は別の機会に譲るが、重力の方向のずれと地球の真球からの変形は関連しており、実際、地球の極半径と赤道半径から地球の形状を回転楕円体として、北緯 35° 付近での水平面の地軸とのなす角を算出すると重力方向のずれと一致していることが確認できる。北緯 35° 付近での曲率半径を算出して水平線俯角測定への影響を推定すると南北方向ともに 0.01° 程度であり重要ではないことが確認できた。この例のように、水平線の俯角という単純な測定対象であっても、思いもよらない様々な要

因が絡んでいることを改めて認識させられる。

7. まとめ

チャレンジゼミナールの活動の中で地球半径の測定を試みた。水平線の俯角から地球半径を求めることは、大気による屈折により困難であると当初思われた。実際、大山の中腹（標高 1258 m）からは、大気の影響が無いとした場合の水平線の俯角 1.14° に対して 0.42° も低い 0.72° と測定された。高度による気圧の変化から推定される屈折の影響、温度変化による影響、および湿度の影響を見積もったところ、気圧の影響が最も大きく、水平線の俯角は見かけ上 0.10° 低くなると推測された。温度と湿度の影響は気圧による影響に比較すると一桁以上小さく、今回の測定における角度測定精度に隠れる。気圧の高度変化は容易に推定できるので、大気による屈折の影響を補正して、地球半径を数%の精度で決定できるはずである。今回の測定では、屈折の補正以上の角度で水平線俯角が低く計測され、その原因は不明である。計測時の水平の設定、海面の見誤りなどの可能性もあり、再度の計測により確認を行い、水平線俯角測定により地球半径を計測できることを実証したい。

参考文献

- 1) 国立天文台編, 「理科年表」, 天文大気差, もしくは, Owens: Applied Optics, 6(1967)51
- 2) ISO Standard Atmosphere, たとえば, M. Cavcar, 'The International Standard Atmosphere (ISA)', <http://home.anadolu.edu.tr/~mcavcar/common/ISAweb.pdf>